

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΓΕΝΙΚΗΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr], τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

1. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες:

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$
1	12		
2			
3	24		40
5		0,05	
Άθροισμα			

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$
-5		0,05	
-3			
0			40
1	8	0,2	
Άθροισμα			

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i \%$	$F_i \%$
2	20					
3	10					
4	15					
6	5					
Άθροισμα						

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	F_i
-1			4	0,1
0		30		
2				
3	6			
Άθροισμα	40			

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i \%$
2				20
5		0,4		
7	12			
8			60	
Άθροισμα				

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
0						10
10		0,15				
20					0,60	
30	5					
40				20		
Άθροισμα						

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1						10
2	4	0,20	6			
3				0,60		
4					25	
5	2					
6						
Άθροισμα						

2. Σε μια τάξη Λυκείου:

- Οι 20 μαθητές έχουν κανένα ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 αδέρφια.
- Οι 18 έχουν τουλάχιστον 1 αδερφό.
- Οι 19 έχουν το πολύ 3 αδέρφια.
- Πέντε οικογένειες των μαθητών έχουν 4 τουλάχιστον παιδιά.

Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

$$v_i, f_i, f_i \%, N_i, F_i, F_i \%$$

3. Σε μια πόλη η μικρότερη θερμοκρασία επί 20 συνεχείς ημέρες ήταν 10, 11, 15, 13 και 16 .

- ☑ 18 ημέρες είχαν θερμοκρασία το πολύ 15.
- ☑ Το 85 % του πληθούς των ημερών η θερμοκρασία ήταν τουλάχιστον 11.
- ☑ Το πλήθος των ημερών που είχαν θερμοκρασία 13 ήταν διπλάσιο του πληθούς των ημερών που είχαν 11.
- ☑ Το 55 % του πληθούς των ημερών η θερμοκρασία ήταν 13 ή 15.

Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

$$v_i, f_i, N_i, F_i, f_i \%, F_i \%$$

4. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X , ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n και $f_i = \frac{1}{2(i-1)}$, $i = 2, 3, 4$. Να βρεθεί η f_1 .

5. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Αν $f_1 = 2f_2 = 3f_3 = 4f_4$ να βρείτε τις f_1, f_2, f_3, f_4 .

6. Έστω x_1, x_2, x_3 οι τιμές μια μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n .
- α. Αν $v_i = i^2 + 2i$, $i = 1, 2, 3$ να βρεθεί το n .
 - β. Αν $f_i = \frac{1}{i^2 - 1}$, $i = 2, 3$ να βρεθεί η f_1 .

7. Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ οι τιμές μια μεταβλητής X , ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n . Αν ισχύει $f_i = \frac{i}{2k}$, $i = 1, 2, \dots, 5$ τότε:
- α. να βρεθεί ο k .
 - β. για $k = 15/2$ να βρεθεί η $F_3 \%$.
 - γ. Αν $N_3 = 30$ να βρεθεί το μέγεθος n του δείγματος.

8. Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ οι τιμές μια μεταβλητής X , ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n . Αν ισχύει $F_i \% = \frac{i}{k}$, $i = 1, 2, \dots, 5$ τότε:
- α. να βρεθεί ο k .
 - β. για $k = 1/20$ να βρεθεί η f_2 .

9. Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να κάνετε το διάγραμμα συχνότητων και το πολύγωνο σχετικών συχνότητων.

Βαθμός	Πλήθος φοιτητών
4	2
5	3
6	7
7	5
8	3

10. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα βιβλία, που έχει μια βιβλιοθήκη. Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνότητων και κυκλικό διάγραμμα συχνότητων.

Είδος βιβλίων	Πλήθος βιβλίων
Ιστορικά	2
Λογοτεχνικά	30
Μαθηματικά	36
Ταξιδιωτικά	24
Εγκυκλοπαιδικά	18

11. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας, αξίας 97.000.000 €, κατά το έτος 1980 και ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς "θαλασσίως" είναι 180° . Το 14 % της αξίας των εξαγωγών έγινε "σιδηροδρομικώς". Οι μεταφορές που έγιναν "οδικώς" ήταν τετραπλάσιες σε αξία, από αυτές που έγιναν "αεροπορικώς". Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνότητων.

12. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης, σε τέσσερις κατηγορίες.

- Κατηγορία Α : Απόφοιτοι Γυμνασίου
- Κατηγορία Β : Απόφοιτοι Λυκείου
- Κατηγορία Γ : Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης

Κατηγορία Δ : Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

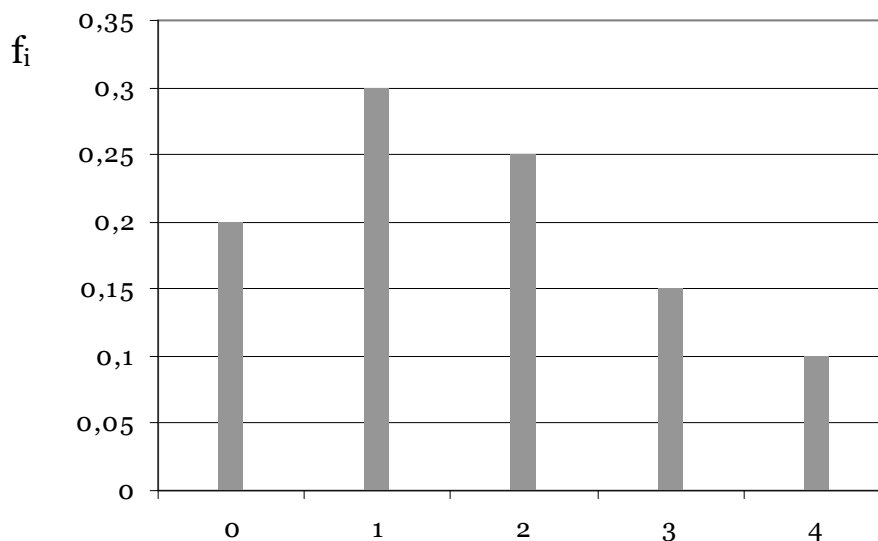
Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές. Στην Α κατηγορία ανήκει το 25 % των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα, που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της Β κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι εκείνων της Γ κατηγορίας.

- α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.
β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

13. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα, παριστάνεται το χρώμα μαλλιών 900 ατόμων. Το 30 % των ατόμων έχουν μαύρα μαλλιά. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στα καστανά μαλλιά είναι $\alpha_3 = 144^\circ$. Τα άτομα με ξανθά μαλλιά είναι διπλάσια από αυτά με κόκκινα μαλλιά. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Χρώμα μαλλιών	n_i	f_i %	α_i
Κόκκινα			
Μαύρα			
Καστανά			
Ξανθά			
Σύνολο			

14.



X_i

Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων ενός δείγματος 80 μαθητών μιας περιοχής, στα διάφορα μουσεία της χώρας, δίνεται από το προηγούμενο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Για το ανωτέρω δείγμα, βρείτε:

- α. πόσοι μαθητές κάνουν, το πολύ, 2 επισκέψεις ετησίως.
- β. πόσοι μαθητές κάνουν, ακριβώς, μία επίσκεψη ετησίως.
- γ. το ποσοστό (%) των μαθητών που κάνει, ακριβώς, 2 επισκέψεις ετησίως.
- δ. το πόσοσο (%) των μαθητών που κάνει, τουλάχιστον, 2 επισκέψεις ετησίως.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

15. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες στους οποίους έχουμε ομαδοποιήσει τρία δείγματα σε κλάσεις ίσου πλάτους.

Κλάσεις	x_i
[... , ...)	6
[... , ...)	...
[... , ...)	...
[... , ...)	18

Κλάσεις	x_i
[5 , ...)	
[... , ...)	
[... , 23)	
[... , ...)	

Κλάσεις	x_i
[... , ...)	...
[... , ...)	11
[... , ...)	...
[17 , ...)	...

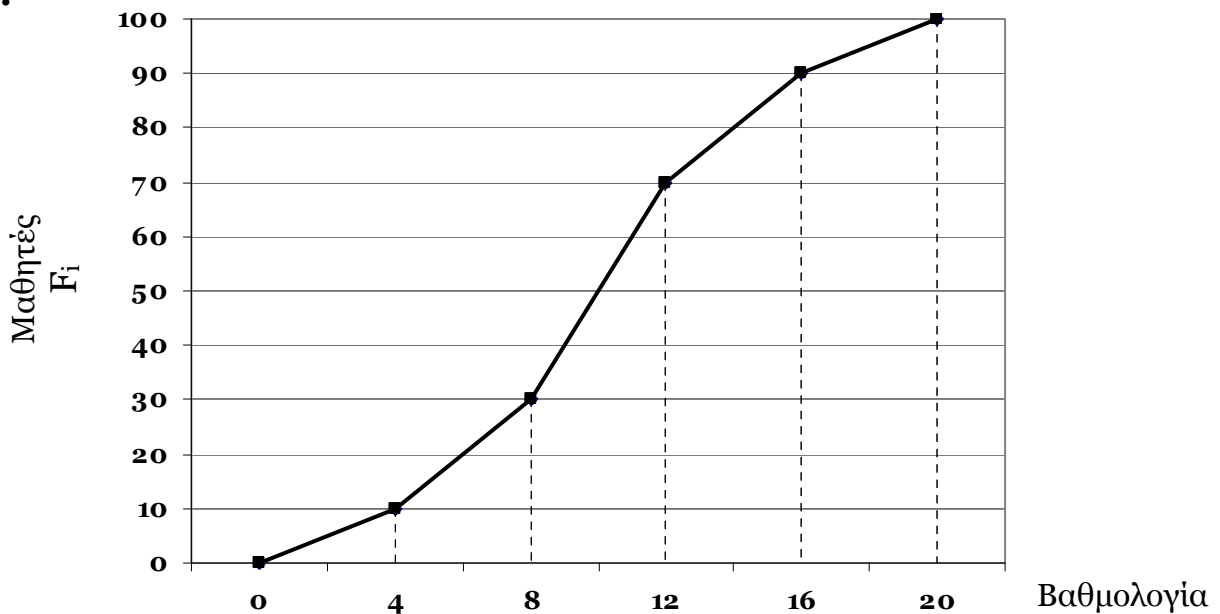
16. Η βαθμολογία 40 μαθητών σε ένα διαγώνισμα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Βαθμολογία	Μαθητές
[0, 4)	4
[4, 8)	8
[8, 12)	16
[12, 16)	10
[16, 20)	2

- A. Να κατασκευάσετε:
 - α. τον πίνακα των συχνοτήτων: f_i %, F_i % .
 - β. το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- B. Να βρείτε το βαθμό κάτω από τον οποίο έχει:

- α. το 30 % των μαθητών.
 - β. το 20 % των μαθητών.
 - γ. το 40 % των μαθητών.
- Γ. Το ποσοστό των μαθητών, που έχει γράψει:
- α. κάτω από 16.
 - β. κάτω από 11.
 - γ. τουλάχιστον 14.

17.

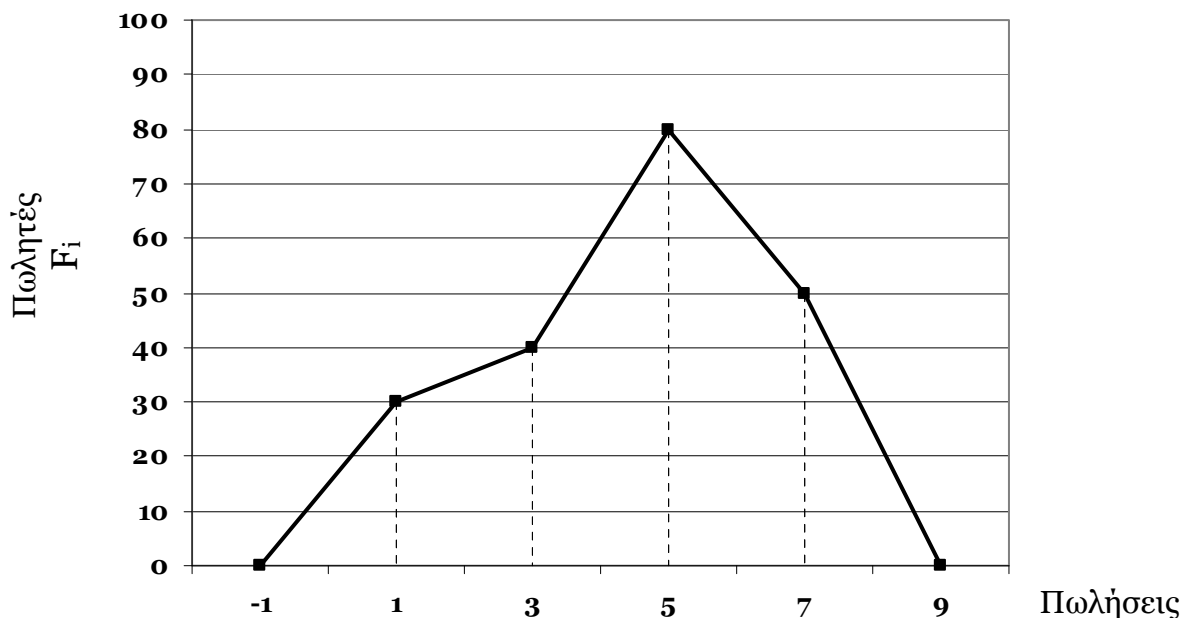


Στο σχήμα που δίνεται, έχουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας των μαθητών της Α' Λυκείου, σε ένα διαγώνισμα ιστορίας. Να βρείτε:

- A. Το βαθμό κάτω από τον οποίο πήρε:
- α. το 70 % των μαθητών.
 - β. το 50 % των μαθητών.
 - γ. το 30 % των μαθητών.
- B. Το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό:
- α. μέχρι 18.
 - β. μέχρι 13.

18. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων των ομαδοποιημένων πωλήσεων (σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ) που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας στη διάρκεια ενός έτους.

- A. Πόσοι είναι οι πωλητές;
- B. Να κατασκευάσετε:
- α. το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
 - β. το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων F_i %.
- Γ. Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις κάτω από:
- α. 60.000 ευρώ;
 - β. 50.000 ευρώ;
 - γ. 45.000 ευρώ;



19. Το πολύγωνο συχνοτήτων μιας ομαδοποιημένης κατανομής με 5 ισοπλατείς κλάσεις αποτελείται από τις ευθείες $y = x - 1$ και $y = -x + 13$.

- α. Να βρεθεί το πλήθος του δείγματος.
- β. Να βρεθεί το πλάτος και τα άκρα κάθε κλάσης.
- γ. Να βρεθεί η συχνότητα κάθε κλάσης.

- 20.** Η βαθμολογία μια ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών.

Βαθμολογία	Φοιτητές %
4	10
5	30
6	35
7	15
8	10

- 21.** Οι χρόνοι που χρειάστηκαν κάποιοι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε το μέσο χρόνο λύσης του προβλήματος.

Χρόνος	Μαθητές
$[0 , 4)$	12
$[4 , 8)$	15
$[8 , 12)$	13

- 22.** Οι χρόνοι που κάνουν οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε από το σπίτι στο σχολείο είναι από 4 έως 20 λεπτά. Το 20 % κάνει χρόνους κάτω από 8 λεπτά, το 50 % κάνει χρόνους κάτω από 12 λεπτά, ενώ το 15 % κάνει, τουλάχιστον, 16 λεπτά. Να βρείτε το μέσο χρόνο των μαθητών.

- 23.** Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η βαθμολογία 20 φοιτητών σε ένα μάθημα. Να βρείτε τα α , β αν η μέση βαθμολογία είναι 5,9 .

Βαθμολογία	Φοιτητές %
4	2
5	α
6	8
8	β

24. Μια βιοτεχνία έχει 10 εργαζόμενους με μέσο μηνιαίο μισθό 1200 € .

A. Να βρείτε το μέσο μισθό όταν:

α. ένας εργαζόμενος με 1200 € μισθό πάρει σύνταξη.

β. προσληφθούν δύο εργαζόμενοι ακόμη, με μισθό 850 € ο καθένας.

γ. πάρει σύνταξη ένας με μισθό 1190 € και προσληφθούν τρεις με μισθό 850 € ο καθένας.

B. Αν προσληφθεί ένας εργαζόμενος, ποιος πρέπει να είναι ο μηνιαίος μισθός του, ώστε ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων να είναι 1210 € ;

25. Σε 20 παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X βρήκαμε μέση τιμή $\bar{X} = 60$. Διαπιστώθηκε όμως στο τέλος ότι οι 10 παρατηρήσεις είχαν εσφαλμένα υπερεκτιμηθεί κατά 5 μονάδες καθεμία, ενώ οι 9 από τις υπόλοιπες είχαν υποεκτιμηθεί κατά 10 μονάδες καθεμία. Να βρείτε τη σωστή μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

26. Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6 καθεμία, τότε να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

27. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και άγνωστο αριθμό κοριτσιών. Σε ένα διαγώνισμα, η μέση τιμή των βαθμών των αγοριών ήταν 14, ενώ των κοριτσιών ήταν 14,875 . Αν η μέση τιμή των βαθμών όλων των παιδιών ήταν 14,5 , τότε να βρεθεί το πλήθος των κοριτσιών.

28. Σε μια επιχείρηση είναι 50 εργαζόμενοι στα τμήματα A και B. Οι εργαζόμενοι στο τμήμα A πήραν αύξηση στο μηνιαίο μισθό 100 € ο καθένας, ενώ στο τμήμα B πήραν αύξηση 50 € καθένας. Αν η μέση τιμή όλων των μηνιαίων μισθών αυξήθηκε κατά 70 € , τότε να βρείτε πόσοι είναι οι εργαζόμενοι του κάθε τμήματος.

29. Σε μια εταιρεία οι 200 υπάλληλοι έχουν μέσο μισθό 2500 € .

α. Το 20 % των υπαλλήλων έχει μέσο μισθό 1800 € . Αν ο μισθός αυτών των υπαλλήλων αυξηθεί, ώστε να γίνει ίσος με τη μέση τιμή, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή του μισθού;

β. Για λόγους μείωσης του κόστους, απολύεται το 15 % των υπαλλήλων της εταιρείας. Οι υπάλληλοι αυτοί έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 2800 €. Να βρεθεί η νέα μέση τιμή του μισθού.

- γ.** Αν σε όλους τους υπαλλήλους δοθεί αύξηση 3,5 % , ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των μισθών;
- 30.** Η μέση τιμή 100 αριθμών είναι 24 και η μέση τιμή των 60 πρώτων από αυτούς είναι 16. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων.
- 31.** Αν 22 παρατηρήσεις x_i έχουν $\bar{X} = 62$ και οι μισές υπερεκτιμήθηκαν κατά 6 , ενώ οι άλλες μισές υποεκτιμήθηκαν κατά 11 , τότε να βρεθεί η πραγματική μέση τιμή τους.
- 32.** Σε ένα Λύκειο, τα τρία τμήματα της Α' τάξης έχουν: το πρώτο 25 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,5 , το δεύτερο 27 μαθητές και μέση βαθμολογία 18,2 , ενώ το τρίτο 23 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,1 . Να βρεθεί η μέση βαθμολογία του συνόλου των μαθητών της Α' τάξης.
- 33.** Ο μέσος όρος βαθμολογίας 1ου τετραμήνου 20 μαθητών ενός τμήματος στατιστικής είναι 14,4 . Επειδή, συγκριτικά με τους μέσους όρους άλλων μαθημάτων, η βαθμολογία θεωρήθηκε χαμηλή, ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει μια μονάδα σε όλους τους μαθητές, εκτός από δύο μαθητές που είχαν εικοσάρια. Ποια είναι τώρα η νέα μέση τιμή της βαθμολογίας;
- 34.** Οι αριθμοί α , β , 17, γ , οι οποίοι έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, αφορούν στη βαθμολογία ενός μαθητή σε τέσσερα διαγωνίσματα. Δίνεται ότι το εύρος των βαθμών είναι 2 , η διάμεσος και η μέση τιμή 16 .
- α.** Να βρείτε του βαθμούς του μαθητή.
- β.** Αν οι συντελεστές βαρύτητας των βαθμών είναι 0,5 , 0,7 , 1 και 0,8 , αντίστοιχα, τότε να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.
- 35. α.** Ένα εργοστάσιο απασχολεί 5 υπαλλήλους στο τμήμα Α με μέσο μηνιαίο μισθό 2490 € , 6 υπαλλήλους στο τμήμα Β με μέσο μηνιαίο μισθό 2800 € και 4 υπαλλήλους στο τμήμα Γ με μέσο μηνιαίο μισθό 3600 € . Να βρεθεί ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων.
- β.** Αν προσληφθούν 2 ακόμη υπάλληλοι στο τμήμα Α, 4 στο τμήμα Γ και οι μέσες τιμές των μισθών στα δύο αυτά τμήματα δε μεταβληθούν, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

36. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_v μια μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v είναι \bar{X} . Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων:

- α.** $t_1 + \lambda, t_2 + \lambda, \dots, t_v + \lambda$ **β.** $t_1 - \lambda, t_2 - \lambda, \dots, t_v - \lambda$
γ. $\lambda t_1, \lambda t_2, \dots, \lambda t_v$ **δ.** $\frac{t_1}{\lambda}, \frac{t_2}{\lambda}, \dots, \frac{t_v}{\lambda}$ ($\lambda \neq 0$)
ε. $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \dots, \lambda t_v + \kappa$

37. Μια ομάδα 15 ατόμων έχουν μέσο βάρος 50,4 kg.

- α.** Αν φύγει ένα άτομο και ο μέσος όρος βάρους παραμείνει ο ίδιος, τότε πόσα kg ήταν το βάρος του ατόμου που έφυγε;
β. Αν έρθει ένα άτομο ακόμη και ανεβάσει το μέσο όρο βάρους στα 51 kg, τότε πόσο ζυγίζει το νέο άτομο;

38. Σε ένα Λύκειο, φοιτούν 300 μαθητές και η μέση τιμή βαθμολογίας τους στα Μαθηματικά, στο Α' τετράμηνο ήταν 15. Στο Β' τετράμηνο, ένας ορισμένος αριθμός μαθητών αύξησε τη βαθμολογία του κατά 4 μονάδες ο καθένας, ενώ οι υπόλοιποι μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες, κάθε μαθητής. Να βρείτε πόσοι μαθητές βελτίωσαν τη βαθμολογία τους και πόσοι τη χειροτέρευσαν, αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία όλων στο Β' τετράμηνο έγινε 17.

39. Αν είναι $\sum_{i=1}^5 x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 23$, τότε να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

- α.** $\sum_{i=1}^5 (x_i + 10)$ **β.** $\sum_{i=1}^5 (2x_i + 3)^2$

40. Να υπολογίσετε το πλήθος v των παρατηρήσεων $x_1 = \ln 2$, $x_2 = \ln \frac{3}{2}$, $x_3 = \ln \frac{4}{3}$, ..., $x_v = \ln \frac{v+1}{v}$, αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{X} = \frac{\ln 2004}{v}$.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

41. Να βρείτε τη διάμεσο στα δείγματα:

- α.** $-2, 0, 2, 4, 3, 10, 12$ **β.** $3, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 18$

42. Να βρείτε τη διάμεσο των χρόνων (σε min) που χρειάστηκαν, για να λύσουν ένα πρόβλημα, οι φοιτητές τεσσάρων τμημάτων μιας σχολής, όπως αυτοί φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

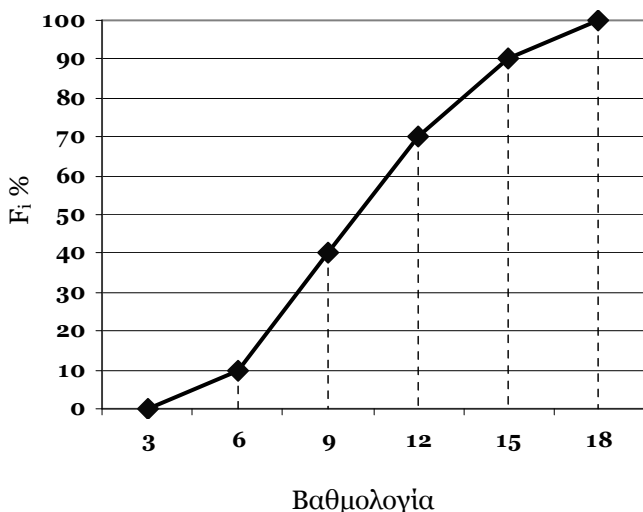
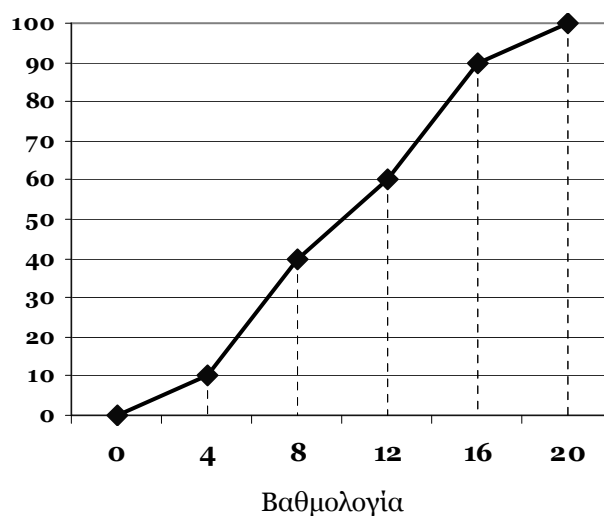
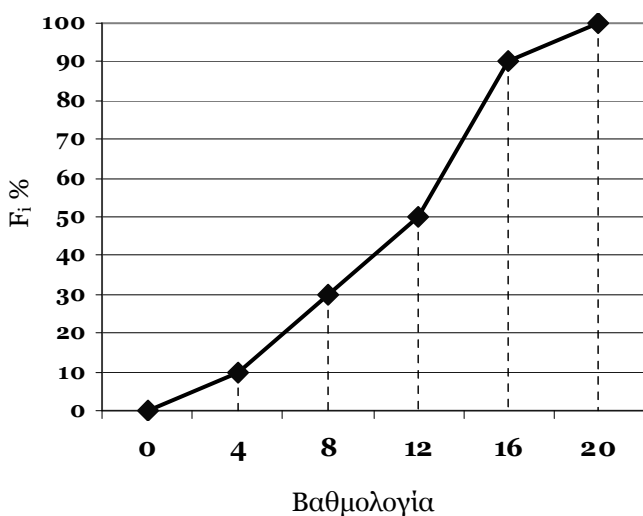
Πίνακας 1	
Χρόνος	Φοιτητές
8	5
9	7
10	8
11	7

Πίνακας 2	
Χρόνος	Φοιτητές
8	7
9	6
10	10
11	3

Πίνακας 3	
Χρόνος	Φοιτητές
8	30
9	25
10	35
11	10

Πίνακας 4	
Χρόνος	Φοιτητές
8	30
9	20
10	40
11	10

43. Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμολογιών, σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα, όπου δίνονται τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



44. Αν η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου δ , με $0 < \delta < 5$ και οι τέσσερις από αυτούς είναι οι: 0, 1, 5, 21, τότε να βρείτε τον πέμπτο αριθμό.

45. Στον παρακάτω πίνακα, φαίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνότητές τους. Να βρείτε τους α , β , γ , αν η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή 5,5.

x_i	$F_i \%$
2	10
3	30
5	α
7	β
9	γ

46. Η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Αν ο ένας από τους αριθμούς αλλάξει, τότε η διάμεσος γίνεται 7. Ποιος είναι ο αριθμός που άλλαξε;

47. Ο διάμεσος βαθμός σε τρία τεστ είναι 90, ο μέσος βαθμός 92 και το εύρος 6. Να βρεθούν οι τρεις βαθμοί.

48. Σε ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, αναλόγως αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας.

Βαθμοί	v_i
[60 , 80)	5
[80 , 100)	20
[100 , 120)	26
[120 , 140)	30
[140 , 160)	15
[160 , 180)	4

α. Να κάνετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

- β. Να εκτιμήσετε γραφικά τη διάμεσο.
- γ. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών, που έγραψαν από 80 έως 110 .

49. Αν οι παρατηρήσεις του δείγματος: 4, 8, 3, α, \bar{X} , $24 - 2\bar{X}$, 5 έχουν $\delta = 8$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή \bar{X} , καθώς και το α.

50. Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Υποθέτουμε ότι κανένας μαθητής δεν έχει ανάστημα μικρότερο των 160 cm. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του δείγματος δεν υπερβαίνει τα 180 cm.

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

51. Οι ελάχιστες θερμοκρασίες σε μια πόλη για πέντε συνεχείς ημέρες ήταν: $-5, -3, 0, -3, 1$. Να βρείτε το εύρος, τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

52. Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε το εύρος, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση.

Βαθμολογία	Φοιτητές
5	4
6	5
7	10
8	1

53. Οι χρόνοι αναμονής 20 μαθητών, σε μια στάση λεωφορείων, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

Χρόνος	Μαθητές
$[1, 3)$	6
$[3, 5)$	8
$[5, 7)$	4
$[7, 9)$	2

54. Ένα δείγμα μεγέθους $n = 35$ έχει μέση τιμή \bar{X} και τυπική απόκλιση s . Παίρνουμε τη μέση τιμή ως μία νέα τιμή της μεταβλητής και δημιουργούμε ένα δείγμα μεγέθους $n = 36$. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του νέου δείγματος.

55. Έστω t_1, t_2, \dots, t_{100} οι τιμές μια μεταβλητής. Οι πρώτες 20 παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\bar{x}_1 = 10$, με τυπική απόκλιση $s_1 = 2$, ενώ οι υπόλοιπες έχουν μέση τιμή $\bar{x}_2 = 20$ και τυπική απόκλιση $s_2 = 5$. Να βρείτε:

- α.** τη μέση τιμή του συνόλου.
- β.** την τυπική απόκλιση s του συνόλου.

56. Ρωτήθηκαν 40 μαθητές ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία έχουν διαβάσει. Οι απαντήσεις κυμαίνονταν από 0 έως και 20. Οκτώ μαθητές απάντησαν κάτω από 4, είκοσι μαθητές κάτω από 8, τέσσερις μαθητές πάνω από 16 και δέκα μαθητές πάνω από 12.

- α.** Να παραστήσετε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.
- β.** Να υπολογίσετε μέση τιμή, διάμεσο και τυπική απόκλιση.
- γ.** Αν για τους 2 που διαβάζουν ποιο πολύ, τους δοθεί μια λογοτεχνική σειρά δωρεάν, τότε πόσα τουλάχιστον βιβλία πρέπει να έχει διαβάσει κάποιος, ώστε να κερδίσει;

57. Η μέση τιμή και η διακύμανση των 20 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{X} = 6$ και $s^2 = 4$, αντίστοιχα. Αν για τις δεκαεννέα τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^{19} (x_i - \bar{x})^2 = 79$, τότε να βρεθεί η εικοστή τιμή.

58. Αν για ένα σύνολο παρατηρήσεων ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 88$, $s = \sqrt{7}$, $\bar{X} = 2$, τότε να βρεθεί το n .

59. Η μέση τιμή και η διασπορά των 7 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 15$ και $s^2 = 16$. Αν ισχύει:

$$(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + \dots + (t_6 - \bar{x})^2 = 12$$

να βρεθεί η τιμή t_7 .

60. Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν. Αν t_1, t_2, \dots, t_v είναι οι τιμές της x_i και \bar{x} η μέση της τιμή, τότε να δείξετε ότι:

$$t_1 = t_2 = \dots = t_v = \bar{x}$$

61. Θεωρούμε α_1 το πλήθος αριθμών, που έχουν διακύμανση s_1^2 και μέση τιμή \bar{x} . Όμοια, θεωρούμε α_2 το πλήθος αριθμών που έχουν διακύμανση s_2^2 και την ίδια μέση τιμή \bar{x} . Να αποδείξετε ότι:

α. η μέση τιμή των $\alpha_1 + \alpha_2$ αριθμών είναι \bar{x} .

β. η διακύμανση s^2 των $\alpha_1 + \alpha_2$ είναι $s^2 = \frac{\alpha_1 s_1^2 + \alpha_2 s_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

62. Σε ένα δείγμα ισχύει ότι $\bar{x} + 4s = 0$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας.

63. Ένα σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δέκα κομμάτια με μήκη $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$. Αν $\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - 2)^2 = 90$, τότε να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$.

64. Οι βαθμοί των μαθητών ενός τμήματος έχουν μέση τιμή 12 και $CV = 0,25$. Αν $\sum_{i=1}^v x_i^2 = 3060$ πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

65. Στον παρακάτω πίνακα, δίνεται η κατανομή της ηλικίας ενός δείγματος ατόμων μιας πόλης.

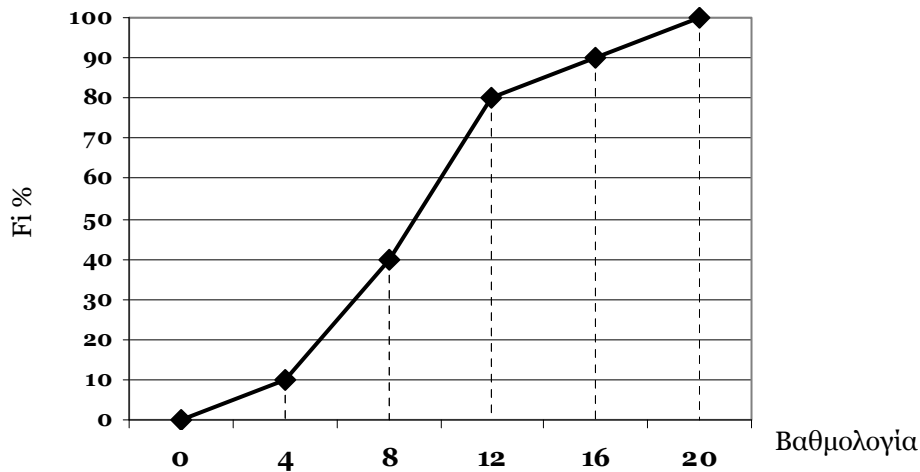
Ηλικία	Συχνότητα
0 - 20	18
20 - 40	24
40 - 60	30
60 - 80	36
80 - 100	12

Να βρείτε:

- α. τη διάμεσο και τη μέση τιμή.
- β. το πλήθος των ατόμων, που έχει ηλικία κάτω από 36 έτη.
- γ. την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

66. Στο παρακάτω διάγραμμα, δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας μιας ομάδας μαθητών σε ένα μάθημα. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 0 έως 20 . Δίνεται ότι 20 μαθητές έχουν βαθμό μικρότερο του 6 .

- α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 80 .
- β. Να βρείτε τη διάμεσο.
- γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των 80 μαθητών είναι ομοιογενές ως προς τη βαθμολογία.



67. Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων:

X_i	V_i
0	6
1	κ
2	6
3	6
4	8

- α. Αν η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x} = 2$, τότε να δείξετε ότι $\kappa = 10$.
- β. Να βρείτε την τυπική αποκλίση της κατανομής.

- γ. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας.
- δ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή c , κατά την οποία πρέπει να αυθηθούν οι παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

68. Σε μια εταιρεία, ο μηνιαίος μισθός των εργατών είναι 750 ευρώ, ενώ των στελεχών είναι 1100 ευρώ.

- A. Αν οι εργάτες είναι τετραπλάσιοι σε αριθμό από τα στελέχη, τότε να βρείτε το μέσο μισθό των υπαλλήλων (εργατών και στελεχών) της εταιρείας.
- B. Θεωρούμε ότι η εταιρεία έχει v υπαλλήλους, με μισθούς x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, v$.
 - α. Αν η τυπική απόκλιση των μισθών είναι 140 ευρώ και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 34.600.000 ευρώ, τότε να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που απασχολεί η εταιρεία.
 - β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ομοιογένεια στους μισθούς των υπαλλήλων.
 - γ. Η εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει κατά a ευρώ τους μισθούς των εργατών έτσι, ώστε ο νέος μισθός των υπαλλήλων να μην υπερβαίνει τα 900 ευρώ. Να βρείτε τη μέγιστη αύξηση, που μπορεί να κάνει η εταιρεία.

69. Η Γ' τάξη ενός Λυκείου έχει δύο τμήματα A και B. Το τμήμα A έχει 18 μαθητές και το τμήμα B έχει 22 μαθητές. Σε ένα κοινό διαγώνισμα, η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος A είναι $s_a = 2,5$ και του τμήματος B είναι $s_b = 1,5$, ενώ η μέση βαθμολογία των δύο τμημάτων είναι ίδια.

- α. Από τις βαθμολογίες των δύο τμημάτων, ποια έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια;
- β. Να βρείτε την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας όλων των μαθητών της τάξης αυτής.

70. Θεωρούμε το δείγμα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$. Ονομάζουμε μ τον αριθμητικό μέσο του δείγματος, M το σταθμικό μέσο με αντίστοιχους συντελεστές στάθμισης $0,1\alpha$, $0,1\beta$, $0,1\gamma$, $0,1\delta$ και s την τυπική απόκλιση του δείγματος. Αν $\mu \cdot M = 21$ και $21 - s^2 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, τότε να βρείτε τα μ, s, CV .

71. Έστω ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων x_i έχει μέση τιμή $\bar{x} = 3$, διάμεσο $\delta = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	$y_i = x_i + 1$	$y_i = -2x_i$	$y_i = -2x_i + 1$
\bar{y}			
δ_y			
s_y			
CV_y			

73. Η μέση τιμή \bar{x} και η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n είναι αντίστοιχα 8 και 10. Να βρείτε τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων $-6x_1 + 4, -6x_2 + 4, \dots, -6x_n + 4$.

74. Οι παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_n ενός δείγματος μεγέθους n έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 3$ και διασπορά $s^2 = 4$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων y_1, y_2, \dots, y_n που προκύπτουν από τις x_1, x_2, \dots, x_n αν:

- προσθέσουμε σε καθεμία το 1 και πολλαπλασιάσουμε καθεμία με το -2 .
- αυξήσουμε καθεμία κατά 10 %.
- ελαττώσουμε καθεμία κατά 20 % και μετά προσθέσουμε το 1,6.

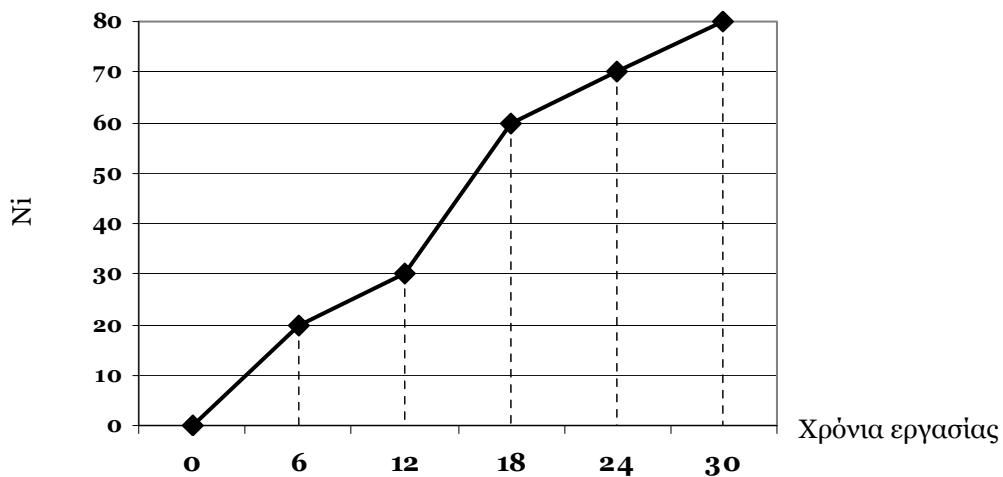
75. Έστω ευθεία (ϵ): $y = -3x + 2$ και τα σημεία της A_1, A_2, \dots, A_9 με τετμημένες x_1, x_2, \dots, x_9 , οι οποίες έχουν μέση τιμή -8 και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων A_1, A_2, \dots, A_9 .

76. Έστω x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις ενός δείγματος, που έχουν μέση τιμή και διακύμανση 4. Να βρείτε πόσες μονάδες, τουλάχιστον, πρέπει να αυξήσουμε την καθεμία από τις παρατηρήσεις αυτές, ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

77. Μια τάξη έχει μέση τιμή ηλικίας των μαθητών 14 χρόνια και τυπική απόκλιση 3 μήνες. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μαθητών, ύστερα από 3 χρόνια.

78. Σε ένα εργοστάσιο, ένα δείγμα εργαζόμενων στο τμήμα Α έχει μέσο (μηνιαίο) μισθό 950 € και τυπική απόκλιση 100 € ενώ, ένα άλλο δείγμα, στο τμήμα Β έχει μέσο (μηνιαίο) μισθό 1080 € και τυπική απόκλιση 120 €. Έστω ότι οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α θα πάρουν αύξηση 50 €, ενώ στο τμήμα Β θα πάρουν αύξηση 5%. Στους νέους μισθούς, να εξετάσετε ποιο από τα δύο δείγματα τιμών έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια, όπως επίσης αν αυτό το ίδιο είναι ομοιογενές.

79. Τα χρόνια εργασίας, ενός δείγματος εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο, σχηματίζουν το παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Να βρείτε τη διάμεσο, τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας, ύστερα από 5 χρόνια.



80. Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των 10 τιμών, ενός δείγματος, είναι $\bar{x} = 80$ και $CV = 25\%$. Αν για τις εννέα τιμές ισχύει

$$\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 3975, \text{ τότε να βρείτε:}$$

- α.** τη δέκατη τιμή.
- β.** πόσες μονάδες, τουλάχιστον, πρέπει να αυξηθούν οι τιμές τους δείγματος, ώστε να γίνει ομοιογενές.

81. Μια βιομηχανία συσκευάζει γάλα σε 4 μεγέθη κουτιών και σε ποσοστά 10%, 20%, 30% και 40% με αντίστοιχα κόστη 8, 6, 4 και 2 ευρώ ανά κουτί.

- α.** Να βρεθεί το μέσο κόστος, ανά κουτί, και η τυπική απόκλιση.
- β.** Αν αυξηθεί το κόστος κατά 10%, τότε να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση.

- 82.** Οι σημερινές ηλικίες, κάποιων ατόμων, έχουν $CV_1 = 0,05$, ενώ πριν από 16 χρόνια είχαν $CV_2 = 25\%$.
- α.** Να βρεθεί η σημερινή μέση τους ηλικία.
 - β.** Πριν πόσα χρόνια, από σήμερα, το δείγμα των ηλικιών τους ήταν για πρώτη φορά ομογενές;
 - γ.** Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών τους είναι 1604 , τότε να βρεθεί το πλήθος των ατόμων.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

- 83.** Η βαθμολογία 200 μαθητών, σε ένα διαγώνισμα, είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό, το πολύ, 12 και 5 μαθητές, τουλάχιστον, 16 . Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16 και να εξετάσετε αν το δείγμα των βαθμών τους είναι ομοιογενές.
- 84.** Τα νούμερα των παπουτσιών, ενός δείγματος 400 ατόμων, ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Δέκα άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο, τουλάχιστον, 43 και 64 άτομα, το πολύ, 37 . Να βρείτε πόσα άτομα φοράνε παπούτσια από νούμερο 37 έως 43 .
- 85.** Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 16 % των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 10 και το 50 % μεγαλύτερες του 12 , τότε να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος των παρατηρήσεων.
- 86.** Οι παρατηρήσεις, μιας μεταβλητής X μεγέθους 800, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είκοσι παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 18 και 128 μεγαλύτερες του 36 .
- α.** Να βρείτε, κατά προσέγγιση, το εύρος του δείγματος.
 - β.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
- 87.** Έστω μεταβλητή X , η οποία παίρνει θετικές τιμές και η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με εύρος περίπου $R = 36$ και $CV = 20\%$.
- α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} του δείγματος.
 - β.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των ατόμων, που η τιμή τους είναι μεταξύ 24 και 42 .

- γ. Να αποδείξετε ότι αν οι τιμές της X αυξηθούν κατά $\omega > 0$, τότε ο CV θα μειωθεί.
- δ. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ω , ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

88. Ένα δείγμα έχει μέγεθος $n = 10$ και η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν $\sum_{i=1}^{10} x_i = 2,4$ και $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4,86$ τότε να βρείτε το συντελεστή CV .

89. Η διάρκεια ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός δείγματος 8000 ηλεκτρικών συσκευών, που παράγει μια μηχανή όταν λειτουργεί κανονικά, ακολουθεί την κανονική ή περίπου κατανομή κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20, ενώ 200 ηλεκτρικές συσκευές έχουν διάρκεια ζωής, τουλάχιστον, 22.

- α. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- β. Να υπολογίσετε το πλήθος των ηλεκτρικών συσκευών του δείγματος, που έχουν διάρκεια ζωής από 19 έως 23.
- γ. Θεωρούμε μια συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 17. Αν στο δείγμα βρέθηκαν 15 ηλεκτρικές συσκευές, που έχουν διάρκεια ζωής κάτω από 17, τότε να εξετάσετε αν έχει βλάβη η μηχανή που τις παράγει.

90. Ένα μηχάνημα κατασκευάζει βίδες. Όταν το μηχάνημα λειτουργεί σωστά, η κατανομή συχνοτήτων των βιδών, ως προς το μήκος τους, είναι κανονική με μέση τιμή \bar{x} (σε cm) και τυπική απόκλιση s (σε cm). Γνωρίζουμε, επίσης, ότι 95% περίπου των βιδών, που κατασκευάζει το παραπάνω μηχάνημα, έχουν μήκος μεταξύ 5,6 και 6,4 cm.

- α. Να υπολογίσετε το μέσο μήκος των βιδών, την τυπική απόκλιση μήκους, καθώς και το εύρος της κατανομής.
- β. Να βρείτε το ποσοστό των βιδών, που έχει μήκος μεταξύ 5,8 και 6 cm.
- γ. Αν μια βίδα έχει μήκος μικρότερο ή ίσο των 5,4 cm ή μεγαλύτερο ή ίσο των 6,6 cm, τότε θεωρείται ελαττωματική. Να βρείτε το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών.
- δ. Σε ποιοτικό έλεγχο 10.000 βιδών, που κατασκευάζει το μηχάνημα, 45 βίδες βρίσκονται ελαττωματικές. Η πρόταση: "Το μηχάνημα παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας" είναι Σωστή ή Λανθασμένη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

