Γ' Λυκείου Κατεύθυνση

[α π ο δ ε ί ξ ε ι ς]

ε ξ ε τ α σ τ έ α ς ύ λ η ς
2 0 1 7 - 2 0 1 8

Επιμέλεια
Κόλλας Αντώνης

1

Όριο πολυωνυμικής στο $x_o \in \mathbb{R}$

Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ είναι πολυώνυμο του x και $x_o \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x \to x_o} P(x) = P(x_o)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_o} P(x) &= \lim_{x \to x_o}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_o\right) \\
&= \lim_{x \to x_o}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) + \lim_{x \to x_o}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right) + \ldots + \lim_{x \to x_o}\left(\alpha_o\right) \\
&= \alpha_\nu \cdot \lim_{x \to x_o}\left(x^\nu\right) + \alpha_{\nu-1} \cdot \lim_{x \to x_o}\left(x^{\nu-1}\right) + \ldots + \alpha_o \\
&= \alpha_\nu x_o^\nu + \alpha_{\nu-1}x_o^{\nu-1} + \ldots + \alpha_o \\
&= P(x_o)
\end{aligned}$$

2 Όριο ρητής στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Αν $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x) \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$\mathbf{f(x_o) = \eta}$$

Απόδειξη

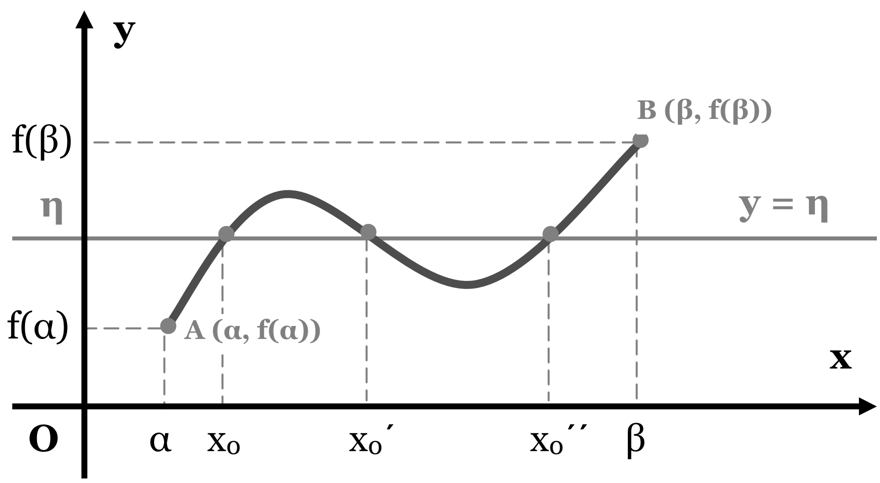
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (βλ. σχήμα). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$,

αφού: $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και

$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_o) = f(x_o) - \eta = 0$, οπότε $\mathbf{f(x_o) = \eta}$.



4 Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] =$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot x-x_0\right] =$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$$

$$f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμο στο x_0. Επομένως, $\mathbf{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

5 Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Η **σταθερή** συνάρτηση $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f\,'(x) = 0$, δηλαδή:

$$\mathbf{(c)' = 0}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = \mathbf{0}$$

6 Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Η **ταυτοτική** συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f\,'(x) = 1$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x)' = 1}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} 1 = \mathbf{1}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x^{\nu})' = \nu \cdot x^{\nu-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x^{\nu} - x_o^{\nu}}{x - x_o} =$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} \cdot x_o + \ldots + x_o^{\nu-1})}{x - x_o} =$$

$$\lim_{x \to x_o} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2} \cdot x_o + \ldots + x_o^{\nu-1}) =$$

$$x_o^{\nu-1} + x_o^{\nu-2} \cdot x_o + \ldots + x_o^{\nu-1} =$$

$$\boldsymbol{\nu \cdot x_o^{\nu-1}}$$

Η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει f ΄(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του (0, +∞), τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x_0}^2}{(x - x_0) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f\,'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$\left(x^{-\nu}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{\nu} - 1 \cdot (x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu \cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi}^{-\boldsymbol{\nu}-\mathbf{1}}$$

10 Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων

Η συνάρτηση f(x) = εφx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{ x \mid \text{συν}x = 0 \}$ και ισχύει $f\,'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2 x}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)' \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}x + \text{ημ}x \cdot \text{ημ}x}{\text{συν}^2 x} =$$

$$= \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, δηλαδή:

$$\mathbf{(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \cdot \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως:

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \boldsymbol{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}$$

Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x) = α^x$ ($α > 0$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = α^x \cdot \ln α$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{(α^x)' = α^x \cdot \ln α}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = α^x = e^{x \cdot \ln α}$ και θέσουμε $u = x \cdot \ln α$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως:

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \cdot \ln α} \cdot \ln α = \boldsymbol{α^x \cdot \ln α}$$

13

Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ ($x \in \mathbb{R}^*$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Απόδειξη

Πράγματι:

- Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως:

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα, σε κάθε περίπτωση: $\boldsymbol{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$

Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\mathbf{(f+g)'(x_o) = f\,'(x_o) + g\,'(x_o)}$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_o$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= f\,'(x_o) + g\,'(x_o)$$

δηλαδή:

$$\mathbf{(f+g)'(x_o) = f\,'(x_o) + g\,'(x_o)}$$

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in Δ$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$ τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1) θα είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$ τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$\mathbf{f(x) = g(x) + c}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση f – g είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση f – g θα είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$, να ισχύει $f(x) - g(x) = c$. Οπότε $f(x) = g(x) + c$, δηλαδή το ζητούμενο.

17

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ.

- Αν **f ΄(x) > 0** σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως **αύξουσα** σε όλο το Δ.
- Αν **f ΄(x) < 0** σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως **φθίνουσα** σε όλο το Δ.

Απόδειξη

➲ Αν f ΄(x) > 0, τότε:

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε:

$$\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$$

➲ Αν f ΄(x) < 0, τότε:

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2 - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_1) - f(x_2) < 0$, οπότε:

$$\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$$

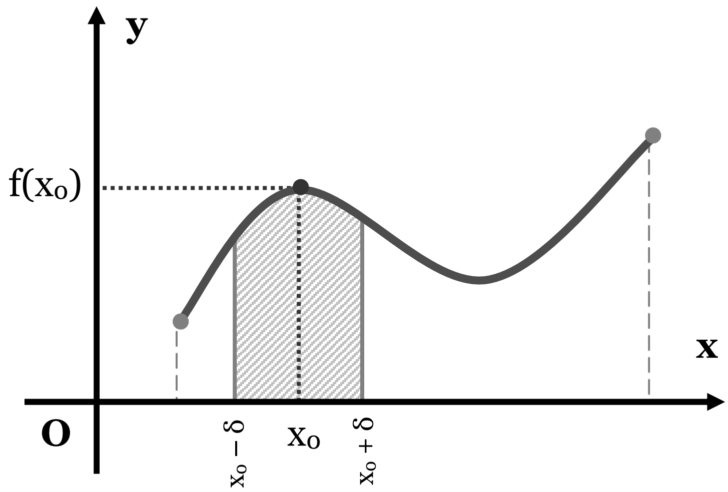
Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$\mathbf{f'(x_0) = 0}$$

Απόδειξη

➲ Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.



Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- Αν $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (2)$$

- Αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $\mathbf{f'(x_0)=0}$.

➲ Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ελάχιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε:

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta \text{ και}$$
$$f(x)\geq f(x_0), \text{ για κάθε } x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Επομένως,

- Αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \qquad (2)$$

- Αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$,

  οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $\mathbf{f'(x_0)=0}$.

19 Παράγωγος και τοπικά ακρότατα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν **f ΄(x) > 0** στο (α, x_o) και **f ΄(x) < 0** στο (x_o, β), τότε το f(x_o) είναι τοπικό μέγιστο της f.
- Αν **f ΄(x) < 0** στο (α, x_o) και **f ΄(x) > 0** στο (x_o, β), τότε το f(x_o) είναι τοπικό ελάχιστο της f.
- Αν η f ΄(x) διατηρεί πρόσημο στο (α, x_o)$\cup$(x_o, β), τότε το f(x_o) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Απόδειξη

➲ Επειδή f ΄(x) > 0 για κάθε x$\in$(α, x_o) και η f είναι συνεχής στο x_o, η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_o]. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_o), \text{ για κάθε } x\in(\alpha, x_o] \qquad (1)$$

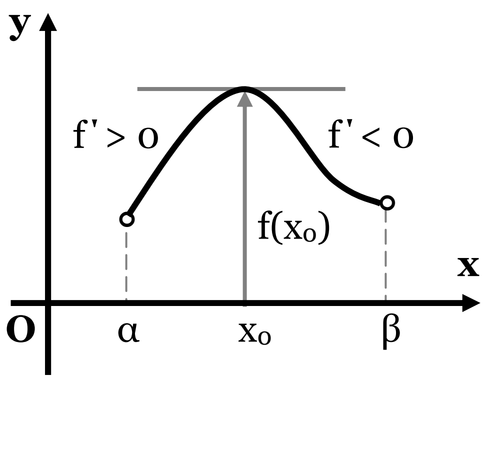
Επειδή f ΄(x) < 0 για κάθε x$\in$(x_o, β) και η f είναι συνεχής στο x_o, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [x_o, β). Έτσι έχουμε:

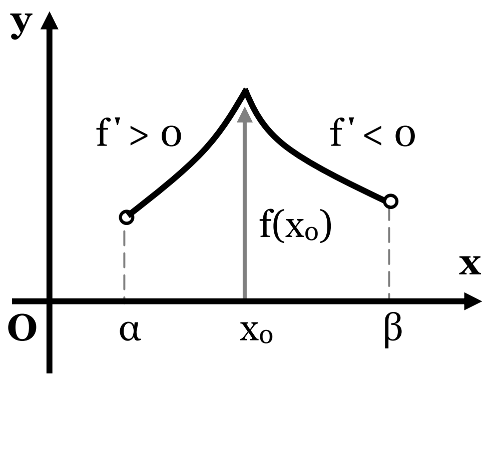
$$f(x) \leq f(x_o), \text{ για κάθε } x\in[x_o, \beta) \qquad (2)$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_o), \text{ για κάθε } x\in(\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το f(x_o) είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.





➲ Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \qquad (3)$$

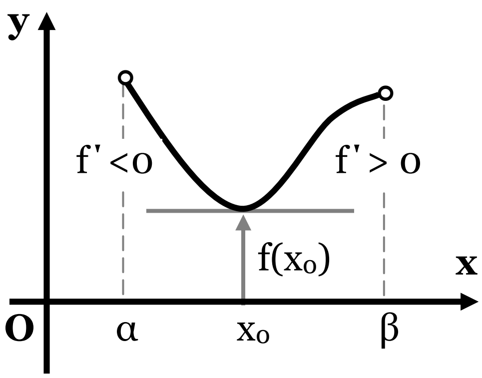
Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

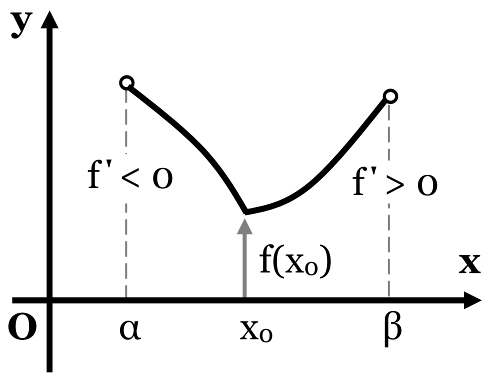
$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \qquad (4)$$

Επομένως, λόγω των (3) και (4), ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό ελάχιστο αυτής.



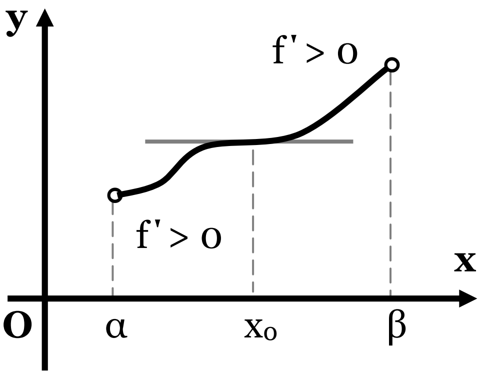


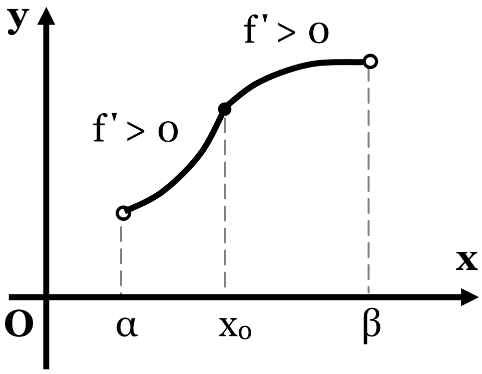
➲ Έστω ότι : $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).





Έστω ότι : $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$\mathbf{G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

➲ Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

➲ Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με προηγούμενο πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{G(\beta) - G(\alpha)}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α, β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε θα υπάρχει $c \in Ρ$ τέτοιο ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), για x = α έχουμε:

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$$

δηλαδή c = G(α). Λόγω της τελευταίας και για x = β, η σχέση (1) γίνεται:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \qquad (2)$$

Λύνοντας τη (2) ως προς το ολοκλήρωμα παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{G(\beta) - G(\alpha)}$$