ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Αρχική Συνάρτηση

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}$$

για κάθε $x \in \Delta$.

Θεώρημα

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

  $$\mathbf{G(x) = F(x) + c}\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

  $$\mathbf{G(x) = F(x) + c}\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

Βασικές Συναρτήσεις & Παράγουσες

Συνάρτηση – f	**Παράγουσα – F**
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$
1	$x + c$
x^{α} $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + c$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^{x}	$e^{x} + c$
α^{x}	$\dfrac{\alpha^{x}}{\ln\alpha} + c$
$συνx$	$ημx + c$
$ημx$	$-συνx + c$

Συνάρτηση – f	**Παράγουσα – F**
$\dfrac{1}{συν^2x}$	$εφx + c$
$\dfrac{1}{ημ^2x}$	$σφx + c$

Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	**Παράγουσα F**
$f(x)^{ν} \cdot f'(x)$ $ν \neq -1$	$\dfrac{f(x)^{ν+1}}{ν+1} + c$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\|f(x)\| + c$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)} + c$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)} + c$
$α^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\dfrac{α^{f(x)}}{\lnα} + c$
$συνf(x) \cdot f'(x)$	$ημf(x) + c$
$ημf(x) \cdot f'(x)$	$-συνf(x) + c$

(*) Αναλόγως σκεφτόμαστε για οποιαδήποτε άλλη σύνθετη βασίζεται στον προηγούμενο πίνακα.

Μεθοδολογία

- Όπως σκεφτόμαστε την παραγώγιση αντίστροφα, το ίδιο κάνουμε και με τους κανόνες της. Συνεπώς, αν :

$$\mathbf{f(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

τότε, οι παράγουσες της f είναι της μορφής :

$$\mathbf{F(x) = g(x) \cdot h(x) + c}$$

- Αναλόγως, αν :

$$\mathbf{f(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{g^2(x)}}$$

τότε, οι παράγουσες της f είναι της μορφής :

$$\mathbf{F(x) = \frac{g(x)}{h(x)} + c}$$

- Από τις εφαρμογές του Θ.Μ.Τ. θυμίζουμε ότι, αν :

$$\mathbf{f'(x) = g'(x)}$$

για κάθε $x \in \Delta$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in \Delta$:

$$\mathbf{f(x) = g(x) + c}$$

Εμβαδό Χωρίου

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] , με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [α, β]$. Έστω, επίσης, Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες x = α , x = β .

- Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους :

  $$\mathbf{\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}}$$

  με τη βοήθεια των σημείων :

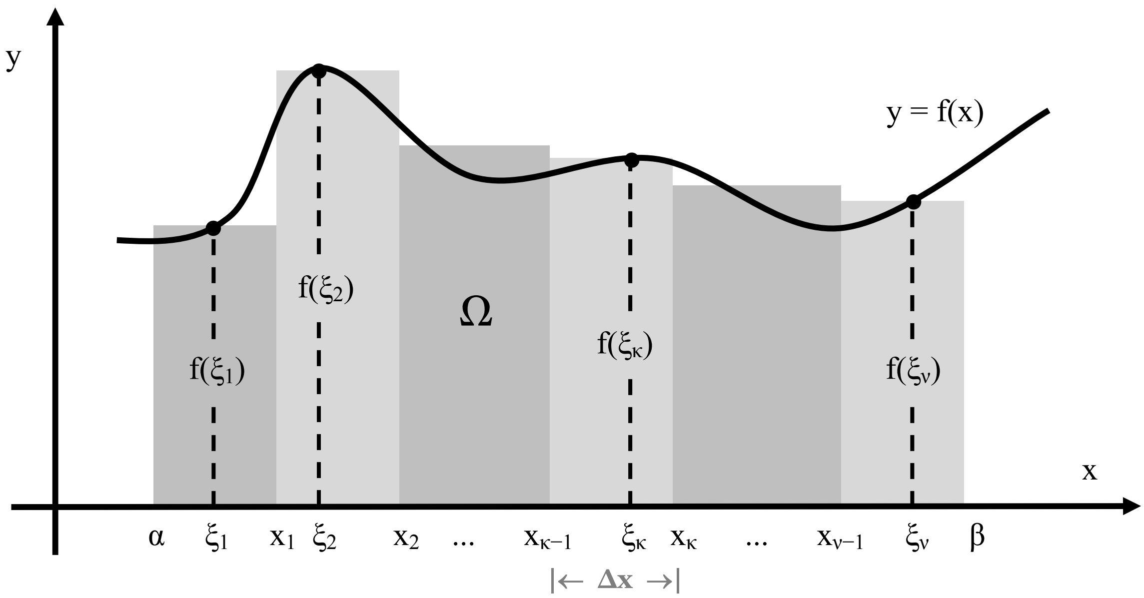
  $$\mathbf{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta}$$

- Σε κάθε υποδιάστημα $[\, x_{\kappa-1} , x_\kappa \,]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια, με βάση Δx και ύψη τα αντίστοιχα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι :

  $$\mathbf{S_\nu = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\cdot\Delta x =}$$
  $$\mathbf{= [\, f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_\nu) \,]\cdot\Delta x}$$

- Υπολογίζουμε το : $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$

Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επίπεδου χωρίου Ω και συμβολίζεται E(Ω) , με $E(\Omega) \geq 0$.



Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] .

- Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους :

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}}$$

με τη βοήθεια των σημείων :

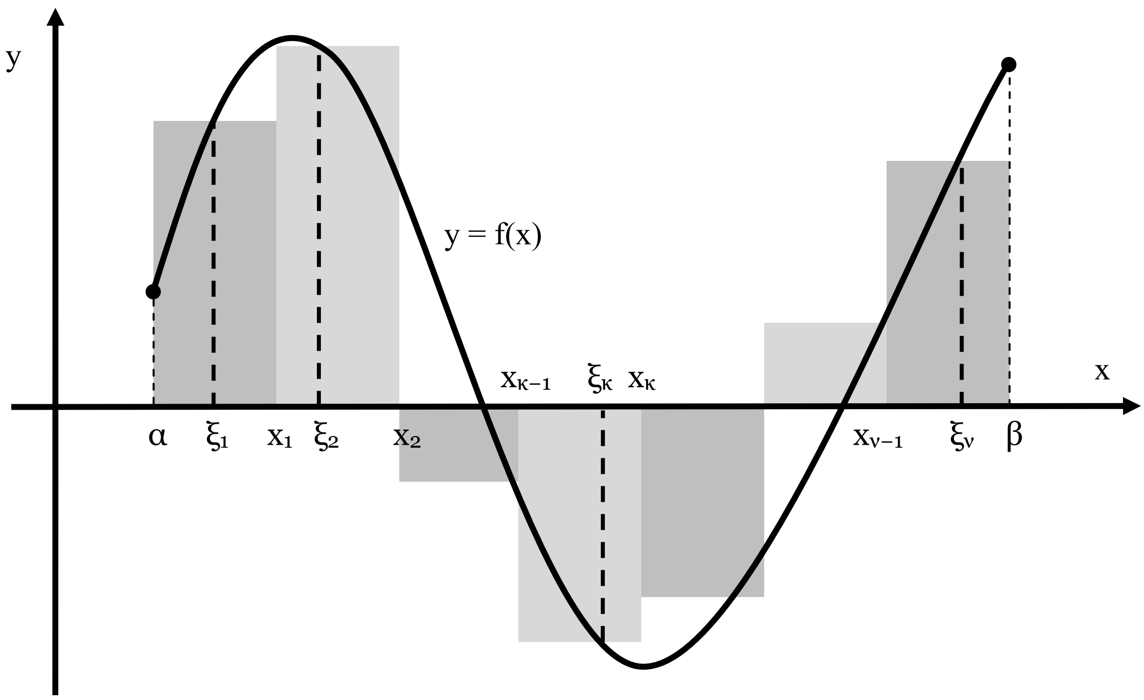
$$\boldsymbol{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta}$$

- Στη συνέχεια, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [\, x_{\kappa-1}\, ,\, x_\kappa \,]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα :

$$\boldsymbol{S_\nu = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\cdot\Delta x}$$

το οποίο συμβολίζουμε, συντομότερα, ως εξής:

$$\boldsymbol{S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x}$$



Αποδεικνύεται ότι το όριο του αθροίσματος S_ν , δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ .

Το παραπάνω όριο ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β». Δηλαδή :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot\Delta x\right)$$

Παρατηρήσεις

- Τονίζεται ότι ο παραπάνω ορισμός έχει «χτιστεί» πάνω στην προϋπόθεση η f να είναι συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα [α, β].
- Η μεταβλητή x καλείται **μεταβλητή της ολοκλήρωσης** .
- Το σύμβολο dx καλείται **διαφορικό της ολοκλήρωσης** .
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει, τελικά, ένα σταθερό πραγματικό αριθμό $c\in\mathbb{R}$, ο οποίος εξαρτάται **μόνο** από τη συνάρτηση f και τα όρια α και β και **όχι** από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Έτσι :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du = \ldots$$

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

Βασικές ιδιότητες, που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό:

1. Αν $α > β$ τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = -\int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{f(x)dx}$

2. Αν $α = β$ τότε: $\int_{\alpha}^{\alpha} \mathbf{f(x)dx} = 0$

3. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

4. Από το προηγούμενο συνάγεται ότι:

$$\textbf{Αν } \mathbf{f(x) \geq 0}\textbf{, τότε } \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx \geq 0}$$

5. **Θεώρημα**

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν :

- $\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f(x)dx} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)}]\mathbf{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} + \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g(x)dx}$

και, γενικά, για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των f, g :

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f(x)} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{g(x)}]\mathbf{dx} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} + \boldsymbol{\mu} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g(x)dx}$

6. **Θεώρημα**

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = \int_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{f(x)dx} + \int_{\gamma}^{\beta} \mathbf{f(x)dx}$$

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$, το προηγούμενο θεώρημα δηλώνει ότι:

$$\mathbf{E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)}$$

όπου :

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$$E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$$

$$E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

7. Θεώρημα

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε :

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)dx} > 0$$

8. Αποδεικνύεται επίσης ότι, για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta c\,dx = c\,(\beta - \alpha)}$$

Μεθοδολογία

Προκειμένου να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$, κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της f και βγάζουμε την απόλυτη τιμή. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε κανονικά ή, αν χρειάζεται, κατά διαστήματα.

Θεμελιώδες Θέωρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$\mathbf{F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt}$$

με $x \in \Delta$, είναι μία παράγουσα της f στο Δ.

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε :

$$\mathbf{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)}$$

Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες

Αν οι f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)\cdot g'(x)dx} = \left[\mathbf{f(x)\cdot g(x)}\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f'(x)\cdot g(x)dx}$$

Μεθοδολογία

Τη μέθοδο αυτή την εφαρμόζουμε, κυρίως, σε συναρτήσεις τις μορφής:

- P(x) · (εκθετική)
- P(x) · (τριγωνομετρική)
- P(x) · (λογαριθμική)
- (εκθετική) · (τριγωνομετρική)

όπου P(x) κάποιο πολυώνυμο του x . Αναλυτικότερα :

P(x) · (εκθετική)

Ξεκινάμε από την εκθετική, βρίσκοντας μια παράγουσά της.

- Αν πρόκειται για εκθετική της μορφής : $e^{x} = (e^{x})'$
- Αν πρόκειται για σύνθετη της μορφής : $e^{\lambda x} = \left(\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)'$
- Αν πρόκειται για εκθετική της μορφής : $\alpha^{x} = \left(\dfrac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}\right)'$

P(x) · (τριγωνομετρική)

Ξεκινάμε από την τριγωνομετρική, βρίσκοντας μια παράγουσά της.

- Αν πρόκειται για απλής μορφής : $ημx = (-συνx)'$

  $συνx = (ημx)'$

- Αν πρόκειται για σύνθετης μορφής : $ημ(λx) = \left(\dfrac{-συν(λx)}{λ}\right)'$

  $συν(λx) = \left(\dfrac{ημ(λx)}{λ}\right)'$

P(x) · (λογαριθμική)

Ξεκινάμε από την πολυωνυμική, βρίσκοντας μια παράγουσά της.

(εκθετική) · (τριγωνομετρική)

Ξεκινάμε από όποια επιθυμούμε κι εφαρμόζουμε, πάνω της, τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης δύο φορές (!) έως ότου καταλήξουμε στο αρχικό ολοκλήρωμα. Κατόπιν, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Ολοκλήρωση με Αλλαγή Μεταβλητής

Αν οι f , g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})\right) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} \mathbf{f}(\mathbf{u})\mathbf{du}$$

όπου :

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \text{ , } \mathbf{du} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{dx} \text{ , } \mathbf{u}_1 = \mathbf{g}(\alpha) \text{ , } \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}(\beta)$$

Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου [1]

Με την προϋπόθεση ότι η f συνεχής στο [α, β] τότε:

- Αν Ω είναι το χωρίο , το οποίο ορίζεται από τη C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β , έχουμε :

  Αν **f(x) ≥ 0** , για κάθε x∈[α, β] , τότε :

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$

  Αν **f(x) ≤ 0** , για κάθε x∈[α, β] , τότε :

$$\mathbf{E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$

Γενικά, λοιπόν, ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx}}$$

- Αν Ω είναι το χωρίο , το οποίο ορίζεται από τη C_f και τον άξονα x΄x μόνο, έχουμε :

$$\boxed{\mathbf{E(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx}}$$

  όπου x_1 και x_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της f .

Μεθοδολογία

Βρίσκουμε τις ρίζες της f και κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων, όπου σημειώνουμε επιπλέον τα όρια του διαστήματος [α, β]. Αν η f δε διατηρεί το πρόσημο εντός του [α, β] , «σπάμε» το ολοκλήρωμα σε άθροισμα επιμέρους ολοκληρωμάτων.

Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου [2]

Με την προϋπόθεση ότι οι f και g είναι συνεχείς στο [α, β] τότε:

- Αν Ω είναι το χωρίο , το οποίο ορίζεται από τη C_f , τη C_g και τις ευθείες x = α και x = β , έχουμε :

  Αν **f(x) ≥ g(x)** , για κάθε x∈[α, β] , τότε :

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x)\right) dx}$$

  Αν **f(x) ≤ g(x)** , για κάθε x∈[α, β] , τότε :

$$\mathbf{E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x)\right) dx}$$

Γενικά, λοιπόν, ισχύει:

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left| f(x) - g(x) \right| dx}$$

- Αν Ω είναι το χωρίο , το οποίο ορίζεται από τη C_f και τη C_g , έχουμε :

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| dx}$$

  όπου x_1 και x_2 είναι δύο διαδοχικά σημεία τομής των C_f , C_g (με άλλα λόγια, δύο διαδοχικές ρίζες της f – g).

Μεθοδολογία

Βρίσκουμε τις ρίζες της f – g και κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της, στον οποίον επιπλέον σημειώνουμε τα όρια του διαστήματος [α, β]. Αν χρειαστεί, «σπάμε» το ολοκλήρωμα σε άθροισμα επιμέρους ολοκληρωμάτων.