ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Θέμα 1ο

Αν υπάρχουν $\alpha,\beta \in R$ ώστε οι εξισώσεις: $\left(1+x^2\right)\alpha-\beta=4\left(1-x^2\right)-\dfrac{6x}{1+x^2}$ και $\alpha x^4+\beta\left(1+x^2\right)=2x\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\left(2x^3+3\right)$ να έχουν κοινή λύση τότε να αποδειχθεί ότι η εικόνα του $z=\alpha+\beta i$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κωνική τομή (c) της οποίας να προσδιοριστούν τα στοιχεία.

Θέμα 2ο

Α. Υπολογίστε στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών τις λύσεις z_1 και z_2 της εξίσωσης $z^2-4z+29=0$ και τις λύσεις z_3, z_4 της εξίσωσης $z^2+4z+13=0$. Έστω z_1, z_3 οι λύσεις που έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Να αναπαραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, I που είναι εικόνες των αριθμών z_1, z_2, z_3, z_4, 2.

Β. Υπολογίστε το $\left|z_3-2\right|$. Δείξτε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. Να κατασκευάσετε αυτόν τον κύκλο στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Θέμα 3ο

Θεωρείστε το σύστημα $\begin{cases}\left|z-2\right|=5\\ z-\overline{z}=6i\end{cases}$. Προτείνετε μια γεωμετρική ερμηνεία του συστήματος αυτού και στη συνέχεια λύστε το γραφικά.

Θέμα 4ο

Το επίπεδο έχει εφοδιαστεί με ένα ορθοκανονικό σύστημα $\left(0,\ \vec{u},\ \vec{\upsilon}\right)$. Σε σημείο Μ που έχει εικόνα τον αριθμό $z=x+iy$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχούμε το σημείο Μ΄ που είναι εικόνα του $z'=z^2+2z$.

Α.α. Υπολογίστε τις συντεταγμένες (x',y') του σημείου Μ΄ συναρτήσει των συντεταγμένων (x,y) του σημείου Μ.

β. Δείξτε ότι το σύνολο (Η) των σημείων του επιπέδου, που είναι τέτοια ώστε το z΄ να είναι φανταστικός αριθμός, είναι μια υπερβολή της οποίας και να προσδιορίσετε το κέντρο της, τις κορυφές της και τις ασύμπτωτές της. Να σχεδιάσετε την (Η).

Β. Έστω Ω το σημείο που είναι εικόνα του αριθμού -1. Προσδιορίστε τα σημεία Μ του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΟΜΜ΄Ω να είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 5ο

Α. Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων Ν του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση $(3-2i)z + (3+2i)\bar{z} - 12 = 0$ (1) είναι μια ευθεία (D), την οποία να προσδιορίσετε και να σχεδιάσετε. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός z_0 και μοναδικός φανταστικός z_1 που επαληθεύουν την εξίσωση (1). Υπολογίστε τον z_0 και τον z_1.

Β. Έστω Α και Β τα σημεία που είναι εικόνες των αριθμών $3+5i$, $-3+i$ αντίστοιχα. Αναπαραστήστε τα Α και Β στο προηγούμενο σχήμα. Δείξτε ότι η ευθεία (D) είναι μεσοκάθετος στο τμήμα ΑΒ.

Γ. Ποιο είναι το σύνολο των σημείων Μ του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι εικόνες των αριθμών z που επαληθεύουν την εξίσωση $|3+5i-z| = |-3+i-z|$;

Θέμα 6ο

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $C - \{-4\}$ και τύπο: $f(z) = \dfrac{z-2i}{iz-4}$, όπου C είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

α. Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των σημείων M(z) ώστε να είναι $f(z) \in R$.

β. Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των σημείων M(z) ώστε το μέτρο του $f(z)$ να είναι 2.

Θέμα 7ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to R$ με $f(x) = 2x$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{2συνx - 1}$ και πεδίο ορισμού το ευρύτερο δυνατό.

α. Να βρεθεί ο τύπος και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $h(x) - (gof)(x) = g(f(x))$.

β. Να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών $w(h)$ της παραπάνω συνάρτησης $h(x)$ και να εξηγηθεί γιατί δεν μπορεί να είναι συνάρτηση η αντίστροφη σχέση της h, από το $w(h)$ στο $D(h)$.

Θέμα 8ο

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί, α, β, γ ώστε η συνάρτηση f, που ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + αx + 3}{x-3}, & αν \quad x < 3 \\ \dfrac{βx + γ}{x^2 - 3x}, & αν \quad x > 3 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο 3 (δηλαδή όταν $x \to 3$) και να υπολογιστεί αυτό το όριο.

Θέμα 9ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = (x-1)\text{συν}\dfrac{2\pi}{x^2-1}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

Θέμα 10ο

Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & \text{με } x \le 4 \\ \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x-4}, & \text{με } x > 4 \end{cases}$.

Να οριστεί η τιμή της παραμέτρου $\alpha \in R$ (εφόσον υπάρχει) έτσι ώστε η συνάρτηση που προκύπτει από τον παραπάνω τύπο να είναι συνεχής στο R.

Θέμα 11ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση f συνεχή στη θέση $x = 2$ και τέτοια ώστε να είναι

$\lim\limits_{x\to 2} = \dfrac{(x-2)f(x) + \text{συν}\dfrac{\pi x}{4}}{(x-2)^2} = 3$. Να προσδιοριστεί η τιμή $f(2)$

Θέμα 12ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to R$ παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$. Να προσδιοριστεί το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+3h) - f^2(x+h)}{h}$ (υποτίθεται: $x,\ x+h,\ x+3h \in A$).

Β. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στη θέση $x_0 = 1$

α. Να εκφρασθούν τα $I = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x) - x^2 f(1)}{x-1}$ και $II = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(1)\cdot f(x) - g(x)\cdot f(1)}{x-1}$ συναρτήσει των τιμών των f, g και των παραγώγων αυτών στη θέση $x = 1$.

β. Αν $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$ ενώ $g(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\cdot f(x)$ με πεδίο ορισμού το R^* να καθοριστούν οι τιμές των I και II.

Θέμα 13ο

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στην θέση $x = 1$.

α. Να εκφραστούν τα όρια: $K = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x) - x^2 f(1)}{x-1}$ και $\Lambda = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(1)f(x) - g(x)f(1)}{x-1}$ συναρτήσει των τιμών των f, g και των παραγώγων αυτών στη θέση $x = 1$.

β. Αν $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ με $x \in R$ ενώ $g(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}$ με $x \in R - \{-1\}$, τότε να καθοριστούν οι τιμές των K και Λ για αυτές τις συναρτήσεις f και g.

Θέμα 14ο

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$ με εικόνες Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα επί του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ τότε:

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι: $z + \alpha\beta\overline{z} = \alpha + \beta$.

β. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $z = \dfrac{\overline{\alpha} + \overline{\beta} - \overline{\gamma} - \overline{\delta}}{\overline{\alpha}\overline{\beta} - \overline{\gamma}\overline{\delta}}$ έχει εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο τομής των χορδών ΑΒ και ΓΔ (εφόσον αυτές τέμνονται).

Θέμα 15ο

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$, άρτια και παραγωγίσιμη στο R. Ορίζουμε ακολούθως συνάρτηση g, σύμφωνα με τον τύπο: $g(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right) f(x) + x$. Ν'αποδειχθεί ότι $g'(0) = 1$.

Θέμα 16ο

Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R με: $g(x) > 0$ για κάθε πραγματικό x και $g(0) = e - 1$.
Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = (1 + g(x))^x$ στο σημείο της $M(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα xx΄ γωνία 45^0.

Θέμα 17ο

Να βρεθεί ο α, α>0 ώστε η $y = x$ να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$.

Θέμα 18ο

Δίνονται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - x + 1$ με $x \in R$ και η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^{\alpha x + \beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. Να προσδιοριστούν τέτοιες τιμές των α,β (εφόσον υπάρχουν) ώστε οι γραμμές με εξισώσεις $y = g(x)$ και $y = f^{(4)}(x)$ να έχουν κοινό το σημείο $A(1, g(1))$ και συγχρόνως κοινή εφαπτομένη σ'αυτό.

Θέμα 19ο

Αντλία της πυροσβεστικής αποβάλλει ποσότητα νερού, από πλημμυρισμένο υπόγειο με ρυθμό $N'(t) = \dfrac{t+1}{e^{-t}}$ σε κιλά ανά ώρα, όπου t οι ώρες λειτουργίας της αντλίας.

α. Να βρεθεί η ποσότητα του νερού που βγήκε από το υπόγειο τις 6 τελευταίες ώρες της λειτουργίας της, αν είναι γνωστό ότι αυτή άρχισε να λειτουργεί πριν από 10 ώρες.

β. Αν είναι γνωστό ότι την 5η ώρα της λειτουργίας της αντλήθηκαν $\dfrac{100}{e^6}$ κιλά νερού, πόσα κιλά αντλήθηκαν κατά την 8η ώρα της λειτουργίας της αντλίας.

Θέμα 20ο

Ένα μπαλόνι είναι 39m πάνω από το έδαφος και ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα 1m/sec. Ένα αυτοκίνητο περνά από κάτω από το μπαλόνι και προχωρά κάτα μήκος ενός ίσιου δρόμου με σταθερή ταχύτητα 30m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης αυτοκινήτου - μπαλονιού στο πρώτο δυτερόλεπτο της κίνησης.

Θέμα 21ο

Να λυθεί στο R η εξίσωση: $4^x + 5^x = 3^x + 6^x$.

Θέμα 22ο

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα: **α.** $\int_1^2 e^{x^3+2\ell nx}dx$, **β.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu 2x}dx$.

Θέμα 23ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2x^6 + \beta x^4 + x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ και $3\beta^2 < 5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.

Θέμα 24ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 6] με $f(0) = 2$ και $1 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in (0, 6)$, να αποδείξετε ότι: $8 \le f(6) \le 26$.

Θέμα 25ο

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(e^x) = x - e^x$ για κάθε $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι: $f(x) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$

β. Να δείξετε ότι: $f'(\alpha)(x-\alpha) > f(x) - f(\alpha)$ για $x \in (\alpha, +\infty)$ και $\alpha > 0$

Θέμα 26ο

Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ παραγωγίσιμη στο R με $f(-2) = -4$ και $f(2) = 4$.

Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 1$.

Θέμα 27ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Θέμα 28ο

Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R και τη σταθερή συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x)=e^{-2x}f'(x)+\kappa$ και $f'(x)>0$ όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός.

α. Δείξτε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $f''(x)=2f'(x)$.

β. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x)=\ell nf'(x)-2x+1$ είναι σταθερή στο R.

γ. Να βρεθεί η σταθερή συνάρτηση h εάν η C_f στο σημείο $x_0=0$ έχει εφαπτομένη παράλληλη στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

δ. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f εάν $f(0)=\frac{3}{2}$.

Θέμα 29ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει: $\left|f(x)-f(y)\right|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να δειχτεί ότι η f είναι σταθερή στο R.

Θέμα 30ο

Να προσδιορισθεί η εξίσωση $y=f(x)$ καμπύλης (k) εφόσον αυτή κείται μέσα στην πρώτη γωνία των αξόνων (ορθοκανονικού συστήματος) και εκπληρώνει τους ακόλουθους όρους:

α. Η (k) διέρχεται από το σημείο $P(2,\ 2)$.

β. Η f(x) είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R_+^* με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$.

γ. Αν η εφαπτομένη ευθεία της (k) σ'ένα οποιοδήποτε σημείο της $A(x,\ f(x))$ τέμνει τον άξονα x΄x στο B και τον άξονα y΄y στο M, τότε το M είναι μέσον του AB.

Θέμα 31ο

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού $[0,\ +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $f'(x)=y'(x)+\eta\mu^2x+e^x$ με $x\in[0,\ +\infty)$.

Να δείξετε ότι: $f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$ για $x\in(0,\ +\infty)$

Θέμα 32ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $2xe^{2(x^2-1)}+x-3=0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{x^2-1}$ και ο μιγαδικός $z=(\alpha-3)+f(\alpha)i$ όπου $\alpha\in R$. Να αποδειχθεί ότι $|z|\ge\sqrt{5}$.

Θέμα 33ο

Α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=e^x(x^2+3)+7x-3$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $e^x(x^2+3)-7x^2=e^{x^2}(x^4+3)-7x$ στο R.

Θέμα 34ο

Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει η ανισότητα $\ell n(1-x^2) < x+\frac{1}{2}$.

Θέμα 35ο

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in R$. Αν η f είναι συνεχής στη θέση 1, τότε ν'αποδειχθεί ότι αυτή θα είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R$.

Β. α. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 1$ ισχύει: $\ell n x_2^{x_1} - \ell n x_1^{x_2} < \ell n x_2 - \ell n x_1$.

β. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε $\kappa > 0$ και για κάθε $x_1, x_2 \in R_+^*$ με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει:

$x_2 e^{-\kappa x_1} - x_1 e^{-e\kappa x_2} < x_2 - x_1$.

Θέμα 36ο

Ένα φυτό αναπτύσσεται ως προς το χρόνο έτσι ώστε κάθε χρονική στιγμή το ύψος του να δίνεται από τη συνάρτηση $h(t)=\dfrac{2e^{t-10}}{e^{t-10}+e^{-t+10}}$, $0 \le t \le 20$

α. Να βρεθεί συνάρτηση του χρόνου που δίνει κάθε χρονική στιγμή το ρυθμό με τον οποίο "ψηλώνει" το φυτό.

β. Αν Μ είναι η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής του ύψους του φυτού τότε να υπολογιστεί το Μ και η χρονική στιγμή κατά την οποία αυτή η μέγιστη τιμή λαμβάνεται.

Θέμα 37ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^3+3^x+\ell n(x^3+1)$ και $g(x)=-x+5^{-x}+\ell n(2^{-x})$ με $x \in (-1, +\infty)$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σ'ενα μόνο σημείο.

Θέμα 38ο

Α. Συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σ'ένα διάστημα Δ. Αν η γραφική παράσταση της $y=f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ, τότε ισχύει: $f(x_1)+f(x_2) < 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$.

Β. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta = (0, \pi)$ με $x_1 \neq x_2$ αληθεύει η ανισότητα:

$$\eta\mu x_1 + \eta\mu x_2 < 2\eta\mu\frac{x_1+x_2}{2}$$

Θέμα 39ο

Έστω η f ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Α. Αν η f είναι κοίλη στο Α να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+2003\beta}{2004}\right)\geq\frac{f(\alpha)+2003f(\beta)}{2004} \text{ με } \alpha,\beta\in A.$$

Θέμα 40ο

Εάν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου να αποδείξετε ότι ισχύει πάντα η ανίσωση:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3\geq 27(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

Θέμα 41ο

Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει η σχέση:

$$e^{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta-2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}}<\frac{1+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}$$

Θέμα 42ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Αν η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο R και δεν είναι "1 - 1" τότε να αποδείξετε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Θέμα 43ο

Θεωρείστε τις συναρτήσεις $f(x)=e^{-2x}$ και $g(x)=x^2$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Θέμα 44ο

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε να είναι $f'(x)=\frac{-f(x)}{2x}$ για κάθε $x\in\Delta$.

α. Αν g είναι η συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο: $g(x)=\sqrt{x}\cdot f(x)$ με πεδίο ορισμού Δ, ν' αποδειχθεί ότι η g είναι μια συνάρτηση σταθερή στο Δ.

β. Αν $P(4,1)$ είναι ένα σημείο της γραφικής παράστασης, έστω C_f, της $y=f(x)$, να προσδιορισθεί ο τύπος της f και να μελετηθεί αυτή ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Να καθορισθούν επίσης όσες ασύμπτωτες διαθέτει η C_f.

Θέμα 45ο

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\frac{2x^2+x-13}{x^2-x-2}$.

α. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού A της f.

β. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in A$ έχουμε: $f(x) = 2 - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1}$ και να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f.

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα αφού πρώτα βρεθεί το πεδίο παραγωγισιμότητας της f. Να γίνει η γραφική παράσταση (c) της f με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα.

δ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (c) στο σημείο όπου η ευθεία $y = 2$ τέμνει την καμπύλη (c).

Θέμα 46ο

Να υπολογιστούν τα $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ και $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, θέτοντας $\sqrt{1+x^2} = t - x$ και $\sqrt{x^2-1} = t - x$ αντίστοιχα.

Θέμα 47ο

Να εξετάσετε αν υπάρχουν συναρτήσεις $f:[0, 1] \to R_+^*$ για τις οποίες έχουμε συγχρόνως:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \text{ και } \int_0^1 xf(x)dx = \alpha \text{ και } \int_0^1 x^2 f(x)dx = \alpha^2, \text{ όπου } \alpha > 1.$$

Θέμα 48ο

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι: $f(x) + f(\alpha+\beta-x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, όπου c σταθερός αριθμός.

Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$

Θέμα 49ο

Να δείξετε ότι: **α.** για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει: $2xe^x + e^x > 1$

β. $\int_1^{2002} e^x(2x+1)dx > 2002$

Θέμα 50ο

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R. Αν η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$ το 1 και στο $x = 1$ το 0 να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f''(x) - f(x)}{e^{-x}}dt = -1$.

Θέμα 51ο

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση

$$f: R \to R \text{ για την οποία ισχύει } \int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x,\ x \in R$$

Θέμα 52ο

Οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R και ισχύουν: $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$. Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta (f(x)g''(x)dx - f''(x)g(x))dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta))$.

Θέμα 53ο

Θεωρούμε συνάρτηση f που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, e]$ με $f(0) = 0$.

α. Να δείξετε ότι: $\int_0^e xf''(x)dx = ef'(e) - f(e)$

β. Να δείξετε ότι ύπαρχει $\xi \in (0, e)$ τέτοιο ώστε: $\int_0^e xf''(x)dx = e[f'(e) - f(\xi)]$

Θέμα 54ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g στο R οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = f(x)$ και $f^2(0) - g^2(0) = 2003$.

Να δείξετε ότι: $\int_0^{2003} (f^2(x) - g^2(x))dx = 2003^2$.

Θέμα 55ο

Έστω $I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{t^2+1}dt$, $\nu \in N$: **α.** Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + I_{\nu+1}$, $\nu \in N$.

β. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

Θέμα 56ο

Αν f συνεχής συνάρτηση στο R να δείξετε ότι:

α. $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ **β.** $\frac{1}{\gamma}\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\gamma \neq 0$.

Θέμα 57ο

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1}}^{\frac{1}{2}} e^{x^2+x+1}(2x+1)dx$

Θέμα 58ο

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $\int_1^{e^2} f(x)\ell nx dx = f(x)+x$, για κάθε $x\in R$.

Θέμα 59ο

Έστω η συνάρτηση h με $h(x)=x^2e^{-x}$ και $K=\int_0^1 h(x)dx$. Δείξτε ότι $K=2-\frac{5}{e}$.

Θέμα 60ο

Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\frac{1}{1+x^2e^{-x}}$. Θέτουμε $I=\int_0^1 f(x)dx$. (Δεν ζητείται ο υπολογισμός του I)

α. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ είναι: $0\le x^2e^{-x}\le 1$.

Να επαληθεύσετε ότι για κάθε $\kappa\in[0,1]$ είναι: $1-\kappa\le\frac{1}{1+\kappa}\le 1-\frac{\kappa}{2}$.

β. Δείξτε ότι $1-\kappa\le I\le 1-\frac{\kappa}{2}$.

Θέμα 61ο

Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\frac{3x^3-5x^2+2x-1}{x^2-4x+4}$.

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f. Δείξτε ότι υπάρχουν τέσσερεις πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ τέτοιοι ώστε για κάθε $x\in A_f$ να είναι: $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-2}+\frac{\delta}{(x-2)^2}$.

β. Βρείτε μια παράγουσα της f στο $(-\infty,2)$ και υπολογίστε το $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Θέμα 62ο

Έστω η συνάρτηση f που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\ell n\frac{5-x}{2x}$.

Α. Δείξτε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[1,4]$.

Β. α. Υπολογίστε την παράγωγο f' της f.

β. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 \ell n\frac{5-x}{2x}dx$ (κάνετε χρήση της παραγοντικής μεθόδου).

Θέμα 63°

Δίνονται οι συναρτήσεις f και φ με τύπους: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}}$, $x\in(\alpha,\beta)$ και $\varphi(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\eta\mu^2x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Να ορισθεί η σύνθετη συνάρτηση $f(\varphi(x))$ και να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Θέμα 64°

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και φ με τύπους:

$$f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}\quad \mu\varepsilon\quad x\in[1,3]\quad \kappa\alpha\iota\quad \varphi(x)=3\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\quad \mu\varepsilon\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Να ορισθεί η σύνθετη συνάρτηση $f(\varphi(x))$ και να αποδειχθεί ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\pi$.

Θέμα 65°

Α. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}x\sigma\upsilon\nu x dx$

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2+x$.

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση, έστω (κ), της θεωρούμενης συνάρτησης για το διάστημα $(-2,1)$.

β. Αφού διαπιστώσετε ότι η (κ) έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα x΄x να αποδείξετε στην συνέχεια ότι οι εφαπτόμενές της σ' αυτά τα σημεία είναι αντίστοιχως παράλληλες προς τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

γ. Αν (ε) είναι εκείνη η εφαπτομένη, από τις δύο παραπάνω, που είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο της $x\hat{o}y$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από την (κ) και από τις ευθείες (ε) και $x=1$.

Θέμα 66°

Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\dfrac{1}{\beta-\xi}\displaystyle\int_\alpha^\xi f(t)dt$.

Θέμα 67°

Α. Ν' αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_\alpha^\beta xf''(x)dx=\left[xf(x)\right]_\alpha^\beta$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{2x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3x}dx$

Θέμα 68ο

Να αποδειχθεί ότι:

α. $x \geq ημx\dfrac{2x}{π}$ για κάθε x με $0 \leq x \leq \dfrac{π}{2}$, **β.** $e-1 \geq \int_0^2 e^{ημx}dx \geq \dfrac{π}{2}(e-1)$

γ. Η εξίσωση $\ell nx + x = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Θέμα 69ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-νx}$, $x \in R$, $ν \in N^*$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, να βρείτε τα ακρότατα της και τα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι: $2 \leq e^2 \cdot ν^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{ν}} xe^{-νx}dx \leq e$.

Θέμα 70ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2(2\ell nx - 3) - x(\ell nx - 2)$, $x > 0$.

α. Να μελετηθεί η F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $F(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\ell nx$ και $g(x) = \dfrac{3x^2}{4} + 2x$.

Να αποδειχθεί ότι $\int_{g(x)}^{f(x)} \dfrac{1}{t^{1996}+1}dt > 0$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα 71ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 + 2e^{-x}}{3x^2 + 4e^{-x}}$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x-1}^{x} f(t)dt$.

Θέμα 72ο

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ με $f(α) > 0$ και $\int_α^β f(x)dx < 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$, τέτοιο ώστε $f(ξ) = 0$.

Θέμα 73ο

Ποια είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης $f(\alpha)=\int_1^\alpha \frac{1}{x(x+1)}dx$ στο $+\infty$; Δηλαδή ζητάμε το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} f(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_1^\alpha \frac{dx}{x(x+1)}$.

Θέμα 74ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\int_\pi^x (t^{1999}+t^{2001}+t^{2003}+t)dt$. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 75ο

Αν για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x}F(x)<F'(x)$.

Θέμα 76ο

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$$\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x),\ x,\alpha\in R.$$

Θέμα 77ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\int_3^x \frac{2t-10}{1-\eta\mu^2 t}dt$.

Να εξετάσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατά της.

Θέμα 78ο

Δίνεται $z\in C$. Αν $|z-1|\le 1$ και $|z-2|\le 1$, να δείξετε ότι $1\le|z|\le 2$.

Θέμα 79ο

Αν $z_1,z_2,\omega_1,\omega_2\in C$ να δείξετε ότι $|z_1\cdot\omega_1+z_2\cdot\omega_2|^2\le\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\left(|\omega_1|^2+|\omega_2|^2\right)$.

Θέμα 80ο

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 διαφορετικοί από το μηδέν με $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $\alpha=\frac{z_2}{z_1}$ και $\beta=\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικοί.

Θέμα 81ο

Α. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z οι οποίοι έχουν την ίδια ιδιότητα "ο λόγος των αποστάσεων των εικόνων τους από τις εικόνες των μιγαδικών $z_1=-3$ και $z_2=3$ είναι σταθερός και ίσος με $\frac{1}{2}$".

Β. Αν για τους μιγαδικούς ω_1, ω_2 ισχύει: $\left|\frac{\omega_1+3}{\omega_1-3}\right|=\left|\frac{\omega_2+3}{\omega_2-3}\right|=\frac{1}{2}$, να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|\omega_1-\omega_2|$.

Θέμα 82ο

Έστω $z\in C$ με $|z|=\frac{1}{2}$. Αν $\omega=z-\frac{1}{z}$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες του ω κινούνται σε μια έλλειψη.

Θέμα 83ο

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt$, $x\in R$, α, β,$\in R$ είναι παραγωγίσιμη και ότι αν $x_0\in R$ με $F'(x_0)=0$ τότε $F(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Θέμα 84ο

Να βρείτε συνάρτηση $f:R\to R$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2f(t)dt+\frac{1}{8}x^{16}+\frac{1}{9}x^{19}+\gamma$ για κάθε $x\in R$ και $\gamma\in R$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε την σταθερά $\gamma\in R$.

Θέμα 85ο

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[0,1]$ και τέτοια ώστε να ισχύει: $0<f(t)<1$ για κάθε $t\in[0,1]$.

Θεωρούμε επίσης και την συνάρτηση: $g(x)=2x-\int_0^u f(t)dt-1$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 86ο

Αν $f(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$, τότε ν'αποδειχθεί ότι:

α. $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x>0$.

β. $\int_1^x e^{t^2}dt\le\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-e\right)$ (2), για κάθε $x\in R$.

Θέμα 87ο

Α. Να δείξετε ότι: **α.** Για κάθε $x \in (0, \ +\infty)$ ισχύει $x^x \geq e^{x-1}$

β. Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $\left(x^2+1\right)^{x^2+1} \geq e^{x^2}$

Β. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο [0, 3] για την οποία ισχύει: $\int_2^x f(t)dt \geq x^3 - συνπx - 7$ για κάθε $x \in [0, \ 3]$. Να αποδειχθεί ότι $f(2)=12$

Θέμα 88ο

Α. Αν $f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{e^t}dt$ να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

Β. Να προσδιορίσετε συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt = ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $α \in [0, \ π]$ και τις τιμές που παίρνει το α.

Θέμα 89ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο: $f(x)=\int_1^x \frac{12}{2+1^2}dt$.

Ν'αποδείξετε ότι: $2 < f(2)-f(1) < 4$.

Θέμα 90ο

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα και θετική τότε ν'αποδειχθεί ότι ισχύει:

α. $f(x+1)-f(x) < f'(x) < f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x \geq 1$ και

β. Ν'αποδειχθεί οτι: $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} = 0$

Θέμα 91ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to R$ με $f(x)=\int_1^{2x^2+3x} \sqrt{t+1}dt$

α. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $(1, \ f(1))$

β. Να βρείτε το $λ \in R$ ώστε η ευθεία $\sqrt{2}\left(λ^2 - \frac{6}{7}\right)x = 1\text{-}3y$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη που βρήκατε.

Θέμα 92ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 6}{x^2 + 1}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον x΄x και τις ευθείες $x = 0, x = 1$.

Θέμα 93ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής Α, Β των C_f, C_g

β. Μια ευθεία $x = \alpha$ με $\alpha \in \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g στα Γ, Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί το α ώστε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΓΔ, όπου Α το σημείο τομής των C_f, C_g με τετμημένη 0, να είναι μέγιστο.

Θέμα 94ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

$f''(x) = e^x + g''(x)$ για κάθε $x \in R$

$f(0) = g(0)$ $\qquad$ $f'(0) + e = g'(0) + 1$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και από τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Θέμα 95ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -xe^x - 2$ και $g(x) = -2x + x^2$.

α. Να εξετάσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και από τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Θέμα 96ο

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 3}$, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

Θέμα 97ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{(\lambda x + 1)e^x}{1 - x^2}$, $\lambda \in R$ για την οποία ισχύει $3f'(0) - f(0) = 11$.

Να βρείτε τι εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g με $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

Θέμα 98ο

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει: $e^x \geq x+1$.

Β. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$, $\alpha > 0$ να δείξετε ότι $\alpha = e$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x(x^2+2)$ και $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.

Θέμα 99ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{αν } x < 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράστασητης f, την ευθεία $x = 2$ και τον άξονα $x'x$.

Θέμα 100ο

Θεωρείστε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

α. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο R και να βρείτε ποια είναι αυτή η ρίζα.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$ $(\alpha > 0)$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$. Τι τιμή παίρνει το εμβαδόν αυτό όταν $\alpha \to +\infty$;

Θέμα 101ο

Α. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^e \ell nx dx$

Β. α. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^x$

β. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από την καμπύλη $y = f(x)$ τον άξονα των τετμημένων και της ευθείες $x = -2$ και $x = 1$.

Θέμα 102ο

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β έτσι ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + 4}{x^2 - 1}, & \text{αν} \quad x < 1 \\ \dfrac{\beta x^2 + \gamma x + 3}{x-1}, & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό όταν $x \to 1$

Θέμα 103ο

Α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:\Delta=(0,1)\to R$ με $f(x)=x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}$ όπου $\kappa,\lambda\in Q$ και $\kappa>\lambda>0$. Ν'αποδείξετε ότι κάθε f παρουσιάζει στο Δ ένα και μόνον ένα τοπικό ακρότατο, καθορίζοντας συγχρόνως το είδος του.

Β. Αν $g(x)=x^3(1-x)^2$ με $x\in[0,1]$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τη γραφική της $y=g(x)$ και τον ημιάξονα οx.

Θέμα 104ο

Α. Να βρεθεί η συνάρτηση g για την οποία ισχύουν: $g'(x)=x^2e^x+\dfrac{2g(x)}{x}$ (1) για κάθε $x\in R^*$, $g(0)=0$ και $g(1)=e$.

Β. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής, τα κοίλα και να βρεθούν όλες οι ασύμπτωτες που διαθέτει.

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τη γραφική πράσταση (c) της g, του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$, όπου $\lambda<0$. Τέλος να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)$.

Θέμα 105ο

Θεωρούμε την συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο: $g_\alpha(x)=(x^2-2\alpha x)e^{|x-\alpha|}$ όπου α είναι μια πραγματική παράμετρος.

Α. Έστω $\alpha=0$.

α. Δείξτε ότι η g_0 είναι άρτια.

β. Δείξτε ότι η g_0 είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ. Μελετήστε την g_0 ως προς την μονοτονία και κατασκευάστε την γραφική της παράσταση ως προς ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(0,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Β. Έστω $\alpha\neq 0$.

α.i. Αν (C_α) η γραφική παράσταση της g_α ως προς το $(0,\ \vec{i},\ \vec{j})$, δείξτε ότι η ευθεία $x=\alpha$ είναι άξονας συμμετρίας της (C_α).

ii. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(\alpha)}{x-\alpha}=-\alpha^2$. (Υποθέστε γνωστό το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$)

iii. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^-}\dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(\alpha)}{x-\alpha}=\alpha^2$.

iv. Είναι η g_α παραγωγίσιμη στο $x=\alpha$ για $\alpha\neq 0$;

β. i. Υπολογίστε την $g_\alpha'(x)$ στο $(\alpha,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η g_α' μηδενίζεται για μια μόνο τιμή στο $(\alpha,+\infty)$.

ii. Υπολογίστε την $g_\alpha''(x)$ στο $(\alpha,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η g_α'' μηδενίζεται στο $(\alpha,+\infty)$ αν και μόνον αν $\alpha^2>2$.

iii. Κατασκευάστε τον πίνακα μεταβολών της g_α στο $(\alpha,+\infty)$ και στο $(-\infty,\alpha]$.

Γ. Έστω $\alpha=1$.

α. Μελετήστε την g_1 ως προς την μονοτονία στο $[1,+\infty)$.

β. Προσδιορίστε τα σημεία τομής της (C_1) με τους άξονες.

γ. Κατασκευάστε την (C_1) ως προς το σύστημα $(0,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση G που ορίζεται στο $[1,+\infty)$ και έχει τύπο: $G(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{x-1}$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

α. Προσδιορίστε τα α, β, γ έτσι ώστε η G να ταυτίζεται με την πρώτη παράγωγο της g_1 στο $[1,+\infty)$.

β. Υπολογίστε το εμβαδόν της περιοχής του επιπέδου που ορίζεται από την (C_1) και τον άξονα των τετμημένων.

Θέμα 106ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x^2-x-2}$ με πεδίο ορισμού το $(2,\ +\infty)$.

α. Αφού παρατηρήσετε ότι οι ευθείες x = 2 και y = 1 είναι ασύμπτωτες της $y=f(x)$ και μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να υπολογιστεί το $\int_3^4 f(x)dx$

β. Να προσδιορίσετε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τις γραφικές παραστάσεις των $y=f(x)$ και $y=\frac{1}{2}x^2-8$ και από τις ευθειες $x=3$ και $x=4$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} f(t)dt=2$

Θέμα 107ο

Η καμπύλη (c) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x στο διάστημα [α, β]. Αν η επιφάνεια που ορίζεται από την καμπύλη (c), τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β έχει εμβαδόν: $E=\dfrac{\alpha+1}{e^\alpha}-\dfrac{\beta+1}{e^\beta}$ τότε:

α. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης (c): $y=f(x)$ και

β. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_\beta^0 f(x)dx$

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 12

16. Έστω η συνάρτηση $f(x)\begin{cases}\alpha x^2+3x+6 & x<0\\ 2x^2+\beta x+3\gamma & x\geq 0\end{cases}$. Να βρεθούν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θ. Rolle στο διάστημα [-2,2]

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha-1}{4}x^3+\frac{\beta-2\gamma}{3}x^2+\frac{2\gamma}{3}x+\mu, \mu,\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 1$. Αν ισχύει $3\alpha+4\beta=3$ να δείξεται ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (Α(ξ,ξ(1)) να είναι παράλληλη στον x΄x.

18. Να δικαιολογήσετε ότι ένα πολυώνυμο p(x) με πραγματικούς συντελεστές έχει υ διακεκριμένες ρίζες, τότε η εξίσωση $p΄(x)=0$ έχει υ - 1 ρίζες.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x(x-2003)\cdot(x-2004)\cdot(x-2005)$ να δειχτεί ότι η $f΄(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς παραγματικές ρίζες.

(**Υπ.:** Ισχύει Rolle στα [0,2003], [2003, 2004] [2004, 2005]. Άρα η f΄(x) έχει τουλάχιστον ρίζα στο καθένα από αυτά και είναι 3^{ου} βαθμού)

20. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) και $\frac{\beta f(\alpha)}{\alpha}=f(\beta)\ (\alpha>0)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $f΄(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$.

(**Υπ.:** $f΄(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}\Leftrightarrow \xi\cdot f΄(\xi)-f(3)=0\Leftrightarrow ...\left(\frac{f(\xi)}{\xi}\right)=0$. Εφαρμόστε Rolle για την $g(x)=\frac{f(x)}{x}$).

21. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi(\alpha,\beta)$ ώστε $f΄(\xi)+f(\xi)=0$.

(**Υπ.:** $f΄(\xi)+f(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}\cdot f΄(\xi)+e^{\xi}\cdot f(\xi)=0\Leftrightarrow\left(e^{\xi}\cdot f(\xi)\right)΄=0$.

Εφαρμόστε Rolle για την $g(x)=e^x\cdot f(x)$

22. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

(**Υπ.:** $2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0\Leftrightarrow\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\varepsilon\varphi x=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2(\varepsilon\varphi x)΄=0$

$\Leftrightarrow \left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \varepsilon\varphi x\right)' = 0$. Εφαρμόζουμε Rolle για την $g(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \varepsilon\varphi x$)

23. Αν f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο R με $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=f(0)$, $f(1)=3$, $g(1)=2$ να δείξετε ότι $f(x)=g(x)+x$.

(**Υπ.:** $f''(x)=g''(x)$ άρα $f'(x)=g'(x)+c_1$ οπότε $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$ κ.λ.π.)

24. Δίνεται $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

α. $\eta\mu x + xf'(\ell nx) = x\sigma\upsilon\nu x,\ x>1$ **β.** $\eta\mu x + xf'(\ell nx) = x\sigma\upsilon\nu x,\ x>1$

Να βρεθεί f(e).

(**Υπ.:** $\eta\mu x + xf'(\ell nx) = x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{f'(\ell nx)}{x} = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} \Leftrightarrow (f(\ell nx))' = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'$ άρα

$f(\ell nx) = \frac{\eta\mu x}{x} + c$ κ.λ.π.

25. Δείξτε ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν το πολύ μια ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα

α. $2x^3-3x^2-36x+5=0$ στο $(0,1)$ **β.** $x^3-\alpha x^2+3\alpha^2x-1$ στο R, $\mu\in R$

(**Υπ.: α.** Έστω ότι έχει 2 ρίζες x_1, x_2 οπότε σε άτοπο με Rolle, **β.** όμοια).

26. Να δείξετε ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν το πολύ δύο ρίζες στα αντίστοιχα διαστήματα

α. $x^4+2x^3+4x^2+\alpha x+\beta$ στο R, $\alpha,\beta\in R$ **β.** $x^{2v}+\alpha x+\beta$ στο R, $\alpha,\beta\in R$

(**Υπ.: α.** Έστω ότι έχει τρεις ρίζες x_1, x_2, x_3 οπότε με Rolle σε άτοπο, **β.** όμοια με α.

27. Δίνεται η $f:(1,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη ώστε $2f(x)=-xf'(x)\ell nx$ για $x>1$. Αν $f(e)=e$ να βρεθεί το τύπος της f.

(**Υπ.:** $2f(x)=-xf'(x)\ell nx \Leftrightarrow 2\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ell nx=0 \Leftrightarrow 2(\ell nx)'f(x)+f'(x)\ell nx=0$

$\Leftrightarrow (\ell n^2x)f(x)+f'(x)\ell n^2x=0 \Leftrightarrow (\ell n^2x\cdot f(x))'=0$ οπότε $\ell n^2xf(x)=c$ κ.λ.π.).

28. Να βρεθεί η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(x)=2x\cdot e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in R$ και $f(e)=2$.

(**Υπ.:** $f'(x)=2xe^{-f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{-f(x)}}=2x \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}=2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'$ άρα $e^{f(x)}=x^2+c$ κ.λ.π.)

29. Έστω η f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι:

α. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την συνάρτηση $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)f(x)$

β. Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{1}{\alpha-\xi}\cdot\dfrac{1}{\beta-\xi}$ (1).

(**Υπ.: β.** Η (1) γράφεται: $f'(\xi)(\alpha-\xi)+(\xi-\alpha)f(\xi)+(\xi-\beta)f(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)=0$ όπου ισχύει από **α.**)

30. Έστω η f παραγωγίσιμη στο R με $g(x)=(x^2-1)f(x)$. Να δείξετε ότι $f\xi \in (-1,1)$ με $f'(\xi)=\dfrac{2\xi}{1-\xi^2}\cdot f(3)$

(**Υπ.:** Όμοια με προηγούμενη)

31. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(x)+xf'(x)=4x^3+2x$ για κάθε $x \in R$ και $f(1)=2$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

(**Υπ.:** $f(x')+xf'(x)=4x^3+2x \Leftrightarrow (f(x)\cdot x)'=(x^4+x^2)'$ άρα $f(x)\cdot xf(x)=x^4+x^2+c \Leftrightarrow f(x)=...$

32. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-4$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα: $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$).

33. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη σστο [-1, 1] με $f(-1)=1$ και $f(1)=3$. Να δειχθεί ότι:

i. Υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2-\xi$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

(**Υπ.: i.** Εφαρμόστε Bolzano για την $g(x)=f(x)-2+x$ οπότε $\exists \xi \in (-1,1)$ ώστε $f(3)=2-\xi$
ii. Εφαρμόστε Θ.Μ.Τ. στα [–1,1] και [ξ, 1]).

34. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta): f''(\xi)=0$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Μ.Τ. στα $\left[\alpha\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$. Προσέξτε ότι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ οπότε εφαρμόστε Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$).

35. Να δείξεται ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα.

α. $x^5+\alpha x+\beta=0$ στο R α, β, γ > 0 **β.** $x^2+2\ell nx=2$ στο (1, 2)

γ. $x^5-3x+1=0$ στο (1, 2) **δ.** $2e^x+2x=x^2+2$ στο R

(**Υπ.: α.** Το σύνολο τιμών είναι $(-\infty,+\infty)$ και περιέχει το 0. Ακόμα $f\uparrow$, **β.** Με θ. Bolzano 1 τουλάχιστον και μετά έστω 2 και με Rolle άτοπο, **γ.** θ. Bolzano 1 τουλάχιστον και μετά $f\uparrow$ στο [1, 2], δ. προφανής λύση η $x=0$ και $f\uparrow$).

36. Αν για την συνάρτηση f ισχύει το θ. Rolle στο [0, 4]. Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (0,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)+f'(\xi_4)=0$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε θ. Μ.Τ. στα [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]).

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot ημx$ με την βοήθεια του θ. Μ.Τ. Να δείξετε ότι $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 11|x_1-x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [0,10]$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$ λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $f'(x)=ημ+xσυνx$ και $|f'(x)|\leq 1+|x|\leq 1+10=11$).

38. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $\ell n(e^x+2)+e^{f(x)}=3\cdot e^x+4x$. Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

(**Υπ.:** Υποθέστε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Από θ. Rolle $\exists \xi\in(x_1,x_2): f'(\xi)=0$. Παραγωγίστε την δοθείσα $\exists \xi\in(x_1,x_2): f'(\xi)=0$ δείξτε ότι το πιο πάνω είναι άτοπο).

39. Η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο [0, α] με $|f''(x)|\leq m$ για κάθε $x\in(0,α)$. Αν υπάρχει $γ\in(0,α)$ τέτοιο ώστε $f(γ)=0$, να δείξετε ότι $|f'(0)|+f'(α)\leq α\cdot m$

(**Υπ.:** Εφαρμόστε θ.Μ.Τ. για την f΄(x) στα [0, γ] και [γ, α]).

40. Να αποδείξετε με την βοήθεια του θ.Μ.Τ. της ανισώτητες:

i. $ημ\dfrac{3π}{5}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{13π}{30}$

ii. $ex<\left(\dfrac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}<e\cdot y,\ 0<x<y$

iii. $\dfrac{1}{x+1}<\ell n\left(\dfrac{x+1}{x}\right)<\dfrac{1}{x},\ x>0$

iv. $x<e^x<x\cdot e^x,\ \ x>0$