2010 - 2011

4ο Γενικό Λύκειο Χανίων

Γ τάξη

Μαθηματικά

Γενικής Παιδείας

γ

Ασκήσεις για λύση

Επιμέλεια: Μ. Ι. Παπαγρηγοράκης
http://users.sch.gr/mipapagr

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

278 Η ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από στατιστική έρευνα η οποία είχε ως αντικείμενο τον αριθμό των παιδιών των υπαλλήλων μια εταιρείας έδειξε ότι:

Δεν υπήρχαν υπάλληλοι με πέντε ή περισσότερα παιδιά

Η μέση τιμή των παιδιών που είχαν οι υπάλληλοι της εταιρείας υπολογίστηκε ότι ήταν 1,65

Το ποσοστό των υπαλλήλων που είχαν ως και δύο παιδιά ήταν 80%

Το ποσοστό των υπαλλήλων με ένα παιδί ήταν ίσο με αυτό των υπαλλήλων που δεν είχαν κανένα παιδί

Οι υπάλληλοι που είχαν τρία παιδιά ήταν τριπλάσιοι από αυτούς που είχαν τέσσερα παιδιά

Να συμπληρωθεί ο πίνακας σχετικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

279 Μια βιομηχανία παράγει τα προϊόντα A, B, Γ, Δ σε ποσοστό 10%, 20%, 30%, 40% επί του συνόλου της παραγωγής της με αντίστοιχο κόστος $14,\ 12,\ 10,\ 8$ € ανά μονάδα προϊόντος.

α) Να βρείτε το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος της παραγωγής.

β) Να δείξετε ότι η διασπορά του κόστους είναι $s^2 = 4$.

γ) Να βρείτε αν υπάρχουν τιμές του α, για τις οποίες, αν το κόστος κάθε προϊόντος αυξηθεί κατά a το δείγμα της παραγωγής γίνεται ομοιογενές.

280 Οι ημερήσιες αποδοχές των 15 υπαλλήλων μιας εταιρίας σε € είναι

$27, 31, 29, 31, 27, 26, 28, 25, 31, 30, 29, 24, 26, 27, 29$ Να υπολογιστεί η μέση τιμή .

Αν οι αποδοχές των υπαλλήλων των οποίων οι εβδομαδιαίες αποδοχές είναι μικρότερες από τη μέση τιμή αυξάνονται , και γίνονται ίσες με τη μέση τιμή , τότε ποια είναι η μέση τιμή και η διάμεσος .

281 Α) Να αποδείξετε ότι $s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i - \bar{x}^2$.

Β) Ένα σχολείο έχει δύο τμήματα στην Γ τάξη τα Α και Β με 10 και 5 μαθητές αντίστοιχα. Ο μέσος όρος των βαθμών στο Α τμήμα είναι 9 ενώ ο μέσος όρος των βαθμών και στα δύο τμήματα είναι 10.

α) Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του τμήματος Β

β) Αν φύγουν δύο μαθητές από το τμήμα Α με βαθμό 11 και ο ένας πάει στο τμήμα Β, να βρείτε τους νέους μέσους των βαθμών των τμημάτων.

γ) Αν για τα τμήματα Α και Β ισχύουν αντίστοιχα ότι $\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 f_i = 85$, $0 \le \kappa \le 10$ και $\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 f_i = 148$, $0 \le \lambda \le 5$, να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών.

282 Ένα δείγμα έχει μέγεθος $\nu = 8$, $\sum_{i=1}^{8} (2x_i + 6) = 752$ και $S = 2$. Να βρείτε η $\bar{x}$ και το $\sum_{i=1}^{8} x_i^2$.

283 Α) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και απόκλιση s_x. Να αποδείξετε ότι αν από κάθε παρατήρηση αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και διαιρέσουμε με την απόκλιση s_x, οι νέες παρατηρήσεις που προκύπτουν έχουν μέση τιμή 0 και απόκλιση 1.

Β) Έστω $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Να δειχτεί ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $\frac{x_1 - \bar{x}}{s}, \frac{x_2 - \bar{x}}{s}, \ldots, \frac{x_\nu - \bar{x}}{s}$ είναι 0 και 1 αντίστοιχα.

284 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3}{x + \alpha}, & x \ne -\alpha \\ \beta & x = -\alpha \end{cases}$ με $\alpha < 0$, $\beta > 1$ και η μεταβλητή x με τιμές τις $\alpha, 0, \gamma, \beta, 3$. Αν η f είναι συνεχής στο $-\alpha$ και η μεταβλητή X έχει μέση τιμή και διάμεσο ίσες με 1, να βρεθούν οι αριθμοί α, β, γ και ο συντελεστής μεταβολής των παρατηρήσεων της μεταβλητής x.

285 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(t_1-x)^3+(t_2-x)^3+\ldots+(t_\nu-x)^3$, $x\in R$ όπου $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος με τυπική απόκλιση $s>0$ και μέση τιμή $\bar{x}$.

Α) Να αποδείξετε ότι $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-(\bar{x})^2$

Β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-3\nu\left(x^2-2\bar{x}\cdot x+s^2+(\bar{x})^2\right)$

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο R

Δ) Να βρείτε το σημείο x στο οποίο η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

286 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\bar{x}}{2}\cdot x^2-s\cdot x+1$ όπου $\bar{x}$ και s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος με $\bar{x}>0$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,1)$ τότε:

Α) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Β) Να βρείτε τα ακρότατα της f στο R.

Γ) Αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x\to s}f(x)=1$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

Δ) Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που περιέχονται στο διάστημα $(1,5)$ εάν υποθέσουμε ότι η καμπύλη κατανομής του δείγματος είναι περίπου κανονική καθώς και το εύρος R των τιμών του δείγματος.

Α) 50%,οχι Β) f(1/2) ελαχ Γ) 2,1Δ) 83,85%, 6

287 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=10\cdot s\cdot x^2+\bar{x}\cdot x+11$, $x\in R$ όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους ν (με $\bar{x}\neq 0,\ s\neq 0$). Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $B(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=1821$, τότε:

Α. Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Β. Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:

α. Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

β. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο B.

288 Δίνονται οι αριθμοί 13, 19, 21, 27. Συμπληρώνουμε το σύνολο των αριθμών με κ παρατηρήσεις με τιμή 20.

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x}'$ των $\kappa+4$ αριθμών είναι ίση με τη μέση τιμή των τεσσάρων αριθμών.

β) Να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{k+4}(t_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{x})^2$

γ) Αν s^2 είναι η διακύμανση των τεσσάρων αριθμών και s'^2 είναι η διακύμανση των $\kappa+4$ αριθμών, να βρείτε την s^2 και να αποδείξετε ότι $s'^2=\frac{4\cdot s^2}{k+4}$

δ) Να αποδείξετε ότι το σύνολο 13, 19, 21, 27, δεν είναι ομοιογενές και να βρείτε πόσες παρατηρήσεις με τιμή 20 χρειάζεται να προσθέσουμε σε αυτό, ώστε να γίνει ομοιογενές με συντελεστή μεταβολής 10%.

289 Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{5}{2}x^2+\ln 2$ και τα σημεία $M_1(x_1,f(x_1))$, $M_2(x_2,f(x_2))$, …, $M_\nu(x_\nu,f(x_\nu))$ της γραφικής της παράστασης, με $0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu$. Αν η μέση τιμή των τετμημένων των $M_1,M_2,\ldots,M_\nu$ είναι 401.

Α) Βρείτε τη μέση τιμή των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $M_1,M_2,\ldots,M_\nu$

Β) Αν $(x_1-401)^2+(x_2-401)^2+\ldots+(x_\nu-401)^2=2500\nu$, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τετμημένων των σημείων $M_1,M_2,\ldots,M_\nu$.

Γ) Αν $x_\nu^2-x_1^2=802$ να βρείτε το εύρος του δείγματος των τεταγμένων των σημείων $M_1,M_2,\ldots,M_\nu$

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

290 Ρίχνουμε δύο ζάρια και σημειώνουμε τις ενδείξεις τους σε ένα διατεταγμένο ζεύγος. Αν Ω ο δειγματικός χώρος αυτού του πειράματος τύχης, θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$X=\{(x,y)\in\Omega/\text{το σημείο } (x,y) \text{ ανήκει στην ευθεία } y=2x\text{-}1\}$

$Y=\{(x,y)\in\Omega/\text{το σημείο } (x,y) \text{ ανήκει στην γραφική παράσταση της } y=x^2\}$

Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(X)$, $P(Y)$, $P(X-Y)$

291 Αν $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ είναι ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης με $P(2)=2P(1)$ και $P(\kappa)=\dfrac{1}{\kappa}$ για $\kappa>2$, τότε

Α) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

Β) Αν $E=\{\lambda\in\Omega/\lambda \text{ θέση τοπικού ακροτάτου της } f(x)=x^3\text{-}6x^2+9x+2\}$, να βρεθεί η $P(E)$.

292 Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ και $B=\{\omega_1,\omega_3\}$. Αν ισχύουν : $P(A)=\dfrac{1}{\kappa}$, $P(B)=\dfrac{2\kappa-1}{2\kappa}$ και $P(\omega_4)=\dfrac{1-\kappa}{3\kappa}$, να βρεθεί ο $\kappa\in R^*$ και οι πιθανότητες $P(\omega_2),P(\omega_4)$.

ΑΠ: $\kappa=1$ $P(\omega_2)=0{,}5$, $P(\omega_4)=0$

293 \`Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{0,1,2,3,\ldots,10\}$ και οι πιθανότητες $P(\kappa)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\kappa}$, $\kappa=1,2,..,10$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(0)$ και $P(A)$, όπου $A=\{0,2,4,\ldots,10\}$

294 Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και δύο ενδεχόμενά του A, B, με $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$.

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσό τους.

Β) Να αποδείξετε ότι η διακύμανσή τους είναι $s^2=\dfrac{1}{2}\left[P(A\cap B)\right]^2-\dfrac{1}{2}P(A\cap B)+\dfrac{1}{8}$

Γ) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι ίση με $s\sqrt{2}$

295 Σε κάποια σχολική τάξη πήραμε ένα δείγμα μαθητών και το εξετάσαμε ως προς το βάρος τους. Διαπιστώσαμε ότι το βάρος τους κυμαίνεται από 45 kg έως 75 kg και η κατανομή των βαρών τους είναι περίπου κανονική.

Α. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος του δείγματος.

Β. Να βρείτε τη διασπορά των βαρών τους.

Γ. Να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ. Αν το άθροισμα όλων των βαρών είναι 1800kg να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Ε. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα το βάρος του να είναι μεταξύ 50kg και 60kg ;

296 Έστω $\Omega=\{0,1,2,3,4,5\}$ ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα. Εκλέγουμε ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda\in\Omega$. Αν $f(x)=x^3-2\lambda x^2+\lambda^2x+1+2\lambda$, να βρείτε τη πιθανότητα η γραφική παράσταση της να έχει στο σημείο της με τετμημένη , εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(απ: $2/6$)

297 Θεωρούμε ένα δειγματικό χώρο Ω και τις πιθανότητες P_1, P_2. Ορίζουμε μια συνάρτηση P τέτοια ώστε:

$P(A)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}P_1(A)+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}P_2(A)$ για κάθε $A\subseteq\Omega$ με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $0\le P(A)\le 1$ για κάθε $A\subseteq\Omega$

Β) $P(\Omega)=1$

Γ) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ όταν $A\cap B=\varnothing$.

298 Σε μια βιοτεχνία έχουμε 200 ρούχα άσπρα και μαύρα από τα οποία μερικά είναι παντελόνια και τα άλλα είναι σακάκια και δεν υπάρχει άλλο είδος ρούχου. Αν υπάρχουν 50 άσπρα σακάκια , η πιθανότητα να επιλέξουμε στην τύχη σακάκι είναι 40% και η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στα μαύρα ρούχα είναι 90^o, τότε:

Α) Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων για τη μεταβλητή Χ:"είδος ρούχου ως προς το χρώμα και την κατηγορία» και να παραστήσετε την πιο πάνω κατανομή στο επίπεδο με όποιο τρόπο θέλετε.

Β) Να βρείτε τις πιθανότητες να αγοράσει:

α) σακάκι ή μαύρο ρούχο.

β) σακάκι και άσπρο ρούχο.

γ) ή μόνο παντελόνι ή μόνο άσπρο ρούχο.

299 Α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x$, $x\in R$ ως προς τη μονοτονία.

Β) Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(P(A\cup B))\le e-1$

β) Αν $A\subseteq B$ τότε $P(B)+e^{P(A)}\le P(A)+e^{P(B)}$

γ) Αν $P(A')=\frac{1}{2}$ τότε $1+2f(P(A-B))\le 2\sqrt{e}$

300 Έστω $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda\in\Omega$. Αν $f(x)=x^3-2\lambda x^2+6x+\lambda$, να βρείτε την πιθανότητα η f να μην έχει τοπικά ακρότατα. (απ: $3/10$)

301 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \alpha-\beta & \text{αν} \quad x=1 \\ 2\alpha x^3-3\beta x^2+x-1 & \text{αν} \quad x\neq 1\end{cases}$ όπου α,β είναι τα αποτελέσματα δύο διαδοχικών ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού, αντίστοιχα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$ ΑΠ: $1/12$

302 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\ln(x^2+1)$, $x\in R$

Α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, με μη μηδενικές πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του και A, B δύο ενδεχόμενά του για τα οποία ισχύει η σχέση $f(P(A))=P(B)$. Να αποδείξετε ότι το B είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το A αδύνατο ενδεχόμενο.

303 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x$, $x>0$ και τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω.

Α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Αν $A\neq\varnothing$ και $A\subseteq B$ να αποδείξετε ότι: $\ln\frac{P(A)}{P(B)}\le P(A)-P(B)$

Γ. Αν η εφαπτομένη στη καμπύλη της f στο $x_o=P(A)$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων τότε:

i) να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.

ii) να αποδείξετε ότι $f(P(A\cap B))\le -\frac{\ln(4e)}{2}$ για $A\cap B\neq\varnothing$. ΑΠ: Γ) i) $P(A)=0,5$, ii) $A\cap B\subseteq A$

304 Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση

$f(x)=4x^2P(A\cup B')-\ln^2 x+P(A\cap B)$, με $x>0$

Α) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f

Β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $x_o=1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ να βρείτε την πιθανότητα $P(B-A)$ ΑΠ Β) $0,75$

305 Έστω A , B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-xP(A')-P(A)}{x-1} & \text{αν} \quad x\neq 1 \\ \dfrac{3}{2}-P(B) & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_o=1$.

A) Να αποδείξετε ότι $P(A)+P(B)=\dfrac{1}{2}$

B) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των αριθμών: $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$

306 Έστω A ένα ενδεχόμενο του δ.χ. Ω και $P(A)$, $P(A')$, $P(\varnothing)$, $P(\Omega)$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος.

A. Να βρείτε την μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

B. Να αποδείξετε ότι: $s^2=\dfrac{1}{8}(2P(A)-1)^2+\dfrac{1}{8}$

Γ. Αν $P(A)=\dfrac{4-\sqrt{2}}{8}$ να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

307 Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A,B\neq\varnothing$ και η συνάρτηση $f(x)=xP(A)-\dfrac{P(B)}{x-1}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

B) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Δ) Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x για $x=2$ είναι 1, να αποδείξετε ότι $P(A)=P(B')$

308 Θεωρούμε τα ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα A,B και Γ , διάφορα του κενού , του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , ώστε $P(A)+P(B)+P(\Gamma)=1$. Οι πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων A,B και Γ , ικανοποιούν τις σχέσεις $P(A)(P(B))^2=P(B)(P(A))^2$ και $P(A\cup B)=P(\Gamma)-0,2$.

A) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B και Γ.

B) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-20P(B)x+3}{x-5P(A)}$.

309 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$ με $x\in R-\{2\}$.

A) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(3,f(3))$ είναι η ευθεία ε: $y=-7x+12$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in N^*$.

B) Έστω $\Omega=\{-\alpha,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{3\alpha-\beta}{3},\ \dfrac{8\alpha-\beta}{2}\}$, δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου τα α,β έχουν τις τιμές που προκύπτουν από το ερώτημα α). Θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x)=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{3}(\lambda-1)x^3+2x^2+2001$ με $x\in R$, $\lambda\in\Omega$, και το ενδεχόμενο

$E=\{\lambda\in\Omega/$ η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $R\}$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου E .

310 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $f(x\cdot P(A))+f(x\cdot P(B))=x\cdot P(A\cup B)+P(A-B)$ με A,B μη κενά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$ τότε:

A) Να αποδείξετε ότι $P(A\cap B)=0$

B) Αν το σημείο $K\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι $P(A)=\dfrac{1}{2}$

Γ) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x\cdot P(A))+f(x\cdot P(B))}{x\cdot P(A)}=\dfrac{8}{3}$, να αποδείξετε ότι $P(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$ και $P(B)=\dfrac{1}{3}$

311 Έστω A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}P(A)+\frac{x^2}{2}P(B)-xP(A\cup B)+1$. Αν η εφαπτομένη στη καμπύλη της f στο $x_o=1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

A) Να αποδείξετε ότι $P(A\cap B)=0$.

B) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-x}=2P(A)+P(B)$

312 .Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=4x^3-\frac{7}{2}x^2+x+2001$ και $g(x)=3x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+2009$ και ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης.

A) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των C_f,C_g στο κοινό τους σημείο.

B) Αν τα A, B είναι ενδεχόμενα του Ω με $P(A)<P(B)$, με πιθανότητες τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f και $P(A\cup B)\geq\frac{7}{12}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $P(A\cap B)=0$.

β) Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A,B .

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A,B .

313 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A')=1-x$, $P(B')=\frac{x}{x+1}$, $P(A\cap B)=\frac{x}{x+1}$, $x\in(0,1)$.

A) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)'$.

B) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $P(A-B)$ όταν $x=\frac{1}{2}$

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $P(A\cup B)$.

314 Έστω το ενδεχόμενο A και A' το αντίθετο του, με $P(A)>P(A')$. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση

$f(x)=\frac{\lambda}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{3}{16}\cdot x+2,\qquad$ με $\lambda\neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)>\frac{1}{2}$ και $P(A')<\frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την .

γ) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα για $x_1=P(A)$ και $x_2=P(A')$ να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

δ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να βρείτε το είδος της μονοτονίας της παραγώγου της συνάρτησης f καθώς επίσης και τα ακρότατα της παραγώγου.

ε) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

315 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+2$, $x\in R$

A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) , της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$

B) Έστω το σημείο $B(10,0)$. Να βρείτε το σημείο M της εφαπτομένης (ε) το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από το B

Γ) Έστω $K_1(x_1,y_1)$, $K_2(x_2,y_2)$, … , $K_\nu(x_\nu,y_\nu)$ σημεία της εφαπτομένης (ε) . Αν η μέση τιμή $\overline{y}$ των τεταγμένων των σημείων είναι 11 , να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$ των τετμημένων τους.

E) Έστω η ευθεία (η) παράλληλη στην εφαπτομένη (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $\left(0,-\kappa^2-4\right)$, όπου κ είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου $\Omega=\{0,1,2,\ldots,20\}$ ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: η ευθεία (η) να διέρχεται από το σημείο $B(10,0)$.

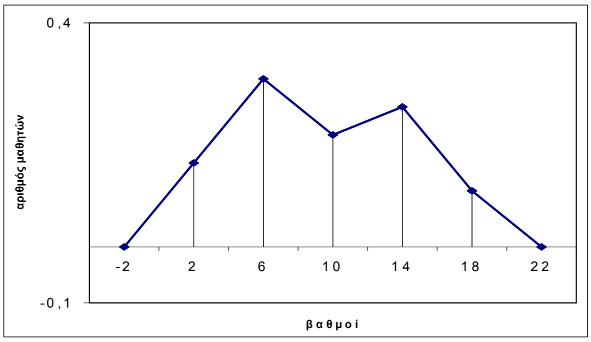
316 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^3-x$,

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Αν οι τετμημένες των σημείων $A_1(x_1,f(x_1))$ $A_2(x_2,f(x_2))$,…, $A_{10}(x_{10},f(x_{10}))$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}=2$ και τυπική απόκλιση $s=3$ να βρείτε τη μέση τιμή των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων στην καμπύλη της f στα σημεία $A_1,A_2,\dots,A_{10}$

Γ) Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με $P(A)=\frac{1}{2}$ να αποδείξετε ότι $8f(P(A-B))+13\le 0$.

317 Στο σχήμα είναι το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων που αναφέρεται σε ομαδοποίηση των βαθμών σε κλάσεις ίσου πλάτους c..



i) Να βρείτε το c

ii) Να κατασκευάσετε:

α) το ιστόγραμμα συχνοτήτων

β) το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$

γ) Να βρείτε τη διάμεσο

δ) Αν δοθεί έπαινος στο 2,5% των μαθητών με την καλύτερη βαθμολογία, τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής για να πάρει έπαινο;

ε) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει βαθμό από 10 έως 17;

318 A) Να αποδείξετε ότι $s^2=\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2-\bar{x}^2$.

B) Οι μαθητές της Γ τάξης ξόδεψαν ετησίως κατά μέσο όρο 100 euro αγοράζοντας διάφορα είδη από το κυλικείο. Δίνεται ότι το δείγμα των ποσών που ξόδεψε κάθε μαθητής είναι ομοιογενές.

α) να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή της τυπικής απόκλισης

β) Για $s=10$ i) αν $t_1, t_2,\dots,t_\nu$ είναι τα ποσά του ξόδεψαν οι ν μαθητές του σχολείου και ισχύει ότι $t_1^2, t_2^2,\dots,t_\nu^2=404000$ να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.

ii) Έστω ότι τα ποσά που ξόδεψαν οι μαθητές της Γ τάξης ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανοτητα αυτός να ξόδεψε τουλάχιστον 120 euro

319 Τις ελάχιστες θερμοκρασίες για 200 συνεχείς ημέρες τις ομαδοποιήσαμε σε πέντε κλάσεις πλάτους c όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Έστω ότι η διάμεσος είναι 13 και η μέση τιμή 11.

A) να βρείτε το πλάτος c των κλάσεων

B) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

Δ) Επιλέγουμε τυχαία μια ημέρα. Να βρείτε την πιθανότητα να είχε ελάχιστη θερμοκρασία μικρότερη από 15° C

[,)	x_i	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$
	6	30		
				40
12-				
Συνολο				

320 Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και $x_1,x_2,\dots,x_\nu$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=4x^2-(\bar{x})^3\cdot x+10\cdot s$, $x\in R$. Αν η $g(x)$ παρουσιάζει για $x=1$ ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $g(1)=-1$ τότε:

α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s.

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Επιλέγουμε στην τύχη μια παρατήρηση από τις ν παρατηρήσεις. Ποια η πιθανότητα να βρίσκεται μεταξύ 1,7 και 2,3 αν η κατανομή θεωρηθεί κανονική;

δ. Αυξάνουμε κάθε παρατήρηση κατά την ίδια ποσότητα $\lambda>0$. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.