

2010 - 2011

4^ο Γενικό Λύκειο Χανίων

Γ τάξη

Μαθηματικά

Γενικής Παιδείας

γ

Ασκήσεις για λύση

Επιμέλεια: Μ. Ι. Παπαρηγοράκης
<http://users.sch.gr/mipapagr>

ΚΕΦ1

- 1** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - 1$.
 Α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) = 0$;
 Β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$ βρίσκεται 'κατώ' από τον άξονα x'
 Γ) Να βρείτε: τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων
 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, $h(x) = \sqrt{x^2-1}$, $\varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$
- 2** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
 Α) $f(x) = \log(9-x^2)$ Β) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.
 Γ) $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{e^x+1}}$ Δ) $f(x) = \frac{2e\varphi x}{\eta\mu x - \eta\mu 2x}$
 Ε) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ΣΤ) $g(x) = \frac{2x^2+5x}{\sqrt{x-4}}$
 Ζ) $f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$ Η) $f(x) = \sqrt{3-|x|}$
- 3** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων
 $f(x) = \ln \frac{x^2-4x+3}{x-2}$ $k(x) = \sqrt{12-x-x^2}$
 $h(x) = \ln \frac{x+2}{5-x} + 3 \ln \frac{x-1}{x-3}$ $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$
 $r(x) = \sqrt{x-\sqrt{x^2-2}}$ $t(x) = \log(2-\log x)$
- 4** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 Α) $f(x) = -\frac{1}{x}$ Β) $\rho(x) = \ln \frac{1}{x}$
 Γ) $\varphi(x) = e^{x+1}-2$ Δ) $g(x) = x^2-1$
 Ε) $\sigma(x) = \ln|x|$ Ζ) $\pi(x) = \eta\mu(x + \frac{\pi}{3})$
- 5** Αν $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \sqrt{4-|x|}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $f \cdot g$, f/g
- 6** Να βρείτε τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
 Α) $f(x) = 2x^3-x^2-5x-2$ Β) $f(x) = e^{3x-2}-1$
 Γ) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(2-x)$
- 7** Εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους:
 Α) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$
 Β) $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$
 Γ) $f(x) = \ln x^4$ και $g(x) = 4 \ln x$
 είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο, του \mathbb{R} , στο οποίο είναι ίσες.

- 8** Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες των συναρτήσεων: $f(x) = x^3-x$ και $g(x) = x^2-1$ καθώς και τα κοινά τους σημεία.
- 9** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$.
 α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να δείξετε ότι: $f(x_1)+f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της f .
- 10** Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ τότε να αποδείξετε ότι
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ και $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$
- 11** Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 5x^2 + \beta x + 1$
 Α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β , έτσι ώστε τα σημεία $(2, 25)$ και $(1, 0)$ να ανήκουν στη C_f .
 Β) Να μετασχηματιστεί ο τύπος της συνάρτησης σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
 Γ) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $f(x) > 0$.
- 12** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x}$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1, f(1))$ και $B(-1, f(-1))$
- 13** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το a ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(4, 2)$
- 14** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει
 Α) $f(x^2)+f(x)=x$, τότε να βρείτε το $f(0)$ και το $f(1)$
 Β) $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, x \neq 0$, τότε να βρείτε το $f(2)$.
- 15** Έστω η ευθεία: $y = (\lambda^2 - 3\lambda)x + 1$
 Α) Αν διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ να βρεθεί το λ
 Β) Για ποιες τιμές του λ η είναι παράλληλη προς το $x x'$
 Γ) Ποια τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες
- 16** Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων
 $f(x) = -2x+2$ $g(x) = \ln(1-x)$
 $h(x) = e^{-2x+1}$ $k(x) = \frac{-2}{x}, x > 0$

ΚΕΦ1 ΟΡΙΑ -ΣΥΝΕΧΕΙΑ

17 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+2} e^x$ B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x-21}{|x-4|+1}$
 Δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ E) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x+3}$ B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)^2}{x^2-9}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{x+1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$
 E) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}$ ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+1}$

19 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1-\eta\mu^2 x}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1-\sqrt{x+5}}{x-4}$
 E) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{2\sqrt{x+6}-3\sqrt{x+1}}$

20 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x+2}{x+2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5-32}{x^4-16}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-x^2}}$

21 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+x+2}-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+3x-3}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x^2-6x+5}$

22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x-4\sqrt{x+3}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{x-4}-4}$
 E) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x-3}}$ ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

23 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$ B) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$

24 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$

25 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}-2}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}$
 E) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-3x+8}}{2x^2-7x-4}$ ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

26 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2-\sqrt{7}x}{x^2-7}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-\sqrt{2x}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$
 Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^2-9}$ E) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-3x-10}{2(\sqrt{x+4}-3)}$

27 Αν $f(x) = \begin{cases} 16-x^2 & x \neq 4 \\ 4-x & x = 4 \end{cases}$ τότε

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 4

ΚΕΦ1 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

28 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 112$

B) $f(x) = x - \ln x$

Δ) $f(x) = 3 - 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

ΣΤ) $f(x) = x^2\eta\mu x + e^x\eta\mu x$

H) $f(x) = \frac{xe^x}{x+1} + \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$

I) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$

IB) $f(x) = 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu\theta - 4x^2, \theta \in \mathbb{R}$ II) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

IA) $f(x) = x(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

IE) $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2+1}$ Ιστ) $f(x) = \frac{x\eta\mu x}{1+\epsilon\phi x}$

29 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ B) $f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$

Γ) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + e)}$ Δ) $f(x) = \sqrt{\epsilon\phi x}$

E) $f(x) = x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ ΣΤ) $f(x) = \frac{1}{3}\eta\mu^3 x - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$

Ζ) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu 2x)$ H) $f(x) = \ln(\ln x)$

Θ) $f(x) = \eta\mu(2x) - \sigma\upsilon\nu(2x + 3)$

I) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ IA) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

IB) $f(x) = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ II) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

30 Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων: $f(x) = x^3 \ln x$ και $g(x) = \ln(\eta\mu x)$

31 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ τότε $xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$.

B) Αν $f(x) = e^x \eta\mu x$ τότε $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Γ) Αν $f(x) = 2xe^{-x^2}$ τότε $\frac{f''(x)}{2x} + f'(x) + 4e^{-x^2} = 0$

32 Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο

\mathbb{R} και ισχύει: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$f^2(x)(g'(x) - g(x)) = g^2(x)(f'(x) - f(x))$$

33 Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη

κίνηση δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $s(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

α) Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο $[2, 4]$

β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 3$

34 Αν $f(x) = e^{\lambda x}$, να υπολογιστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f''(x) - 3f'(x) + f'(0)f(x) - 8f(x) = 0$$

35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$ να αποδείξετε ότι $2f'(x) - f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

36 Να βρείτε πολώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε να είναι $P(0) = 1, P(1) = 6, P'(0) = -3$

37 Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+t)^{-1}$

α) Να βρείτε τον αρχικό χρόνο αριθμό μικροβίων

β) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν $t = 9$ h

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν $t = 9$ ώρες

38 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε: Τις τιμές του α , ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

39 Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $s(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

α) Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο $[2, 4]$

β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού όταν $t = 3$

40 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = 4f(x)$

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 2e^{x^2}$

ΚΕΦ1 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

41 Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στο άξονα $x'x$ όταν:

A) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ B) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ Γ) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

42 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

A) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x - \chi\sigma\upsilon\nu x}$ στο σημείο της με $x_0 = \pi$

B) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, στο σημείο της με τετμημένη 1

Γ) $\varphi(x) = x^3 - 1$ στο σημείο της με τεταγμένη 7

Δ) $f(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\phi\theta$ στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{2}$

43 Αν $g(x) = -x^2 + \alpha x - \beta \ln(x+1)$, $x > -1$, τότε να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της g να έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα των x στα σημεία με τετμημένες $x = 0, x = 1,5$.

44 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

45 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f , που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135° .

46 Δίνεται η $f(x) = x^2 \ln x$. Να βρείτε:

A) Τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, με τον άξονα $x'x$.

B) Το σημείο όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στο $x'x$

Γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 2$

47 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha(x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) το α ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $A(1, f(1))$ να είναι 4.

β) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

48 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha e^{-x} + \beta \sqrt{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) τα α, β ώστε η εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην $y = 2x - 1$

β) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

49 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$

A) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου f' στα σημεία αυτά.

B) Στο σημείο (του α ερωτ.) με τη μικρότερη τετμημένη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

50 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη 2.

51 Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης C_f της f με $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ στα σημεία που τέμνει τους άξονες είναι παράλληλες

52 Έστω η συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση C της f και η εφαπτομένη της C στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

53 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

54 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(1) = 2f'(1) = e$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γ.π. της $g(x) = f(\ln(x))$ στο $x_0 = e$

55 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x^2 + 4x) = x^3 + \ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(5, f(5))$.

56 Έστω η $f(x) = \ln(x^2 + 1)^2 + \alpha x + \beta$. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η $y = 21x + 35$ να είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

57 Δίνονται τα σημεία $A(\ln x, 0)$ και $B(0, e^x)$, $x > 0$. Αν η $f(x)$ εκφράζει την απόσταση των σημείων A και B , να βρείτε: I) Τη συνάρτηση $f'(x)$
II) Την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

58 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κάθε μια από τις συναρτήσεις:

A) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

B) $g(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$

Γ) $f(x) = (2x - x^2)e^x, x \in \mathbb{R}$

Δ) $f(x) = x^2(1-x)^2$

E) $f(x) = x\sqrt{6-x}$

Στ) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}, x \in [10, 100]$

59 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2e^{-x}$.

α) Να βρεθούν οι $f'(x)$, $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

60 Δίνεται f η συνάρτηση με $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και την $f'(x)$

B) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

61 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 - 5x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = 2f'(x) + e^x$

B) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ) Για την τιμή του α που βρήκατε, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

62 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2 .

β) Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

63 Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ τότε

i) Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για του οποίους ισχύει $f'(-1) = f'(1) = 0$.

ii) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, τότε να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, όπου α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $2\sqrt{\alpha\beta}$.

65 Αν $V(r) = 100p(1 + \ln r) - 100qr$, όπου p και

q θετικές σταθερές, να αποδείξετε ότι το V έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r = \frac{p}{q}$.

66 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} - \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε το α ώστε $4f'(x) - 4\beta(x-1) = 4f(x) + f''(x)$

B) Να βρεθεί το β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

67 Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x + 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

68 Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 2e^x$

A) Να βρείτε τα ακρότατά της

B) Να αποδείξετε την ανίσωση $1 + xe^{x-1} \geq 2e^{x-1}$

70 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$,

όπου $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

A) το πεδίο ορισμού της

B) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Γ) την παράγωγο της συνάρτησης f ,

Δ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της συνάρτησης f .

71 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(x - \alpha) + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$ κ, α, λ σταθερές.

A) Βρείτε το α ώστε $f'(1) = 1$

B) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

Δ) Εάν το ελάχιστο της f είναι το $2\lambda - 1$, βρείτε το λ .

E) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$.

Στ) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = -1$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 72** Σώμα κινείται σε οριζόντιο άξονα ακολουθώντας τη συνάρτηση θέσης $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$ (t σε sec, x σε m)
- α. Ποια η αρχική ταχύτητα του σώματος;
 β. Ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση 25m;
 γ. Πότε το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα. Ποια η θέση και η επιτάχυνση αυτής της χρονικής στιγμής;
 δ. Ποιο διάστημα διένυσε το σώμα τα πρώτα 2sec της κίνησης του;
 ε. Περιγράψτε την κίνηση του σώματος στο $[0,5]$

- 73** Οι συνολικές πωλήσεις ενός μοντέλου αυτοκινήτου δίνονται από τη συνάρτηση
- $$f(t) = \frac{10000}{1 + e^{-t+10}} + 10, \text{ όπου } t \in [0, 20] \text{ είναι ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη των πωλήσεων. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης των συνολικών πωλήσεων γίνεται μέγιστος καθώς και τη μέγιστη τιμή του.}$$

- 74** Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ κάθε μονάδας προϊόντος συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο:
- $$\Pi(x) = 195 - \frac{x^2}{3} \text{ € . Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 20€ και επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 6 € για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παράγει η βιομηχανία ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.}$$

- 75** Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 0,8 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό $2 + \frac{x^2}{400}$ lt/h. Αν τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού ανέρχονται σε 9 € την ώρα, τότε:
- α) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής ως συνάρτηση της ταχύτητας x ,
 β) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό, ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,
 γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

- 76** Μια εταιρεία διαθέτει 20000 € για να περιφράξει ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου. Η πλευρά AB πρόκειται να κατασκευαστεί από υλικό που κοστίζει 6 €/m και οι πλευρές AD και BG από υλικό που κοστίζει 5 €/m. Στην πλευρά ΓΔ θα κατασκευαστεί ένας τοίχος του οποίου το κόστος θα ανέλθει σε 4000 €. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

- 77** Έχουμε δύο φάρμακα για την υπόταση των ενηλίκων. Η μεταβολή της πίεσης σε συνάρτηση με το χρόνο των δύο φαρμάκων είναι: $p_1(t) = te^{-t}$ και $p_2(t) = t^2e^{-t}$ $t \in [0, 12]$ (t σε ώρες). Ποιο από τα δύο φάρμακα δίνει τη μεγαλύτερη μέγιστη πίεση και ποιο φάρμακο φέρνει το αποτέλεσμα αυτό πιο γρήγορα;

- 78** Δίνεται η ευθεία $y = -2x - 3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής το οποίο απέχει από το σημείο $A(9, 4)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

- 79** Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 82. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο τους.

- 80** Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό $64m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

- 81** Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

- 82** Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής $y = x^2$ στην ευθεία $y = 3x - 5$.

- 83** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(3, 4)$ και σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

- 84** Η θέση ενός υλικού σημείου που βάλλεται, με φορά προς τα πάνω, από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $y(t) = 5t(20 - t)$ όπου t ο χρόνος της κίνησης σε sec.

- A) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου όταν $t = 11$ sec. Τι συμπεραίνετε για την κίνησή του τη στιγμή αυτή;
 B) Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του σημείου και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει.
 Γ) Σε ποια χρ. στιγμή το ύψος του είναι 375 m;

- 85** Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα.

Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $u = 2 \frac{m}{sec}$ και η θέση του στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $S(t) = ut, t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος σε sec.

- A) Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του t
 B) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του OA είναι 6 m;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 86** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax^2+bx}$ με $a, b \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία: $A(1, e^3)$ και $B(-1, e)$, τότε:
- A) Να βρεθεί ο τύπος της
B) Να βρεθεί το σημείο τομής της C_f με τον άξονα yy'
Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο παραπάνω σημείο καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει αυτή με τους άξονες.
Δ) Αποδείξτε ότι $f''(x) = f'(x) \cdot (4x+1)^2 + 4 \cdot f(x)$
E) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης για $x=2$
- 87** Μια αυτοκινητοβιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής T ενός νέου μοντέλου αυτοκινήτου και της ζητούμενης ποσότητας x αυτοκινήτων του μοντέλου αυτού δίνεται από τη συνάρτηση: $T(x) = -0,2x + 4000$ € για $0 \leq x \leq 1000$
- A) Να βρεθεί η συνάρτηση $E(x)$ των εσόδων της αυτοκινητοβιομηχανίας
B) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων
Αν το κόστος των x μονάδων αυτοκινήτου που παράγονται, δίνεται από τη σχέση:
 $K(x) = 950x + 250000$ € για $0 \leq x \leq 10000$
- Γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P
Δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους
E) Για ποια x έχει η αυτοκινητοβιομηχανία το μέγιστο κέρδος.
- 88** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2x)$. Να βρείτε:
- A) Τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες
B) Να βρεθεί το διαστήμα στο οποίο η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y=e$
Γ) Να βρεθεί η $f'(x)$
Δ) Να βρεθεί το $f'\left(\frac{e}{2}\right)$
E) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = \frac{2}{e}x + 3$
- 89** Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2 \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
- A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
B) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

- 90** Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα ώστε η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t (σε sec) να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ σε μέτρα (m). Να βρείτε:
- A) την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t
B) τις χρονικές στιγμές που το σώμα είναι ακίνητο
Γ) την απόσταση των θέσεων του σώματος όταν αυτό είναι ακίνητο.

- 91** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-3x} + 1$
- A) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) + 3$
B) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$
Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f , στο σημείο της με τετμημένη -1

- 92** Αν η εφαπτομένη (ϵ) στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 2 = 0$ τότε:
- A) Να βρείτε τον $f'(1)$
B) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) εφάπτεται στη C_g με $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$ στο σημείο της $B(0, g(0))$

- 93** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ και $g(x) = x^2 - ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- A) την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$
B) τα a, b ώστε η (ϵ) να εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $B(2, g(2))$.

- 94** Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)}$, $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \in (0, +\infty)$, $f(2) = f'(2) = f(4) = f'(4) = 4$.
- A) Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ): $y = 1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
B) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία εφάπτεται στη C_g της g στο σημείο $\Gamma(4, g(4))$.