ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Θ. ROLLE & Θ.Μ.Τ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-2009 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

1. Αν f(x) = $\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & , \ x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x & , \ x\geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν τα α, β, γ $\in \mathbb{R}$, ώστε να εμφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[-1, 1]$ και να βρεθεί $\xi \in (-1, 1)$, ώστε $f'(\xi) = 0$.

2. Έστω η παραγωγίσιμη $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, ώστε $f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\xi)\cdot f'(\xi) = \xi$.

3. Δίνεται ότι η f συνεχής στο [α, β] , α > 0 και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\xi\cdot f'(\xi) = f(\xi)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$3\xi^2 \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^3-\alpha^3} = f'(\xi)$$

5. Να αποδείξετε ότι η κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει το πλήθος των ριζών, που περιγράφεται:

α. Η $x^8 = 7x + 6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β. Η $e^x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μέχρι τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Η $x^7 + \alpha x^2 + \lambda = 0$ έχει το πολύ τρεις (ανά δύο άνισες) πραγματικές ρίζες.

6. Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

α. $x^5 + 3x - \alpha = 0$

β. $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, με $\beta^2 < \alpha\gamma$, $\alpha \neq 0$.

7. Αν $f(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4) + 1$, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln(1 + xe^{x}) = x$ **β.** $2^{x} + 5^{x} = 2 + 5x$

9. **α.** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $g'(x) = < 0$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^{x} + 2x$ και $g(x) = e^{-x} - x^{3}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, που βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

10. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^{x} \cdot ημx = 1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^{x} \cdot συνx = -1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

11. Αν f συνεχής στο [1, 5] με $f(1) = -2$ και $|f'(x)| < 2$, $\forall\, x \in (1, 5)$, να δείξετε ότι $-10 < f(5) < 6$.

12. Δίνεται η $f(x) = \log x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 20)$, ώστε: $\xi = \dfrac{19 \cdot \log e}{1 + \log 2}$.

13. Η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $α \in \mathbb{R}$, ώστε $f(0) = 3α - 1$, $f(1) = 5α - 1$ και $f(2) = 7α - 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

14. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f , να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, με $f''(\xi) = 0$.

15. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [1, 4] και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(4x) = 4f(x)$ και $f(25/100) = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 4)$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 12$.

16. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α. $x \cdot e^{\frac{1}{x+1}} < x + 1 < x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x > 0$

β. $2 - \dfrac{e}{\pi} < \ln \pi < \dfrac{\pi}{e}$

γ. $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$, αν $x > 0$

δ. $x \le e^{x-1} \le 1 + (x-1)e$, αν $x \in (1, 2)$

17. Η απόσταση δύο πόλεων, που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 km. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 km/h .

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE & ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

18. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f(2) - f(1) = f(3) - f(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f' στο x_0 να είναι παράλληλη στον $x'x$.

19. Η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί f(2), f(4), f(6) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 6)$, ώστε $f''(x_0) = 0$.

20. Η ευθεία (ε): $y = \lambda x + \mu$ τέμνει τη γραφική παράσταση της $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f''(x_0) = 0$.

21. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι:

$$f(1) = f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in (0, 1)$, ώστε $f'''(x) = 0$.

22. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\dfrac{f(2000)}{f(1999)} = e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1999, 2000) .

23. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f(1999) + f(2002) < f(2000) + f(2001)$$

24. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν ότι είναι συνεχής στο [1, e] , παραγωγίσιμη στο (1, e) και $f(e) - f(1) = 1$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x \cdot f'(x) = 1$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1, e) .

25. Δίνονται οι α, β, γ $\in\mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση:

$$\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x + \beta\cdot\sigma\upsilon\nu 2x + \gamma\cdot\sigma\upsilon\nu 3x = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

26. Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f'(x_0) = f(x_0)\cdot f''(x_0)$.

27. Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in(\alpha, \beta)$ με $\xi_1 < \xi_2$ και $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

β. υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2 \in(\alpha, \beta)$ με $\kappa_1 <\kappa_2$, ώστε $3f'(\kappa_1) + 2f'(\kappa_2) = 0$.

γ. ότι η εξίσωση $f'(x) = f(x) - f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

28. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in(\alpha, \beta)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = 4$.

30. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha) = f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha < \ln\gamma < \ln\beta$, με $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} = e^2$, να δειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in\mathbb{R}$ με $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

31. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν:

α. $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.

β. $-1 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$, ώστε $\frac{1}{f'(\kappa_1)} + \frac{1}{f'(\kappa_2)} = 2$.

32. Η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β), με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. αν υπάρχει $x_0 \in(\alpha, \beta)$ με $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.

β. αν υπάρχει $x_0 \in(\alpha, \beta)$ με $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) > 0$.

33. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \alpha]$ και για κάθε $x\in[0, \alpha]$, ισχύει $f(x^2) = 2xf(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in(0, \alpha)$, ώστε:

$$f'(\xi 1) + f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha)}{2x\left(\sqrt{\alpha}-1\right)}$$

Δίνεται ότι $\alpha > 1$ και $f(0) = 0$.

34. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\beta) < 0$ και $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) < 0$.

35. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^6 + \beta x^4 + x^2 + \gamma + \delta$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in\mathbb{R}^*)$ με $3\beta^2 < 5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία, που να ανήκουν στη γραφική παράστασή της.

36. Αν $f(x)=\dfrac{2^x-2^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$, $x\in(0, \pi)$ τότε:

α. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(\eta\mu x, x)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) = 2^{\xi}\cdot \ln 2$.

β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$.

37. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(2\xi, 0)$.

38. Η συνάρτηση $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1) = 2$ και $f(4) = 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτόμενη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

39. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $[2, 20]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν:

α. x_1, x_2, x_3 με $2 < x_1 < x_2 < x_3 < 20$, ώστε:

$$f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 0$$

β. ξ_1, ξ_2, ξ_3 με $2 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < 20$, ώστε:

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

40. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$f\,'(x) = f(x)\cdot\ln g(x) \quad \text{και} \quad g'(x) = -g(x)\cdot\ln f(x)$$

α. Να αποδειχτεί ότι είναι σταθερή η συνάρτηση:

$$G(x) = (\ln f(x) - \text{ημ}x)^2 + (\ln g(x) - \text{συν}x)^2\,,\ x\in\mathbb{R}$$

β. Αν $f(0) = 1$, $g(0) = e$ να βρεθούν οι f, g.

41. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε:

$$f\,'''(x) + 2f\,'(x) = f\,''(x) + 2f(x)\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και: $f(0) = f\,'(0) = f\,''(0) = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η $g(x) = [f\,''(x) - f\,'(x)]^2 + 2[f\,'(x) - f(x)]^2$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

β. Η $h(x) = f(x)\cdot e^{-x}$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

γ. Να βρεθεί ο τύπος της f.

42. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$|f(x) - f(y)| + \text{συν}(x - y) \le 1\,,\ \text{για κάθε } x, y \in\mathbb{R}\,.$$

Να αποδειχτεί ότι η f είναι σταθερή.

43. Να βρείτε συνάρτηση f σε κάθε μία, από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν $f\,'(x) = \text{ημ}x + x\cdot\text{συν}x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(\pi/2) = 2\cdot f(0)$.

β. Αν $f\,'(1 - 2x) = 7 - 12x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(1) = 2$.

γ. Αν $f\,'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$ και $f(-1) = f(1) = 2$.

δ. Αν $f\,''(x) = 4x^{-2x} + 6x + 2$, $x\in\mathbb{R}$ και $f\,'(0) = f(0) = 1$.

44. Να αποδειχτεί ότι:

α. αν $f\,''(x) = f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ και $f(0) = f\,'(0) = 1$, τότε $f(x) = e^x$, για κάθε x.

β. αν $\delta\,''(x) = \delta(x) + 5x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\delta(0) = 1$ και $\delta'(0) = -4$, τότε $\delta(x) = e^x - 5x$.

45. Αν η $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(\pi/2) = 0$ και $f''(x) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0, \pi)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \alpha \cdot ημx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

46. Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει: $f(x) = x \cdot f'(x)$, $f(1) = 1$ και $f(-1) = 2$.

47. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, ώστε να ισχύει:

$$(f(x) - e^{x}) \cdot (f'(x) - e^{x}) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι: $(f(x) - e^{x})^{2} = 1$.

β. Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - e^{x}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x - 2) \cdot f'(x) = 2x^{2} - 5x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(3) = 7$, να βρεθεί ο τύπος της f.

49. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, αν ισχύει ότι: $f'(x) = f(x) \cdot \ln[f(x)]$, για κάθε $x > 0$ και $f'(1) = 0$.

50. Να βρείτε την f, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) - f(x) = \sqrt{2}ημ\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ και } f(0) = 1$$

51. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 1$, για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

52. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$f'(x) = (2x + 1) \cdot f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

αν και μόνο αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = c \cdot e^{x^2 + x}$

53. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης, που διέρχεται από το $M(0, -3)$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη x_0 έχει εφαπτομένη με $\lambda_{εφ} = \dfrac{4x_0}{4x_0^2 + 1}$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \to [0, +\infty)$ με $f(0) = 0$, που είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε $(1 - \xi) \cdot f'(\xi) = f(\xi)$.

β. Υπάρχουν α, β με $0 < \alpha < \beta < 1$, ώστε:

$\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) < 0$ με $z_1 = \beta + i$ και $z_2 = f'(\alpha) + i \cdot f'(\beta)$