

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΓΕΝΙΚΗΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2010-2011 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = x^2 - 1$.

α. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) = 0$;

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της $g(x)$ βρίσκεται "κάτω" απ' τον άξονα $x'x$;

γ. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad \varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \log(9 - x^2)$

β. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

γ. $f(x) = \frac{4x - 2}{\sqrt{e^x + 1}}$

δ. $f(x) = \frac{2\epsilon\varphi x}{\eta\mu x - \eta\mu 2x}$

ε. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

στ. $f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{\sqrt{x-4}}$

ζ. $f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$

η. $f(x) = \sqrt{3 - |x|}$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \ln \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

β. $k(x) = \sqrt{12 - x - x^2}$

γ. $h(x) = \ln \frac{x+2}{5-x} + 3 \ln \frac{x-1}{x-3}$

δ. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

ε. $r(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2}}$

στ. $t(x) = \log(2 - \log x)$

4. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α. $f(x) = -\frac{1}{x}$

β. $\rho(x) = \ln \frac{1}{x}$

γ. $\varphi(x) = e^{x+1} - 2$

δ. $g(x) = x^2 - 1$

ε. $\sigma(x) = \ln|x|$

στ. $\pi(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

5. Αν $f(x) = \ln(x + 1)$ και $g(x) = \sqrt{4 - |x|}$, τότε να ορίσετε (εφόσον είναι εφικτό) τις συναρτήσεις: $f + g$, $f \cdot g$, f / g .

6. Να βρείτε τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

β. $e^{3x-2} - 1$

γ. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(2 - x)$

7. Εξετάστε αν είναι ίσα τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} , στο οποίο ισχύει η ισότητα.

α. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

β. $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$

γ. $f(x) = \ln(x^4)$ και $g(x) = 4\ln x$

8. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1$$

καθώς και τα κοινά, μεταξύ τους, σημεία.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f .

β. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$$

10. Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \text{και} \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$$

11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 5x^2 + \beta x + 1$.

- α. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β , έτσι ώστε τα σημεία $(2, 25)$ και $(1, 0)$ να ανήκουν στη C_f .
- β. Να μετασχηματιστεί ο τύπος της συνάρτησης σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
- γ. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x , για τους οποίους ισχύει $f(x) > 0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2/x$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1, f(1))$ και $B(-1, f(-1))$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το α ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(4, 2)$.

14. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει:

- α. $f(x^2) + f(x) = x$, τότε να βρείτε τα $f(0)$ και $f(1)$.
- β. $2f(x) - 3f(1/x) = x^2$, με $x \neq 0$, τότε να βρείτε το $f(2)$.

15. Έστω η ευθεία $(\varepsilon) : y = (\lambda^2 - 3\lambda)x + 1$.

- α. Αν η (ε) διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ να βρεθεί το λ .
- β. Για ποιες τιμές του λ η (ε) είναι παράλληλη προς τον $x'x$.
- γ. Ποια είναι τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες;

16. Να εξετάσετε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

- α. $f(x) = -2x + 2$
- β. $g(x) = \ln(1 - x)$
- γ. $h(x) = e^{-2x+1}$
- δ. $k(x) = -2/x, x > 0$

ΟΡΙΑ

17. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{3}{x}}$
- β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x-21}{|x-4|+1}$
- γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$
- δ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

18. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)^2}{x^2 - 9}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\epsilon. \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

19. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 - \eta\mu^2 x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1 - \sqrt{x+5}}{x - 4}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{2\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x+1}}$$

20. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^4 - 16}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 - 1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - x^2}$$

21. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{5}}{x^2 - 6x + 5}$$

22. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4\sqrt{x} + 3}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x - 1}{\sqrt{x+2} - x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5} - 5}{\sqrt{x-4} - 4}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x-3}}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2}$$

23. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2-x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$$

24. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+3} - 2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$$

25. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2} - 2}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3} + 2x}{x+1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - x+1}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-3x} + 8}{2x^2 - 7x - 4}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

26. Ομοίως:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2 - \sqrt{7}x}{x^2 - 7}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - \sqrt{2x}}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x^2 - 9}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{2(\sqrt{x+4} - 3)}$$

27. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{16-x^2}{4-x} & , x \neq 4 \\ \alpha^2 - 2\alpha & , x = 4 \end{cases}$ τότε:

- α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 4.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

28. Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 112$

β. $f(x) = x - \ln x$

γ. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

δ. $f(x) = 3 - 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

ε. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

στ. $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \eta\mu x$

ζ. $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{e^x}, \alpha \in \mathbb{R}$

η. $f(x) = \frac{x e^x}{x+1} + \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$

θ. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

ι. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$

ια. $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2 + 1}$

ιβ. $f(x) = 3 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \theta - 4x^2, \theta \in \mathbb{R}$

ιγ. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

ιδ. $f(x) = x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 2x)$

ιε. $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2 + 1}$

ιστ. $f(x) = \frac{x \cdot \eta\mu x}{1 + \epsilon\phi x}$

29. Ομοίως:

α. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

β. $f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$

γ. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + e)}$

δ. $f(x) = \sqrt{\epsilon\phi x}$

ε. $f(x) = x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$

στ. $f(x) = \frac{1}{3} \eta\mu^3 x - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu^2 x$

ζ. $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu 2x)$

η. $f(x) = \ln(\ln x)$

$$\theta. \quad f(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu(2x + 3) \qquad \iota. \quad f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$\iota\alpha. \quad f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \iota\beta. \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$\iota\gamma. \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

30. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 \cdot \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(\eta\mu x)$$

31. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \quad \text{Αν } f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \text{ τότε : } xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0.$$

$$\beta. \quad \text{Αν } f(x) = e^x \cdot \eta\mu x \text{ τότε : } f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0.$$

$$\gamma. \quad \text{Αν } f(x) = 2xe^{-x^2} \text{ τότε : } \frac{f''(x)}{2x} + f'(x) + 4e^{-x^2} = 0.$$

32. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι : $f^2(x) \cdot (g'(x) - g(x)) = g^2(x) \cdot (f'(x) - f(x))$.

33. Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $s(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

α. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο $[2, 4]$.

β. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 3$.

34. Αν $f(x) = e^{\lambda^2 x}$, να υπολογιστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

$$f''(x) - 3f'(x) + f'(0)f(x) - 8f(x) = 0$$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$2f'(x) - f''(x) = 0$$

36. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού τέτοιο, ώστε να είναι $P(0) = 1$, $P(1) = 6$ και $P'(0) = -3$.

37. Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1 + t)^{-1}$.
- α. Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των μικροβίων.
 - β. Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων μετά από 9 ώρες.
 - γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων, ως προς το χρόνο, μετά από 9 ώρες.

38. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε να ισχύει η σχέση: $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

39. Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $s(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:
- α. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο $[2, 4]$.
 - β. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού όταν $t = 3$.

40. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να αποδείξετε ότι: $f''(x) = 4f(x)$.
 - β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 2e^{x^2}$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

41. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ όταν:
- α. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
 - β. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
 - γ. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

42. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:
- α. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x - \chi\sigma\upsilon\eta x}$ στο σημείο της με $x_0 = \pi$.
 - β. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ στο σημείο της με τετμημένη 1.
 - γ. $f(x) = x^3 - 1$ στο σημείο της με τεταγμένη 7.
 - δ. $f(\theta) = \sigma\upsilon\eta\theta \cdot \sigma\phi\theta$ στο σημείο της με $\theta = \pi/2$.

43. Αν $g(x) = -x^2 + \alpha x - \beta \ln(x + 1)$, $x > -1$, τότε να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της g να έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα των x , στα σημεία με τετμημένες $x = 0$, $x = 1,5$.

44. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

45. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης της f , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

46. Δίνεται η $f(x) = x^2 \cdot \ln x$. Να βρείτε:

- α.** τη γωνία, που σχηματίζει η εφαπτόμενη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, με τον άξονα $x'x$.
- β.** το σημείο, όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον $x'x$.
- γ.** την εξίσωση της εφαπτόμενης στο $x_0 = 2$.

47. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha(x + 1)^2$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- α.** το α , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της καμπύλης της f στο $A(1, f(1))$ να είναι 4.
- β.** την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha e^{-x} + \beta \sqrt{x+1}$, όπου $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- α.** τα α, β , ώστε η εφαπτόμενη της καμπύλης της f στο σημείο $(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην $y = 2x - 1$.
- β.** την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

49. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$.

- α.** Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου f' στα σημεία αυτά.
- β.** Στο σημείο του ερωτήματος (α) με τη μικρότερη τετμημένη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

50. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - ax + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα a, β , ώστε η $y = 3x - 1$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f , στο σημείο της με τετμημένη 2.

51. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_f της f με $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ στα σημεία, που τέμνει τους άξονες, είναι παράλληλες.

52. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της f και η εφαπτόμενη της C_f στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

53. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(\eta\mu x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in [0, \pi)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $(0, f(0))$ σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

54. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(1) = 2f'(1) = e$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στη γραφική παράσταση τη $g(x) = f(\ln x)$ στο $x_0 = e$.

55. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x^2 + 4x) = x^3 + \ln x.$$

Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(5, f(5))$.

56. Έστω η $f(x) = \ln(x^2 + 1)^2 + ax + \beta$. Να βρεθούν οι τιμές των a, β , ώστε η $y = 21x + 35$ να είναι εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$.

57. Δίνονται τα σημεία $A(\ln x, 0)$ και $B(0, e^x)$, $x > 0$. Αν η $f(x)$ εκφράζει την απόσταση των σημείων A και B , τότε να βρείτε:

α. τη συνάρτηση $f'(x)$.

β. την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

58. Να μελετήσετε ως προς η μονοτονία και τα ακρότατα καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

β. $f(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$

γ. $f(x) = (2x - x^2) \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$

δ. $f(x) = x^2 \cdot (1 - x)^2$

ε. $f(x) = x\sqrt{6-x}$

στ. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}, x \in [10, 100]$

59. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

α. Να βρεθούν οι $f'(x), f''(x)$.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

60. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την πρώτη παράγωγο της f .

β. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

61. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 - 5x + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f''(x) + f(x) = 2(f'(x) + e^x)$.

β. Να βρείτε το α , ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι παράλληλη στον x 'αξονα.

γ. Για την τιμή του α που βρήκατε, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

62. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3$, όπου $x, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα κ, λ , ώστε η f να έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2 .

β. Για τις τιμές των κ, λ , που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

63. Αν τα $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + \frac{1}{2}$, τότε:

α. Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει $f'(-1) = f'(1) = 0$.

β. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, τότε να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ae^x + be^{-x}$, όπου a, β θετικοί, πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $2\sqrt{a\beta}$.

65. Αν $V(r) = 100p(1 + \ln r) - 100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, τότε να αποδείξετε ότι το V έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r = p/q$.

66. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{ax} - \beta x$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το a , ώστε: $4f'(x) - 4\beta(x-1) = 4f(x) + f''(x)$.

β. Να βρείτε το β , ώστε η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ. Για τις τιμές των a, β , που βρήκατε, να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

67. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x + 1$. Σε ποιο σημείο της γραφικής της παράστασης η εφαπτόμενη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

68. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = x \cdot \ln^2 x$ η εφαπτόμενη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 2e^x$.

α. Να βρείτε τα ακρότατά της.

β. Να αποδείξετε την ανίσωση: $1 + xe^{x^{-1}} \geq 2e^{x^{-1}}$.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της.

β. το όριό της όταν το x τείνει στο $x_0 = 0$.

γ. την παράγωγό της.

δ. τα διαστήματα μονοτονίας της, καθώς και τα ακρότατά της.

71. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(x-a) + \lambda$, με $x \in \mathbb{R}$ και a, λ σταθερές.

α. Να βρείτε το a , ώστε $f'(1) = 1$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

- γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.
- δ. Εάν το ελάχιστο της f είναι το $2\lambda - 1$, τότε να βρείτε το λ .
- ε. Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f , στο σημείο $(1, f(1))$.
- στ. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = -1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 72.** Σώμα κινείται σε οριζόντιο άξονα ακολουθώντας τη συνάρτηση θέσης $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$ (t σε sec, x σε m).
- α. Ποια είναι η αρχική ταχύτητα του σώματος;
 - β. Ποια είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση όταν το σώμα έχει διανύσει 25m;
 - γ. Πότε το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα; Ποια η θέση και η επιτάχυνση αυτής της χρονικής στιγμής;
 - δ. Ποιο διάστημα διένυσε το σώμα τα πρώτα 2 sec;
 - ε. Περιγράψτε την κίνηση του σώματος στο $[0, 5]$.
- 73.** Οι συνολικές πωλήσεις ενός μοντέλου αυτοκινήτου δίνονται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{10000}{1 + e^{-t+10}} + 10$, όπου $t \in [0, 20]$ ο χρόνος σε μήνες, από την έναρξη των πωλήσεων. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή, κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης των συνολικών πωλήσεων γίνεται μέγιστος, καθώς και τη μέγιστη τιμή του.
- 74.** Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ κάθε μονάδας προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 195 - \frac{x^2}{3}$ €. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 20 € και, επιπλέον, η βιομηχανία πληρώνει φόρο 6 €, για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.
- 75.** Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 0,8 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό $2 + \frac{x^2}{400}$ lt/h. Αν τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού ανέρχονται σε 9 € την ώρα, τότε:

- α.** να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής, ως συνάρτηση της ταχύτητας x .
- β.** να βρείτε την ταχύτητα, που πρέπει να έχει το φορτηγό, ώστε τα έξοδά του να είναι ελάχιστα.
- γ.** να βρείτε πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα.

76. Μια εταιρεία διαθέτει 20.000 € για να περιφράξει ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου, έστω ΑΒΓΔ. Η πλευρά ΑΒ πρόκειται να κατασκευαστεί από υλικό, που κοστίζει 5 €/m . Στην πλευρά ΓΔ θα κατασκευαστεί ένας τοίχος, του οποίου το κόστος θα ανέλθει σε 4.000 € . Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου, ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

77. Έχουμε δύο φάρμακα για την υπόταση των ενηλίκων. Η μεταβολή της πίεσης, σε συνάρτηση με το χρόνο δράσης των δύο φαρμάκων, είναι $\Pi_1(t) = te^{-t}$ και $\Pi_2(t) = t^2 e^{-t}$, με $t \in [0, 12]$ σε ώρες. Ποιο από τα δύο φάρμακα δίνει τη μεγαλύτερη μέγιστη πίεση και ποιο φέρνει το αποτέλεσμα αυτό πιο γρήγορα;

78. Δίνεται η ευθεία $y = -2x - 3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής, το οποίο απέχει από το σημείο Α (9, 4) τη μικρότερη, δυνατή απόσταση.

79. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 82 . Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

80. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 64 m^2 , ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

81. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 cm , να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

82. Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής $y = x^2$ στην ευθεία $y = 3x - 5$.

83. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από το σημείο (3, 4) και σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

84. Η θέση ενός υλικού σημείου, που βάλλεται με φορά προς τα πάνω, από το έδαφος, δίνεται από τον τύπο $y(t) = 5t(20 - t)$, όπου t ο χρόνος της κίνησής του σε sec.

- α. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου, μετά από 11 δευτερόλεπτα. Τι συμπεραίνετε για την κίνησή του, τη χρονική στιγμή αυτή;
- β. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του σημείου, καθώς και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει.
- γ. Σε ποια χρονική στιγμή το ύψος του είναι 375 m ;

85. Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m , του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $u = 2$ m/sec και η θέση του στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = u \cdot t$, όπου t ο χρόνος σε sec και $t \in [0, 5]$.

- α. Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου OAB , συναρτήσει του t .
- β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή, κατά την οποία το μήκος του OA είναι 6 m ;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x^2 + \beta x}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία: $A(1, e^3)$ και $B(-1, e)$, τότε:

- α. Να βρεθεί ο τύπος της.
- β. Να βρεθεί το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.
- γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο παραπάνω σημείο, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου, που ορίζει αυτή με τους άξονες.
- δ. Να αποδείξετε ότι : $f''(x) = f'(x) \cdot (4x + 1)^2 + 4f(x)$.
- ε. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης για $x = 2$.

87. Μια αυτοκινητοβιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση, μεταξύ της τιμής T ενός νέου μοντέλου αυτοκινήτου και της ζητούμενης ποσότητας x αυτοκινήτων του μοντέλου αυτού, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$T(x) = -0,2x + 4000 \text{ € για } 0 \leq x \leq 1000$$

- α. Να βρεθεί η συνάρτηση $E(x)$ των εσόδων της αυτοκινητοβιομηχανίας.
- β. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων.

Αν το κόστος των x μονάδων αυτοκινήτου, που παράγονται, δίνεται από τη σχέση:

$$K(x) = 950x + 250.000 \text{ € για } 0 \leq x \leq 10.000$$

- γ. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P .
- δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους.
- ε. Για ποια x έχει η αυτοκινητοβιομηχανία το μέγιστο κέρδος.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln 2x$. Να βρείτε:

- α. Τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.
- β. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y = e$.
- γ. Να βρεθεί η $f'(x)$.
- δ. Να βρεθεί το $f'\left(\frac{e}{2}\right)$.
- ε. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = \frac{2}{e}x + 3$.

89. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

90. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα, ώστε η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t (σε sec) να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ σε μέτρα (m). Να βρείτε:

- α. την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t .
- β. τις χρονικές στιγμές, που το σώμα είναι ακίνητο.
- γ. την απόσταση των θέσεων του σώματος, όταν αυτό είναι ακίνητο.

91. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-3x} + 1$.

- α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) + 3$.
- β. Να υπολογίσετε το $f'(-1)$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στη C_f , στο σημείο της με τετμημένη -1 .

92. Αν η εφαπτόμενη (ε) στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 2 = 0$, τότε:

α. να βρείτε το $f'(1)$.

β. να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται στη C_g , στο σημείο της $B(0, g(0))$, όπου g η συνάρτηση $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$.

93. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ και $g(x) = x^2 - ax + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της C_f στο $A(1, f(1))$.

β. τα a, β , ώστε η (ε) να εφάπτεται στη C_g στο σημείο $B(2, g(2))$.

94. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)}$, $x \in (0, +\infty)$, $f(2) = f'(2) = f(4) = f'(4) = 4$.

α. Αν η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $y = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(1, g(1))$, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία εφάπτεται στη C_g στο σημείο $\Gamma(4, g(4))$.

