Μιγαδικοί Αριθμοί

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Απόδειξη

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

(1)

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i =$$
$$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \overline{(x_1 + y_1 i)} + \overline{(x_2 + y_2 i)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Αναλόγως, εκτελείται και η απόδειξη της διαφοράς.

(2)

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)} = \overline{x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2} =$$
$$= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i \quad \text{(I)}$$

και

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{x_1 + y_1 i} \cdot \overline{x_2 + y_2 i} = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) =$$
$$= x_1 x_2 - x_1 y_2 i - y_1 x_2 i - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i \quad \text{(II)}$$

Επειδή (I) = (II) , η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

(3)

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2)}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right)} =$$

$$=\overline{\left(\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i}{x_2{}^2+y_2{}^2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}i\right)}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}-\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}i=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}i \quad (I)$$

και

$$\frac{\overline{\mathbf{z_1}}}{\overline{\mathbf{z_2}}}=\frac{\overline{x_1+y_1i}}{\overline{x_2+y_2i}}=\frac{x_1-y_1i}{x_2-y_2i}=\frac{(x_1-y_1i)(x_2+y_2i)}{(x_2-y_2i)(x_2+y_2i)}=\frac{x_1x_2+x_1y_2i\text{ - }y_1x_2i+y_1y_2)}{x_2{}^2+y_2{}^2}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2-y_1x_2)i}{x_2{}^2+y_2{}^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}i \quad (II)$$

Επειδή (I) = (II) , η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

---

1. $|\mathbf{z_1}\cdot\mathbf{z_2}|=|\mathbf{z_1}|\cdot|\mathbf{z_2}|$

2. $\left|\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}\right|=\frac{|\mathbf{z_1}|}{|\mathbf{z_2}|}$

Απόδειξη

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

(1)

$$|\mathbf{z_1}\cdot\mathbf{z_2}|=|\mathbf{z_1}|\cdot|\mathbf{z_2}|\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|^2=(|z_1|\cdot|z_2|)^2\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2})=z_1\bar{z}_1\cdot z_2\bar{z}_2\Leftrightarrow z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$$

Εφόσον, η τελευταία σχέση είναι αληθής, τότε θα είναι αληθής και η ισοδύναμη αρχική.

(2)

$$\left|\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}\right| = \frac{|\mathbf{z_1}|}{|\mathbf{z_2}|} \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)^2 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_2}$$

Εφόσον, η τελευταία σχέση είναι αληθής, τότε θα είναι αληθής και η ισοδύναμη αρχική.

Τριγωνομετρικά όρια

$$|\boldsymbol{\eta\mu x}| \le |\mathbf{x}|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

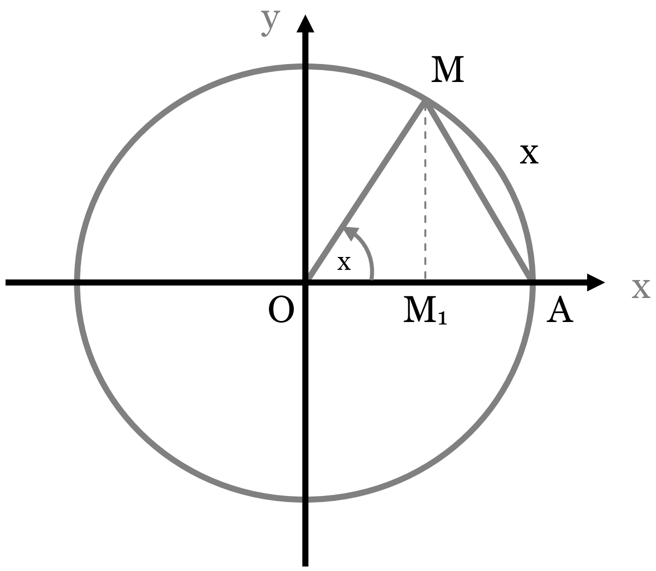
ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΚΤΟΣ
ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

Απόδειξη

- Για $x = 0$ προφανώς ισχύει η ισότητα.
  Μάλιστα, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

- Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ από το παρακάτω σχήμα έχουμε:

$$\eta\mu x = (MM_1) < (MA) < (\text{τοξ}MA) = x$$



Άρα:

$$|\boldsymbol{\eta\mu x}| \le |\mathbf{x}|, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

- Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε λόγω της (1) έχουμε:

$$|\eta\mu(-x)| < |-x| \Leftrightarrow |-\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow |\boldsymbol{\eta\mu x}| \le |\mathbf{x}|$$

➲ Για $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\eta\mu x| \Leftrightarrow |\boldsymbol{\eta\mu x}| \leq |\mathbf{x}|$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει $|\boldsymbol{\eta\mu x}| \leq |\mathbf{x}|$.

$$\lim_{x \to x_o} \boldsymbol{\eta\mu x} = \boldsymbol{\eta\mu x_o}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΚΤΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

Απόδειξη

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0} \boldsymbol{\eta\mu x} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x} = \mathbf{1} \qquad (1)$$

Πράγματι:

➲ Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη έχουμε $|\eta\mu x| \leq |x|$, άρα:

$$-|x| \leq \eta\mu x \leq |x| \ .$$

Επειδή: $\lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = 0 = \lim\limits_{x \to 0}|x|$
τότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι: $\lim\limits_{x \to 0} \eta\mu x = 0$.

➲ Γνωρίζουμε επίσης ότι: $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$.
οπότε: $\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως: $\lim\limits_{x \to 0} \sigma\upsilon\nu x = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - \lim\limits_{x \to 0} \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - 0} = 1$.

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_o} \boldsymbol{\eta\mu x} &= \lim_{h \to 0} \eta\mu(x_o + h) = \lim_{h \to 0}(\eta\mu x_o \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_o \cdot \eta\mu h) \\ &= \eta\mu x_o \cdot \lim_{h \to 0} \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_o \cdot \lim_{h \to 0} \eta\mu h \end{aligned}$$

$$\overset{(1)}{=} \eta\mu x_o \cdot 1 + \sigma\upsilon\nu x_o \cdot 0 = \boldsymbol{\eta\mu x_o}\,.$$

$$\lim_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_o$$

Απόδειξη

Αναλόγως με την προηγούμενη απόδειξη και με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

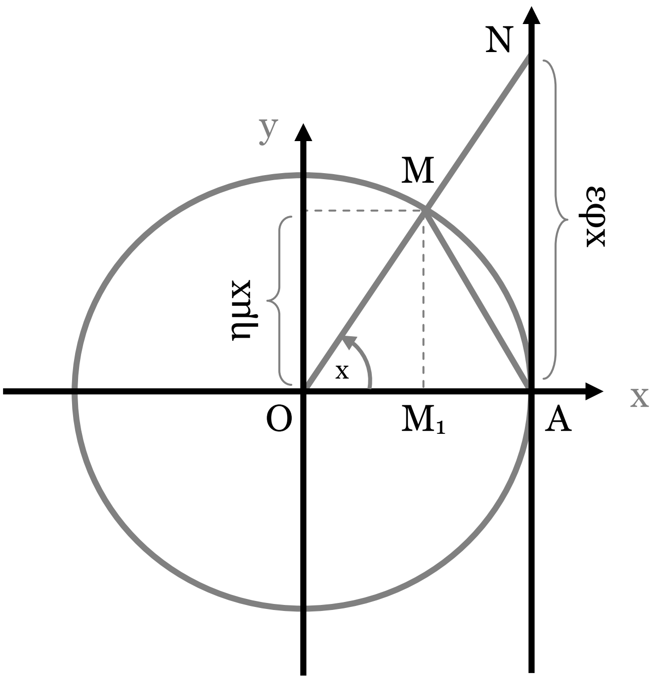
$$\lim_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x = \lim_{h\to 0} \sigma\upsilon\nu(x_o + h) = \lim_{h\to 0}(\sigma\upsilon\nu x_o \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x_o \cdot \eta\mu h)$$

$$= \sigma\upsilon\nu x_o \cdot \lim_{h\to 0} \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x_o \cdot \lim_{h\to 0} \eta\mu h$$

$$\overset{(1)}{=} \sigma\upsilon\nu x_o \cdot 1 - \eta\mu x_o \cdot 0 = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x_o}\,.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Απόδειξη



➲ Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε από το προηγούμενο σχήμα προκύπτει ότι:

εμβ(τριγ ΟΑΜ) < εμβ(τομ ΟΑΜ) < εμβ(τριγ ΟΑΝ)

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \text{ημ}x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \text{εφ}x$$

$$\text{ημ}x < x < \text{εφ}x$$

$$1 < \frac{x}{\text{ημ}x} < \frac{1}{\text{συν}x}$$

$$\boldsymbol{\text{συν}x < \frac{\text{ημ}x}{x} < 1}\,.$$

➲ Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε:

$$\text{συν}(-x) < \frac{\text{ημ}(-x)}{-x} < 1 \iff \boldsymbol{\text{συν}x < \frac{\text{ημ}x}{x} < 1}$$

Επομένως, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\, 0\right) \cup \left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει: $\boldsymbol{\text{συν}x < \frac{\text{ημ}x}{x} < 1}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\text{συν}x = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x}{x} = 1}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΚΤΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

Απόδειξη

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}x - 1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\text{συν}x - 1)(\text{συν}x + 1)}{x(\text{συν}x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 1}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 1}$$

$$= -1\cdot 0$$

$$= \mathbf{0}$$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

☑ η f είναι συνεχής στο [α, β] και

☑ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$\mathbf{f(x_o) = \eta}$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (βλ. σχήμα). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

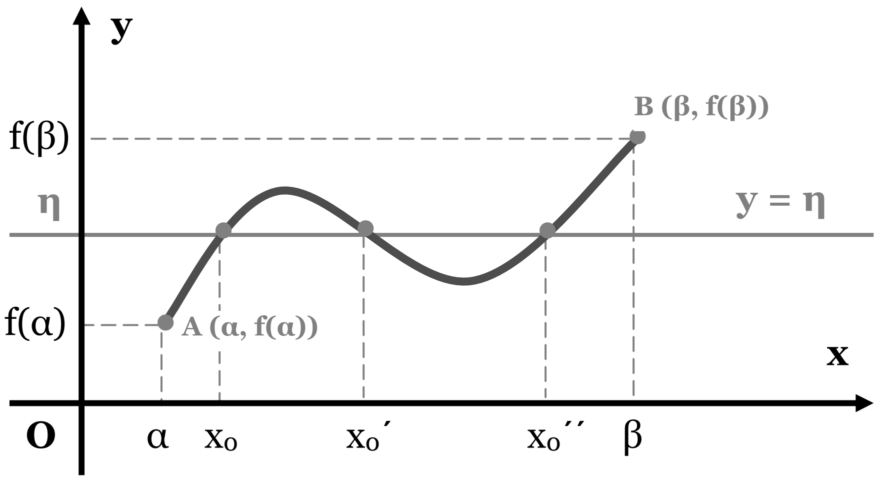
➲ η g είναι συνεχής στο [α, β] και

➲ $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$,

αφού: $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και

$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_o) = f(x_o) - \eta = 0$, οπότε $\mathbf{f(x_o) = \eta}$.



Παράγωγος και συνέχεια

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_o$ έχουμε

$$f(x)-f(x_o)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot(x-x_o)$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_o}[f(x)-f(x_o)] =$$

$$\lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot x-x_o\right] =$$

$$\lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right]\cdot\lim_{x\to x_o}(x-x_o) =$$

$$f\,'(x_o)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμο στο x_o. Επομένως, $\mathbf{\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)}$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_o.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Η **σταθερή** συνάρτηση f(x) = c ($c\in\mathbb{R}$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f ΄(x) = 0, δηλαδή:

$$\mathbf{(c)' = 0}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{c-c}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}0=\mathbf{0}$$

Η **ταυτοτική** συνάρτηση f(x) = x είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f ΄(x) = 1, δηλαδή:

$$\mathbf{(x)' = 1}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x-x_o}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}1=\mathbf{1}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, με $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu\cdot x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x^{\nu})' = \nu \cdot x^{\nu-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x^{\nu}-x_o^{\nu}}{x-x_o}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(x-x_o)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot x_o+\ldots+x_o^{\nu-1})}{x-x_o}=$$

$$\lim_{x\to x_o}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot x_o+\ldots+x_o^{\nu-1})=$$

$$x_o^{\nu-1}+x_o^{\nu-2}\cdot x_o+\ldots+x_o^{\nu-1}=$$

$$\boldsymbol{\nu\cdot x_o^{\nu-1}}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_o είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_o$ ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_o}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}{\left(x-x_o\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x_o}^2}{\left(x-x_o\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{x-x_o}{\left(x-x_o\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}=\frac{1}{\sqrt{x_o}+\sqrt{x_o}}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x_o}}}$$

Η συνάρτηση f(x) = ημx είναι παραγωγίσιμη στο ℝ και ισχύει f ΄(x) = συνx , δηλαδή:

(ημx)΄ = συνx

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε x∈ℝ και h ≠ 0 ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{ημ(x+h)-ημx}{h}=$$

$$\lim_{h\to o}\frac{ημx\cdot συνh+συνx\cdot ημh-ημx}{h}=$$

$$\lim_{h\to o}\frac{ημx\cdot συνh-ημx}{h}+\lim_{h\to o}\frac{συνx\cdot ημh}{h}=$$

$$\lim_{h\to o}\left(ημx\cdot\frac{συνh-1}{h}\right)+\lim_{h\to o}\left(συνx\cdot\frac{ημh}{h}\right)=$$

$$\lim_{h\to o}ημx\cdot\lim_{h\to o}\left(\frac{συνh-1}{h}\right)+\lim_{h\to o}συνx\cdot\lim_{h\to o}\left(\frac{ημh}{h}\right)=$$

$$ημx\cdot 0+συνx\cdot 1=\mathbf{συνx}$$

Η συνάρτηση f(x) = συνx είναι παραγωγίσιμη στο ℝ και ισχύει
f ΄(x) = – ημx , δηλαδή:

(συνx)΄ = ημx

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε x∈ℝ και h ≠ 0 ισχύει:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{συν(x+h)-συνx}{h}=$$

$$\lim_{h\to o}\frac{συνx\cdot συνh-ημx\cdot ημh-συνx}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot\eta\mu h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\eta\mu x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\boldsymbol{\eta\mu x}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$ ($\nu\in\mathbb{N}^*$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f\,'(x) = -\nu\cdot x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x^{-\nu})' = -\nu\cdot x^{-\nu-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$\left(x^{-\nu}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'\cdot x^{\nu}-1\cdot(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu\cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\chi}^{-\boldsymbol{\nu}-\mathbf{1}}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{\, x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0 \,\}$ και ισχύει $f\,'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f\,'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \cdot \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως:

$$y\,' = (e^{u})\,' = e^{u} \cdot u\,' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \mathbf{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$ ($\alpha > 0$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f\,'(x) = \alpha^{x} \cdot \ln\alpha$, δηλαδή:

$$\mathbf{(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \cdot \ln\alpha}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = \alpha^{x} = e^{x \cdot \ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x \cdot \ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως:

$$y\,' = (e^{u})\,' = e^{u} \cdot u\,' = e^{x \cdot \ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \mathbf{\alpha^{x} \cdot \ln\alpha}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ ($x \in \mathbb{R}^{*}$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^{*}$ και ισχύει $f\,'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Απόδειξη

Πράγματι:

- Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως:

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα, σε κάθε περίπτωση: $\boldsymbol{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$

Κανόνες παραγώγισης

Θεώρημα 1 – Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\mathbf{(f+g)'(x_o) = f\,'(x_o) + g\,'(x_o)}$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_o$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= f\,'(x_o) + g\,'(x_o)$$

δηλαδή:

$$\mathbf{(f+g)'(x_o) = f\,'(x_o) + g\,'(x_o)}$$

Θεώρημα 2 – Παράγωγος γινομένου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\mathbf{(f\cdot g)'(x_o) = f\,'(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot g\,'(x_o)}$$

Απόδειξη

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΚΤΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

Για $x \neq x_o$, ισχύει:

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x)+f(x_o)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot g(x)+f(x_o)\cdot\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο x_o, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot\lim_{x\to x_o}g(x)+f(x_o)\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

$$= f\,'(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot g\,'(x_o)$$

δηλαδή

$$\mathbf{(f\cdot g)'(x_o) = f\,'(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot g\,'(x_o)}$$

Συνέπειες του θεωρήματος της μέσης τιμής

Θεώρημα 1

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

☑ η f είναι συνεχής στο Δ και

☑ $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$ τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1) θα είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$ τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Πόρισμα

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

☑ οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και

☑ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$\mathbf{f(x) = g(x) + c}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ θα είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$, να ισχύει $f(x) - g(x) = c$. Οπότε $f(x) = g(x) + c$, δηλαδή το ζητούμενο.

Θεώρημα 2

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ.

- ☑ Αν $\mathbf{f'(x) > 0}$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως **αύξουσα** σε όλο το Δ.
- ☑ Αν $\mathbf{f'(x) < 0}$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως **φθίνουσα** σε όλο το Δ.

Απόδειξη

➲ Αν $f'(x) > 0$, τότε:

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε:

$$\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$$

➲ Αν $f'(x) < 0$, τότε:

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$$

Επειδή $f\,'(\xi) < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_1) - f(x_2) < 0$, οπότε:

$$\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$$

Ακρότατα συνάρτησης

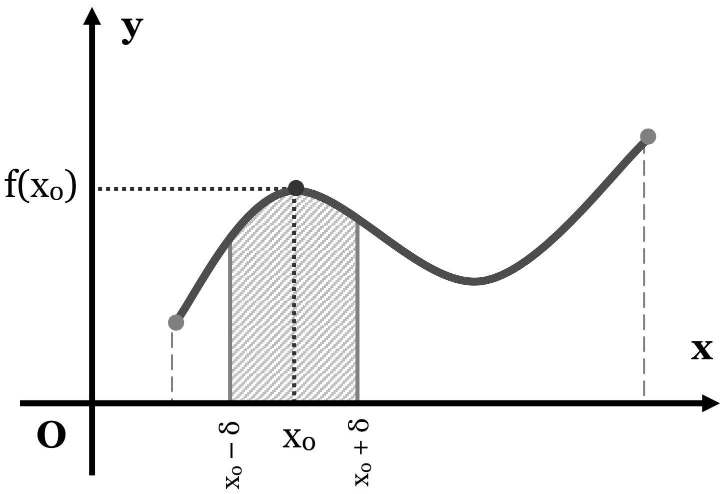
Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$\mathbf{f'(x_o) = 0}$$

Απόδειξη

- Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο.



Επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$(x_o - \delta, x_o + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \le f(x_o), \text{ για κάθε } x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, ισχύει:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Επομένως,

- Αν $x \in (x_o - \delta, x_o)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0 \qquad (2)$$

- Αν $x \in (x_o, x_o + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $\mathbf{f'(x_o) = 0}$.

➲ Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο.

Επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ελάχιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$(x_o - \delta, x_o + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \geq f(x_o), \text{ για κάθε } x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, ισχύει:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Επομένως,

- Αν $x \in (x_o - \delta, x_o)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0 \qquad (2)$$

- Αν $x \in (x_o, x_o + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $\mathbf{f'(x_o) = 0}$.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- ☑ Αν **$f'(x) > 0$** στο $(α, x_0)$ και **$f'(x) < 0$** στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
- ☑ Αν **$f'(x) < 0$** στο $(α, x_0)$ και **$f'(x) > 0$** στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.
- ☑ Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_0)\cup(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Απόδειξη

- ➲ Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(α, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(α, x_0]$. Έτσι έχουμε:

  $$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(α, x_0] \qquad (1)$$

  Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x\in(x_0, β)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, β)$. Έτσι έχουμε:

  $$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x\in[x_0, β) \qquad (2)$$

  Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

  $$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(α, β),$$

  που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

- ➲ Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x\in(α, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(α, x_0]$. Έτσι έχουμε:

  $$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(α, x_0] \qquad (3)$$

  Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(x_0, β)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, β)$. Έτσι έχουμε:

  $$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x\in[x_0, β) \qquad (4)$$

  Επομένως, λόγω των (3) και (4), ισχύει:

  $$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(α, β),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό ελάχιστο αυτής.

➲ Έστω ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

✸

Έστω ότι

$$f'(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

Ολοκληρωτικός λογισμός

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

☑ όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$\mathbf{G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

☑ κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

➲ Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

➲ Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με προηγούμενο πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{G(\beta) - G(\alpha)}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α, β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), για x = α έχουμε:

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$$

δηλαδή c = G(α). Λόγω της τελευταίας και για x = β, η σχέση (1) γίνεται:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \qquad (2)$$

Λύνοντας τη (2) ως προς το ολοκλήρωμα παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{G(\beta) - G(\alpha)}$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής ολοκληρωτικού λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{f(\xi)\cdot(\beta-\alpha)}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και ισχύει $F'(x) = f(x)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi \in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (1)$$

Είναι όμως,

$$F'(\xi) = f(\xi), \qquad F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \quad \text{και} \quad F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$$

Επομένως, η ισότητα (1) γράφεται:

$$f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt}{\beta-\alpha}$$

ή ισοδύναμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{f(\xi)\cdot(\beta-\alpha)}$$