ΜΑΡΙΑ ΓΚΟΥΝΤΑΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

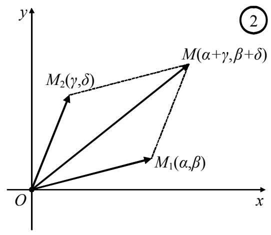
1. *"Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών* $\boldsymbol{\alpha+\beta i}$ *και* $\boldsymbol{\gamma+\delta i}$ *είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους".*

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



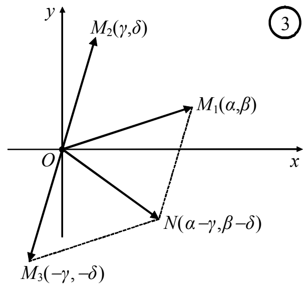
2. *"Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών* $\boldsymbol{\alpha+\beta i}$ *και* $\boldsymbol{\gamma+\delta i}$ *είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους".*

Επίσης, η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



3. *Να αποδείξετε ότι* $i^\nu = i^\upsilon$ *όπου ν θετικός ακέραιος και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4*

Απ:Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$\boldsymbol{i^0=1,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2 i=-i}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4=i^2i^2=1,\; i^5=i^4 i=1\cdot i=i,\; i^6=i^4i^2=1\cdot i^2=-1,\; i^7=i^4i^3=1\cdot i^3=-i\,,$$

δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^ν επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 & , \text{ αν } \upsilon=0\\ i & , \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2\\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$$

4. *Αν* $z_1=\alpha+\beta i$ *και* $z_2=\gamma+\delta i$ *είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:* $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

Απ: $\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

5. *Αν* z_1 *και* z_2 *είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί,τότε ν.δ.ο.* $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Απ: $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \Leftrightarrow |z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2})=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$

$$\Leftrightarrow z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$$

ΑΝΑΛΥΣΗ

1. *Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση*

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

2. *Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες.*

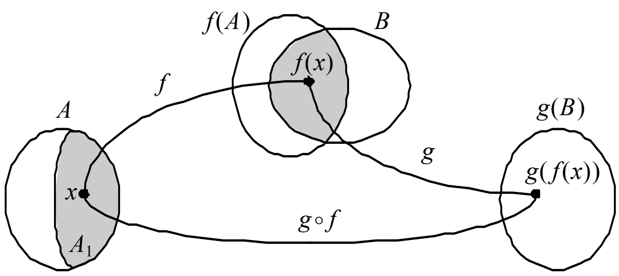
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

3. *Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g.*

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{gof}$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



24

Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

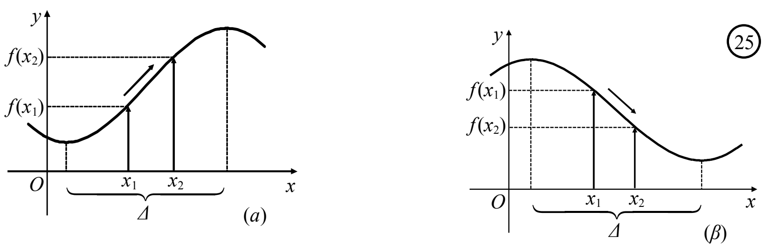
$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

4. *Πότε μια συνάρτηση λέγεται "γνησίως αύξουσα συνάρτηση" και πότε "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση".*

Μια συνάρτηση f λέγεται[1]:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)



25

(1) Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς,:

- **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) \le f(x_2).$$
- **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) \ge f(x_2).$$

5. *Τι ονομάζουμε "μέγιστο", "ελάχιστο", συνάρτησης*

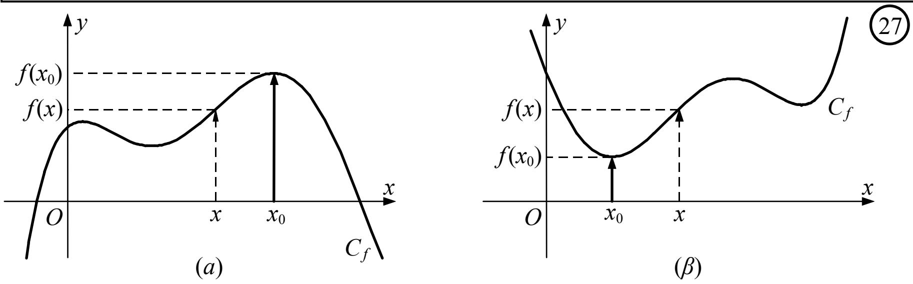
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \qquad (\Sigma\chi.\ 27\alpha)$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \qquad (\Sigma\chi.\ 27\beta).$$



6. *Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1*

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση $1-1$**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad x_1 \ne x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \ne f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση $1-1$**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1 = x_2.$$

7. *Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής*

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

8. *Τι ονομάζουμε ακολουθία (α_ν) και πότε θα λέμε ότι έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$*

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$$

9. *Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0*

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

10. *Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο Af*

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Af.

11. *Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α,β)*

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

12. *Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β]*

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

13. *Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano*

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

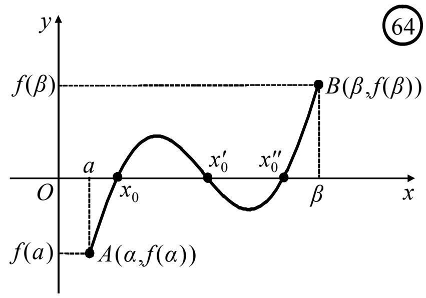
$f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

14. *Να εξηγήσετε γεωμετρικά το Θ. Bolzano*

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$.

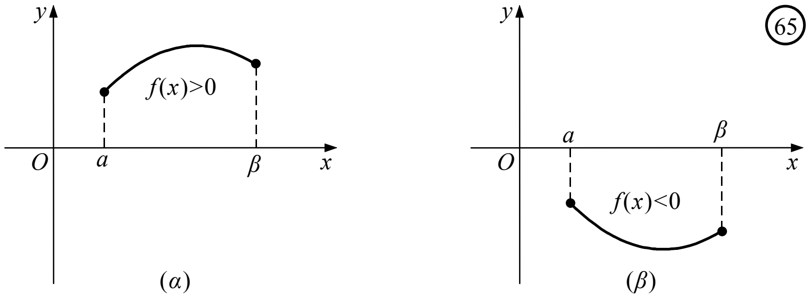
Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



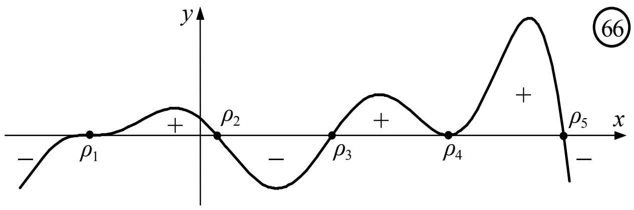
ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

15. *Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να το αποδείξετε*

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$f(x_0)=\eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

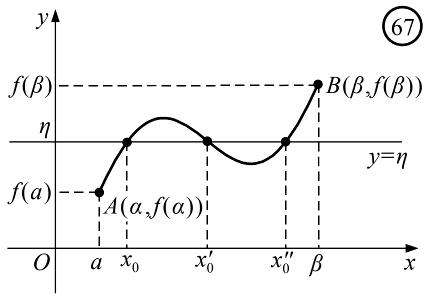
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

16. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m, M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου

$$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. *Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α;*

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)},$$

2. *Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.*

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'(x_0)}$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

3. *Να αποδείξετε ότι Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

4. *Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Af ;*

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

5. *Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα* (α, β) *;*

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

6. *Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα* $[\alpha, \beta]$ *;*

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

7. *Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$,$x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

8. *Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

9. *Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu\in R-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

10. *Έστω η συνάρτηση* $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}}$. *Η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,+\infty)$ *και ισχύει* $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, *δηλαδή* $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή
$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

11. *Έστω συνάρτηση* $f(x)=\eta\mu x$. *Η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ισχύει* $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, *δηλαδή* $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x\in \mathrm{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή
$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή, $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

12. *Έστω η συνάρτηση* $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. *Η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ισχύει* $f'(x)=-\eta\mu x$, *δηλαδή* $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x\in \mathrm{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

Οπότε
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

13. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

14. ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

15. ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=R-\{x|\text{συν}x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\text{συν}^2x}$, δηλαδή $(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}x\text{συν}x+\text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2x}$$

$$=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}.$$

16. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

***17.** Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)'=\alpha^x \ln\alpha$*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$.

***18.** Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in \mathrm{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

***19.** Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0*

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

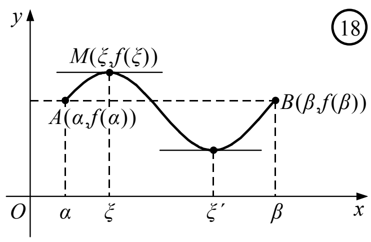
***20.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το εξηγήσετε γεωμετρικά*

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



***21.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής και να το εξηγήσετε γεωμετρικά*

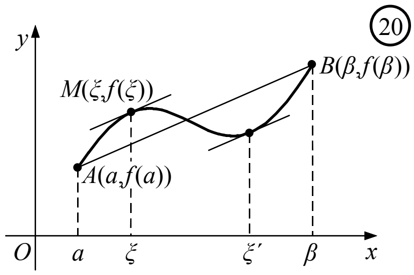
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



22. *Να αποδείξετε ότι:*

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- *η f είναι συνεχής στο Δ και*
- *f ′(x)=0 για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,*

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

23. *Να αποδείξετε ότι:*

Έστω δυο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- *οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και*
- *f ′(x)=g ′(x) για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,*

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

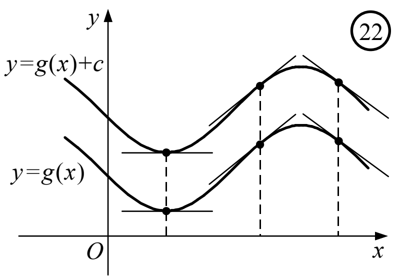
$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



24. *Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.*

• *Αν* $f'(x)>0$ *σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.*

• *Αν* $f'(x)<0$ *σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

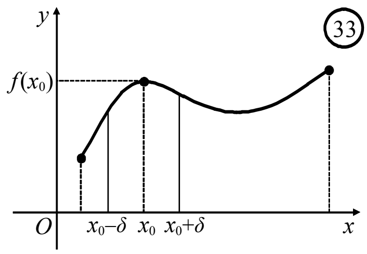
Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

25. *Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε:*

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

26. *Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;*

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα Δ και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του Δ.

27. *Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f*

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

28. *Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f*

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

29. *Πότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)*

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

30. *Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)*

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \to -\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0\,.$$

31. *Να διατυπώσετε τους κανόνες de l'Hospital*

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\text{μορφή } \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. *Έστω f μια ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ.*

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**[(1)] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

2. *Να αποδείξετε ότι: Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε*

- *Όλες οι συναρτησεις της μορφής G(x)=F(x)+c,* $c \in \mathbb{R}$, *είναι παράγουσες της f στο Δ και*
- *Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c,* $c \in \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathrm{R}$,, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

● Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

3. *Να διατυπώσετε το θεώρημα ολοκλήρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.*

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathrm{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c . \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) .$$

---

(1) Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.