4ο Γενικό Λύκειο Χανίων

2008 - 2009

Γ τάξη

Τμήμα ….

Μαθηματικά

Θετικής - Τεχνολογική Κατεύθυνσης

γ

Ασκήσεις για λύση

Μ.. Παπαγρηγοράκης

ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Α ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ $\int f'(x)dx = f(x)+c$

Να υπολογίσετε τα:

546 Α) $\int \frac{\eta\mu^3 x+4}{\eta\mu^2 x}dx$ Β) $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}dx$

Γ) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x}}dx$ Δ) $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}dx$

Ε) $\int (1-\sqrt{x})(x+1)dx$ Στ) $\int (1-\sqrt{x})^2 dx$

Ζ) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$ Η) $\int \left(e^x-\sigma\upsilon\nu x\right)dx$

Θ) $\int \sqrt{x}(x+1)^2 dx$ Ι) $\int 3x\sqrt[5]{8x}dx$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ-ΠΗΛΙΚΟ

547 Α) $\int (2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x)dx$ Β) $\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx$ Γ) $\int e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)dx$ Δ) $\int \frac{1-x}{e^x}dx$

ΣΥΝΘΕΣΗ $\int f(g(x))g'(x)dx = \int \left(f(g(x))\right)'dx = f(g(x))+c$ --- ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ: $u=g(x)$

548 Α) $\int (e^x-2)^3 e^x dx$ Β) $\int x^2(x^3+1)^{10}dx$

Γ) $\int \sqrt[3]{8+5x}dx$ Δ) $\int \sqrt{-x}dx$

Ε) $\int \frac{3x dx}{(x^2+2)^2}$ Στ) $\int \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Ζ) $\int \frac{1}{(2x-1)^2}dx$ Η) $\int \frac{1}{1+2\alpha+\alpha^2}d\alpha$

549 Α) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}dx$ Β) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

Γ) $\int (3x^2+1)(x^3+x)^{10}dx$ Δ) $\int x(x^2+1)^3 dx$

Ε) $\int \sqrt[3]{8+5x}dx$ Στ) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx$

Ζ) $\int \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}dx$ Η) $\int x\eta\mu(1-x^2)dx$

550 Α) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx$ Β) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

Γ) $\int 4x\left(2x^2+3\right)^{12}dx$ Δ) $\int \frac{1+\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Ε) $\int \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2}dx$ ΣΤ) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$

Ζ) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ Η) $\int \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{-x}}}dx$

551 Α) $\int xe^{3-x^2}dx$ Β) $\int (\sigma\upsilon\nu 2x+x)dx$

Γ) $\int 5xe^{2-4x^2}dx$ Δ) $\int (e^x-2)^3 e^x dx$

Ε) $\int 4x\sigma\upsilon\nu(1-2x^2)dx$ ΣΤ) $\int x\sigma\upsilon\nu(1-x^2)dx$

Ζ) $\int 5x\sigma\upsilon\nu(1-x^2)dx$ Η) $\int \frac{2x}{\sigma\upsilon\nu^2(x^2+\pi)}dx$

552 Α) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ Β) $\int \frac{(1-\ln x)^2}{x}dx$

Γ) $\int \frac{3-\ln x}{x}dx$ Δ) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

553 Α) $\int \eta\mu x\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$ Β) $\int \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Γ) $\int \frac{(1+\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x}{2+\eta\mu x}dx$ Δ) $\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}dx$

554 Α) $\int x^2(2x-1)^{\frac{7}{3}}dx$ Β) $\int \frac{2x^2+3}{(3x+1)^2}dx$

Γ) $\int (x-2)^2(2x+1)^3 dx$ Δ) $\int \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}dx$

Ε) $\int (x-2)\sqrt{3x+1}dx$ Στ) $\int x\eta\mu(1-x^2)dx$

ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

555 Α) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+7}dx$ Γ) $\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx$

Δ) $\int \frac{x+2}{x^2-6x-7}dx$ Ε) $\int \frac{x^2-2x-1}{x^3-x}dx$

556 Α) $\int \frac{x^2}{x^2-4}dx$ Β) $\int \frac{x^2-x+2}{x+3}dx$

Γ) $\int \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-x}dx$ Δ) $\int \frac{x^3}{x^2-4x+3}dx$

ΡΙΖΕΣ

557 Α) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$ Β) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x+1}}dx$

Γ) $\int x\sqrt{x+4}dx$ Δ) $\int x\sqrt{x^2+3}dx$

558 Α) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$ Β) $\int \frac{8\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}+6\sqrt{x}}dx$

Γ) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+3}}dx$ Δ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}dx$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

559 Α) $\int \frac{e^x-1}{e^x+2}dx$ Β) $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ Γ) $\int \frac{2}{1+e^{-2x}}dx$ Δ) $\int \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

560 Α) $\int συν^4 x dx$ Β) $\int συν^5 x dx$

Γ) $\int ημ^3 x συν^2 x dx$ Δ) $\int ημx συν^2 x dx$

561 Α) $\int \frac{1}{συν^4 x}dx$ Β) $\int \frac{1}{συν^3 x}dx$

Γ) $\int \frac{1}{ημ^2 x συν^2 x}dx$ Δ) $\int \frac{1}{ημx συνx}dx$

ΜΟΡΦΗ 8: $\int f(ημαx \cdot συνβx)dx$ με χρήση των τύπων μετασχηματισμού γινομένων σε αθροισματα

$2ημασυνβ = ημ(α-β)+ημ(α+β)$, $2συνασυνβ = συν(α-β)+συν(α+β)$, $2ημαημβ = συν(α-β)-συν(α+β)$

562 Α) $\int ημx συνx dx$ Β) $\int ημx ημ(3x)dx$ Γ) $\int 4ημ(2x)συν(5x)dx$ Δ) $\int συν(2x)συν(3x)dx$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

563 Α) $\int x^2 e^{-2x}dx$ Β) $\int (x^2+3x)e^{-x}dx$

Γ) $\int (x^2+2x)συν(4x)dx$ Δ) $\int xημ2x dx$

564 Α) $\int e^{-x}συν2x dx$ Β) $\int \ln^2(2x+1)dx$

Γ) $\int \ln(-x+\sqrt{x^2-9})dx$ Δ) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

ΓΕΝΙΚΕΣ

565 Α) $\int \frac{x}{συν^2 x}dx$ Β) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

Γ) $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx$ Δ) $\int \frac{4(x^4-1)}{x(x^4+1)}dx$

566 Α) $\int \frac{\ln(εφx)}{ημx συνx}dx$ Β) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}$

Γ) $\int xσυν^2(x^2)dx$ Δ) . $\int e^{2x}συνe^x dx$

567 Α) $\int \frac{(2x-1)^2}{x}dx$ Β) $\int \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x}dx$

Γ) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}dx$ Δ) $\int x^2 \ln x^2 dx$

Ε) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ Στ) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

568 Μια συνάρτηση $f:R \to R$ με $f(2+e)=2$ έχει την ιδιότητα $f'(2x+e^x)=x$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

569 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ για την οποία ισχύει: $f(x) = 2\int \frac{xf(x)}{x^2+1}dx - c$ και $f(1)=6$.

i) Να βρείτε τον τύπο της f.

ii) Να υπολογίσετε το $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x^3+3x+1}}dx$, $x>0$

570 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ και F μια αρχική της f στο R. Αν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot F(2-x)=1$ για κάθε $x \in R$, τότε

Α) Να βρείτε το $F(1)$

Β) Να αποδείξετε ότι $f(2-x)\cdot F(x)=1$

Γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=F(x)\cdot F(2-x)$ είναι σταθερή.

Δ) Να βρείτε τον τύπο της f

571

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

572 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx \Rightarrow \int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\beta^\delta f(x)dx$

Β) $\int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(t)e^{x^2}dx \right) dt = \int_\gamma^\delta \left(\int_\alpha^\beta f(t)e^{x^2}dt \right) dx$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

573 Α) $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$ Β) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$

Γ) $\int_3^4 \frac{x}{x^3+x^2-2x}dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{x}{16-x^2}dx$

Ε) $\int_1^2 \frac{x^3-5x^2+1}{x}dx$ Στ) $\int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu 2x dx$

574 Α) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ Β) $\int_0^5 \frac{x}{1+x^2}dx$

Γ) $\int_0^{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}} e^x \sqrt{1 - e^{2x}}dx$ Δ) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

Ε) $\int_0^e \left(\int_1^x (1-t)e^{-t}dt \right) dx$ Στ) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln x|}{x}dx$

575 Α) $\int_1^2 x\ln x dx$ Β) $\int_1^2 t^2 \ln t dt$

***Γ) $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}dx$ Δ) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

Ε) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(3x)\sigma\upsilon\nu(2x)dx$ Στ) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$

576 Η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(x)>0$, $f'(x)=f^2(x)$ και $f(\beta)=3f(\alpha)$. Να βρείτε το $I=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

577 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

Α) $\int_\alpha^\beta xf''(x)dx = (\beta f'(\beta)) - f(\beta) - (\alpha f'(\alpha) - f(\alpha))$

Β) $f(x+1)-2f(x)+f(x-1) = \int_{x-1}^x \left(\int_y^{y+1} f''(t)dt \right) dy$

578 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποια ισχύει $f(x)+f(x-1002)=0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι

α) $f(x+2004)=f(x)$, για κάθε $x \in R$.

β) $\int_1^{2005} f(x+2005)dx = \int_2^{2006} f(x)dx$.

579 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$ και να βρείτε τα

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}dx$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx$

580 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\alpha+\beta)\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$$

ΑΡΤΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ (ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

581 Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \frac{x}{4+\sigma\upsilon\nu 4x}dx = 0$

582 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ με την ιδιότητα $f(1-x)+f(1+x)=f(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδειχθούν τα εξής:

Α) Η συνάρτηση f, είναι άρτια,

Β) $\int_{1995}^{1996} f(x)dx = \int_0^{1997} f(x)dx$.

583 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και άρτια. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\int_0^{2\pi} xf(\eta\mu x)dx = 2\pi\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$

Β) $\int_0^\pi xf(\sigma\upsilon\nu x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$

584 Η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι συνεχής, άρτια και έχει περίοδο T. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^T xf(x)dx = \frac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Να βρείτε τα πεδία ορισμού και τις παραγώγους των:

585 $F(x)=\int_{2x+1}^{3x-2}\frac{1}{\ln t}dt$ $\quad G(x)=\int_{3}^{x}|t-x|dt$

$H(x)=\int_{1}^{x^2+3x} t^2\ln t dt$ $\quad L(x)=\int_{1}^{\sqrt{x-1}}\frac{t^2}{\ln t-t}dt$

$\Phi(x)=\int_{-\pi}^{x}|t-x|dt$ αν $-\pi\le x\le\pi$ $\quad K(x)=\int_{|x|}^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$

586 Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο R, να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο των συναρτήσεων:

Α) $\Phi(x)=\int_{0}^{1}xf(x+t)dt$ $\quad$ Β) $G(x)=\int_{\alpha}^{\beta}f(xt)dt$

Γ) $F(x)=\left(\int_{e^x}^{\sqrt{x}}\ln t\,dt\right)\left(\int_{x^2}^{\ln x}e^t dt\right)$

Δ) $F(x)=\int_{19}^{\int_6^x e^u du}\sigma\upsilon\nu^2 t dt+\int_{61}^{\int_6^x e^y dy}\eta\mu^2 t dt$

587 Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης: $F(x)=\int_{1}^{x}\left(\int_{2}^{y}\left(\frac{1}{1+t^2+\eta\mu^2 t}\right)dt\right)dy$

588 Αν f συνεχής στο R, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{x}f(u)(\eta\mu x-\eta\mu u)du=\int_{0}^{x}\left(\sigma\upsilon\nu u\int_{0}^{u}f(t)dt\right)du$$

589 Να αποδειχτεί ότι αντιστρέφονται οι συναρτήσεις: $F(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{1+t^2}dt$ και $G(x)=\int_{0}^{x}\eta\mu^4 t^2 dt$

590 Αν $G(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt,\ x\in R$ και

$f(t)=\int_{2t}^{t}\sqrt{1+u^2}du,\ t\in R$, να αποδείξετε ότι:

Α) $G''(0)=-1$ $\quad$ Β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{G''(x)-\sqrt{1+x^2}}{x+1}=-4$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

591 Να αποδείξετε ότι:

Α) Η $f(x)=\int_{x}^{x+1}e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt$ είναι σταθερή

Β) Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt=\int_{\alpha+1}^{\beta+1}e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt,\ \forall\alpha,\beta\in R$

592 Έστω συνάρτηση f με $A_f=\Delta$, είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση G με

$$G(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+\int_{\alpha}^{f(x)}f^{-1}(t)dt-xf(x) \text{ με } \alpha\in\Delta$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΚΟΙΛΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ Κ.Λ.Π.

593 Έστω $F(x)=\int_{5}^{x}\left(\int_{2}^{t}\sqrt{u^2-u}du\right)dt$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

Β) Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία.

Γ) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

594 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt$, με $x\in R$, είναι κυρτή στο R.

595 Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο R και η $f(x)=\int_{0}^{x}(x-t)g(t)dt$. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα ,όταν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

596 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(x)<-2$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι :

Α) Η συνάρτηση $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt+1-x^3-x^2-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Β) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,3]$

597 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να μελετήσετε τα κοίλα της συνάρτησης $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)|x-t|dt,\ x\in[\alpha,\beta]$

598 Έστω $F(x)=\int_{5}^{x}\left(\int_{2}^{t}\sqrt{u^2-u}du\right)dt$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα κοίλα

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

599 Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ αν ισχύει ότι $x\int_0^1 f(xt)dt=f(x)-1$ για κάθε $x\in R$.

600 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f που έχει συνεχή 2η παράγωγο στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και για την οποία ισχύουν $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ και

$$1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t dt=\sigma\upsilon\nu^2 x+\int_0^x f'(t)\eta\mu t dt$$

601 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f, συνεχούς στο $[0,1]$, αν ισχύει ότι $\int_0^1 f(x)(x-f(x))dx=\frac{1}{12}$

602 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, τέτοια ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και

$$\int_0^1 \ln^2 f(x)dx+\frac{1}{5}=2\int_0^1 x^2\ln f(x)dx.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}$, για κάθε $x\in[0,1]$.

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}dx$.

603 Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:R\to R$ για τις οποίες για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι:

$$3\int_0^x f(t)dt-\int_0^{-x} f(t)dt=2x^2+2x+1$$

604 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία να ισχύει ότι

$$\int_x^y f(t)dt=\frac{f(x)}{f(y)} \text{ για κάθε } x,y\in R$$

ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

605 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $\forall x>-1$ ισχύει: $\int_0^x f(t)dt+\ln(1+x)+1\ge e^{x^2}$ να αποδείξετε ότι $f(0)=-1$

606 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt<f(x)$ για κάθε $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ στο $[0,+\infty)$

607 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Να προσδιορίσετε τον α με $0<\alpha\ne 1$ αν ισχύει ότι:

$$x+\int_0^{x^2} f(t)dt\ge \alpha^{\eta\mu x}+\alpha^{\sigma\upsilon\nu x}-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in R$$

608 Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R ώστε να ισχύει $\int_0^x e^{t-x}f(x-t)dt\ge -e^{-\alpha x}+\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in R$ (με $\alpha,t\in R$). Να αποδείξετε ότι $f(0)=\alpha$.

ΥΠΑΡΧΕΙ - - ΠΡΟΣΟΧΗ!!! $f(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'$ (*)

609 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε

$$\int_\xi^2 f(t)dt=\xi\cdot\ln\xi\cdot f(\xi)$$

610 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι

Α) υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε $x_o f(x_o)=2\int_{x_o}^1 f(t)dt$ (*)

Β) Υπάρχει $\gamma\in(0,1)$ ώστε $f(\gamma)\eta\mu(2\gamma)=2\int_\gamma^1 f(t)dt$

611 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ και ισχύει: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\frac{\pi}{3})$ ώστε $\frac{f(\xi)}{\varepsilon\varphi\xi}=\int_\xi^0 f(t)dt$

612 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν:

Α) $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\int_\alpha^{x_o} f(t)dt=f(x_o)$

Β) $\gamma\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\int_\alpha^\gamma f(t)dt=\gamma f(\gamma)$ αν $0\notin[\alpha,\beta]$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

613 Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

Α) $\sqrt{3}+\frac{3}{2}\le\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2+x}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\sqrt{15}$

Β) $\int_0^{\pi}\frac{3998}{1+\eta\mu^2x}dx\ge 1994\pi$ Γ) $\frac{1}{2}\le\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\le 1$

614 Να αποδείξετε ότι:

Α) $\ln\frac{\alpha}{\beta}\le\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\eta\mu x}{x}\le\ln\frac{\beta}{\alpha}$ για κάθε $0<\alpha\le\beta$

Β) $\int_0^{\pi}\frac{3998}{1+\eta\mu^2x}dx\ge 1994\pi$

Γ) $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$

Δ) $1\le\int_0^1\frac{e^x}{1+x^2}dx\le\frac{e}{2}$

615 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$x^2\int_0^x f(t)dt>\int_0^x t^2f(t)dt$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

616 Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to(0,+\infty)$ συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με την g να είναι φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)g(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx}<\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx}$

617 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[3,4]$ με $1\le f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[3,4]$ και ισχύει $\int_3^4 f^2(x)dx\ge 4$ να αποδείξετε ότι $\int_3^4 f(x)dx=2$.

ΕΜΒΑΔΑ

618 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f,C_g των συναρτήσεων

Α) $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=2x-1$ και την ευθεία $x=0$

Β) $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=2x-1$ και $h(x)=\frac{2}{x^2}$

619 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες $x=1$ και $x=e$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.

620 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x-1}$

Α) Να αποδειχτεί ότι η ευθεία (ε_1): $y=x-6$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ενώ η (ε_2): $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε_1) και τις ευθείες $x=2$, $x=t$, όπου $2\le t\le 5$.

Γ) Να υπολογιστεί ο t ώστε $E(t)=4$

621 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$

Α) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της C_f

Β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) τις ευθείες $x=0$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$.

****

622 Έστω οι συναρτήσεις f,g με $A_f=A_g=R$ και ισχύει $f'(x)-g'(x)=(x^2+2x-1)e^x$ για κάθε $x\in R$

Α) Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ αν γνωρίζουμε ότι η C_h διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f,C_g

623 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ώστε $f(x)>0$ και $f(2-x)+f(x)=2$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

624 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$

Α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά

Β) Να αποδειχτεί ότι ισχύει η σχέση: $f''(x)-2f'(x)+f(x)=2e^x$ και ότι η συνάρτηση $F(x)=2e^x+2f(x)-f'(x)$ είναι μια παράγουσα της f

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του μέρους του επιπέδου τα σημεία $M(x,y)$ του οποίου ικανοποιούν τις σχέσεις: $t\le x\le 0$ με $t<0$ και $0\le y\le f(x)$

Δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{t\to-\infty}E(t)$

625 Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ $(\lambda>0)$.

A) Να υπολογίσετε το $E(\lambda)$ και τα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)$

B) Να προσδιορίσετε την ευθεία $x=\alpha$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

626 Δίνεται η συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o=0$ με τιμή μηδέν και $f(1)+f(-1)=3$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f', του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=-1$ και $x=1$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

627 Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R, τέτοια ώστε να ισχύει: $\int_0^x(t^2+t)f(t)dt+4x+1=e^{4x}+5x^2$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$.

628 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^{2x^2-x}\sqrt{1+t^2}dt$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $x_o=1$, καθώς και ο $\lambda\in R$ ώστε η ευθεία (δ) $y=\sqrt{2}\left(\lambda^2-\frac{7}{6}\right)x+3$, να είναι κάθετη στην (ε)

629 Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x)=\int_2^x(t-1)dt$ στα σημεία τομής του με τον άξονα $x'x$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

630 A) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, αντιστρέψιμη και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha).$$

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^5$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)dx$.

631 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2x+\eta\mu x}$, $x\geq0$.

A) Να βρείτε τη μονοτονία της f

B) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Γ) Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$

Δ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\sqrt{\pi}}xf^{-1}(x)dx$

632 A) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο A και γνησίως αύξουσα στο A. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$.

B) Αν $f(x)=x+\int_{2004}^x e^{-t^2}dt$, $x\in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=f^{-1}(x)$.

ΟΡΙΑ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

633 Να αποδείξετε ότι:

A) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda x\eta\mu x dx=0$ B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt}{x^2}=+\infty$

Γ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(\eta\mu t-t)dt}{\int_0^x(\eta\mu t-t\sigma\upsilon\nu t)dt}=-\frac{1}{2}$ Δ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{\eta\mu x}e^{t^2}dt}{\int_0^{\varepsilon\varphi x}e^{t^2}dt}=1$

E) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt=+\infty$ Z) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{\sqrt{3+2t^2}}dt=0$

ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

634 Αν $I_\nu=\int x^\nu e^x dx$, $\nu\in N^*$ να αποδείξετε ότι $I_\nu=x^\nu e^x-\nu I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu\geq2$.

635 Αν $I_\nu=\int_0^1\frac{e^{\nu x}}{1+e^x}dx$, $\nu\in N$ να αποδείξετε ότι $I_{\nu+1}=\frac{e^\nu-1}{\nu}-I_\nu$, $\nu\in N^*$

ΓΕΝΙΚΕΣ

636 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x |t^2-t|dt$

637 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x)=x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$.

Β) ορίζεται η $f^{-1}:[0,\pi]\to[0,\pi]$.

Γ) το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ και των ευθειών $x=0$ και $x=\pi$ είναι $E=4\tau\mu$.

638 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)>0$ και ισχύει: $\ln(f(x))+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in R$.

Α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

Β) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=1$ και $f(x)=e$.

Δ) Υπολογίστε το άθροισμα $I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_e^{e^e+1} f(x)dx$.

639 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(1)=1$. Αν $z\in C$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι

$2\int_1^x |z+5i|f(t)dt\le\int_1^{x^2}|\overline{z}+5i|e^{t-1}dt+12(x-1)$.

Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο

Β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h που έχει γραφική παράσταση την καμπύλη C

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $H(x)=\int_1^x h(t)dt$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

640 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}$, $x\in(0,\pi)$

Α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{\pi}{3}$ και $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $E=\frac{1}{2}\ln 3$.

641 Α) Ανισότητα **Bunyakovsky-Cauchy- Schwarz:**

Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε την ανισότητα $\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_\alpha^\beta (f(x))^2dx\cdot\int_\alpha^\beta (g(x))^2dx$

Β) Να αποδείξετε ότι

α) $\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2\le(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$

β) $\left(\int_\alpha^\beta xf(x)dx\right)^2\le(\beta^2-\alpha^2)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$

642 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ με $f'(1)=1$.

Α) Να αποδείξετε ότι: α) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1+\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$,

β) $f(x)=x\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

Β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)=x^2-1$

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x)=2f(x)$, $g(x)=x^2-1$ και την ευθεία $x=e$.

643 Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή το $\Delta=[0,2]$ ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $\int_x^2 f(t)dt\ge\frac{2-x^3}{3}$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

Α) $2F(2)\ge\int_0^2 F(x)dx$

Β) $\int_0^2 [xF(x)]'dx=\int_0^2 F(x)dx+\int_0^2 xf(x)dx$

Γ) $\int_0^2 xf(x)dx\ge 0$

Δ) $\int_0^2 f^2(x)dx\ge-\frac{2}{3}$

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

644 Έστω $z=1+\sigma\upsilon\nu 2\theta+i\eta\mu 2\theta$, $\theta\in R$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|z|d\theta$.

645 Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left(|z|-z(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)\right)d\theta\le 0$, όπου $z=x+yi$ με $x,y\in R$, $\theta\in R$ και $\beta<\alpha$.

646 Δίνεται ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ με $|z|=1$ και η συνάρτηση $f(x)=|x\cdot z-\bar{z}|^2$, $x\in R$, για την οποία ισχύει ότι $3\int_0^1 f(x)dx=7$. Να αποδείξετε ότι ο z είναι φανταστικός.

647 Για τους z_1, $z_2\in C$ ισχύει ότι $\int_0^{3x}|z_1\cdot t+z_2|dt\ge 3x|z_1|$, $x\in R$, να αποδείξετε ότι $|z_1|=|z_2|$

648 Να υπολογιστεί το $\int_\alpha^\beta\left(\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x\right)dx$, όπου α,β $(\alpha<\beta)$ είναι οι τεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας $x=1$ με τις ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την ισότητα $z\bar{z}-\left(z^2+\bar{z}^2\right)+1=0$.

649 *** Έστω $z_1,z_2\in C$ με $z_1,z_2\ne 0+0\cdot i$ και η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=|z_1\cdot x+z_2|$.

Α) Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x)=f(x)+f(-x)$, $x\in R$

Β) Αν η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ διέρχεται από το $A(0,|z_2|)$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=z_1\cdot\bar{z}_2$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Γ) Αν ισχύει $2+|z_2|\cdot|z_1+z_2|<2|z_2|+|z_1+z_2|$ τότε η εξίσωση $f(x)=2^x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Δ) Αν $z_1=1$ και $z_2=i$ τότε $\int_0^x\frac{1}{f(t)}dt=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.