ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-2009 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x+\beta & , \ x \le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & , \ x > 2 \end{cases}$ να βρείτε τα α, β $\in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο 2.

2. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 .

3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x \le f(x) \le x\sqrt{x} + \eta\mu x$, για κάθε $x \ge 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 και ισχύει ότι $f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & , \ x \le \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1) & , \ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 1/2 , αν και μόνο αν $f'(0) = f'(1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1 και για την οποία ισχύει ότι $f'(1) = 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=2$$

6. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει ότι $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

7. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2f(x)-6}{x-x_0}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 . Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x} = (\alpha-\beta)\cdot f'(0)$, με α, β $\in\mathbb{R}^*$.

β. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x} = 2\cdot f(0)\cdot f'(0)$

9. Θεωρούμε μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) = e^{x} \cdot f(y) + e^{y} \cdot f(x) + xy + \alpha$$

για κάθε x, y $\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0) = -\alpha$

β. η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι:

$f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)\cdot e^{x_0}\, e^{x} + x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)\cdot e^{x_0} + x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ & ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

10. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ **β.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

γ. $f(x) = \sqrt{x}\cdot \eta\mu x + \dfrac{\ln x}{x-1}$ **δ.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$

ε. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1+\varepsilon\varphi x}$ **στ.** $f(x) = \dfrac{2+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$

ζ. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$ **η.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

θ. $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^x}$ **ι.** $f(x) = \dfrac{1-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

11. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με $P(x) = [\,P'(x)]^2$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

12. Να αποδείξετε ότι:

α. αν $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, τότε $2x \cdot f(x) - x \cdot f'(x) + x^2 = 0$.

β. αν $y = x / e^x$, τότε $x\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$.

γ. αν $y = e^x \cdot (ημx - συνx)$ τότε $y' - 2y - 2e^x \cdot συνx = 0$.

13. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g(e) = 1$ και $g'(e) = 2$.

Αν $f(x) = x^2 \cdot g(x) + \frac{x^2}{\ln x}$, τότε να βρείτε τον $f'(e)$.

14. Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

β. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x-2} = 80$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

15. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α. $f(x) = ημ^4\sqrt{x}$

β. $f(x) = x^2 \cdot ημ3x$

γ. $f(x) = ημ^2 x - συν^2 x$

δ. $f(x) = εφ^2(4x^3 + 1)$

ε. $f(x) = συν(x^2 + 3x)$

στ. $f(x) = συν\sqrt{\ln x}$

ζ. $f(x) = ημ(2^x + 3^x)$

η. $f(x) = (x^2 + 3)^4 (x^3 - 5)^3$

16. **Α.** Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^{\ln x}$ με $x > 0$

β. $f(x) = 2^{εφx}$

Β. Να βρείτε την dy/dx στο x_0 της συνάρτησης:

$y = (u+3)^2$, $u = \sqrt{t-3}$, $t = x^2$ και $x_0 = 2$.

17. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

β. $f(x) = x^2 + |x - 3| + 2$

18. Έστω η συνάρτηση h με $h(u) = [\, g^2(u) + 1 \,]^3$. Αν $g(3) = -3$ και $g'(3) = -1$, να βρείτε την $h'(3)$.

19. Δίνεται η $f(x) = e^{x} + x^{3} + x$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

γ. Αν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $A_{f^{-1}}$, να αποδείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.

20. **α.** Αν $f(x) = c\cdot(x - \alpha)\cdot(x - \beta)\cdot(x - \gamma)$ με $c, \alpha, \beta, \gamma \in\mathbb{R}$ και $x \neq \alpha, \beta, \gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$

β. Να βρεθεί η $f\,'$ αν $f(x) = \dfrac{(x^2+5)^3\cdot(1+x^4)^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

21. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι:

Α. Αν η f είναι άρτια, τότε η $f\,'$ είναι περιττή.

Β. Αν η f είναι περιττή, τότε η $f\,'$ είναι άρτια.

Γ. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή τότε:

α. $f''(-\alpha) = -f''(\alpha)$

β. $f''(0) = 0$

Δ. Αν η f είναι άρτια και $g(x) = (x^{2} + 1)\cdot f(x) + 3x$ τότε $g'(0) = 3$.

22. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $\forall\ x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x) = e^{f(x^2)}$, με $f\,'(1) \neq 0$. Να δείξετε ότι $g'(1) = 2\cdot g(1)\cdot f\,'(1)$.

23. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(2x + 3) = x^{2} + 3x + 5$. Να βρεθεί το $f\,'(3)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία είναι $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x, y \in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\ell\in\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

25. Δίνεται ότι οι συναρτήσεις f, h είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο [0, 2] και ισχύει: $2\cdot f^{2}(x) - h^{3}(x) = -9$, $\forall\ x\in[0, 2]$. Αν $f(1) = 3$ και $f'(1) = -2$, να βρεθεί το $h'(1)$.

26. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και άρτια, τότε να αποδείξετε ότι και η $g(x) = f(f'(x)) - f'\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ είναι άρτια.

27. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(x + y) - g(x + y) = f(x) - g(x)$, για κάθε x, y $\in\mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι: $f'(x) = g'(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

28. Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο:

$$x^4 = x\cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{\text{x προσθετέοι}} \Rightarrow$$

$$\left(x^4\right)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{\text{x φορές}}\right)' \Rightarrow$$

$$4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + 3x^2 + \ldots + 3x^2}_{\text{x φορές}} \Rightarrow$$

$$4x^3 = 3x^3 \Rightarrow 4 = 3$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

29. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h} = 2f''(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{h} = -f''(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

30. Να αποδειχτεί ότι:

α. Αν $y = \ln(e^{2x} + 1) - x$, τότε: $y'' = (1 - y')\cdot(1 + y')$.

β. Αν $y = ημ(\ln x) + συν(\ln x)$, τότε: $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

31. Αν η συνάρτηση f έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x^2) = x\cdot f(x)$, να αποδείξετε ότι $f''(1) = 0$.

32. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $f(x) = συνx$, τότε $f^{(ν)}(x) = συν\left(x + \frac{νπ}{2}\right)$.

β. Αν $f(x) = x \cdot e^{x}$, τότε $f^{(ν)}(x) = e^{x} \cdot (x + ν)$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

33. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 7$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α (1, f(1)) και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία $x + 9y + 5 = 0$.

34. Αν f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ και $α > 0$, να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζουν οι ημιάξονες Ox, Oy και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_0 = α$, είναι ανεξάρτητο του α.

35. Έστω $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των C_f , C_g , αντίστοιχα, που τέμνονται στον άξονα y΄y και είναι κάθετες μεταξύ τους.

36. Αν $f(x) = \begin{cases} αx^2 + 2αx + β + α & , x \geq 2 \\ \frac{γ}{x+1} & , x < 2 \end{cases}$, να βρεθούν τα α, β, γ $\in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Α (2, f(2)) να είναι παράλληλη προς την $2x + y - 1 = 0$.

37. Αν $f(x) = α \cdot \ln x + βx^2 + 3$, να βρείτε τα α, β $\in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε): $2x - y + 4 = 0$ να είναι εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της Α (1, f(1)) .

ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

38. Αν $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g .

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{x-1}{x}$ και $f(x) = αx^2 + βx + 2$. Να βρείτε τα α, β $\in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

40. Για ποια τιμή του $\alpha \neq 0$ η εφαπτόμενη της C_f , όπου $f(x) = x^2 - 3x$ στο Α (1, f(1)) είναι εφαπτόμενη και της C_g , με $g(x) = \alpha/x$;

41. Αν η ευθεία (ε): $y - 2x = 0$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$, στο σημείο της $x_0 = -1$, τότε να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε_1) της C_g , $g(x) = f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1 = 1$.

42. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_g της g με $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x΄x , να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον x΄x γωνία 45^o .

43. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$, να έχει εφαπτόμενη την $y = x$.

44. Έστω η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι: $x \cdot \ln x \leq f(x) \leq x^2 - x$, για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Μ (1, f(1)) .

45. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$f(2 + x) - f(2 - x) = -2x \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο (2, f(2)) είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \cdot \ln x$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της Μ (1, f(1)) και αποδείξτε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο Ρ, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

47. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x - 2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq f(x - 3) + 2x - 4 \text{ , } \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Έστω μεταβλητή ευθεία, η οποία διέρχεται από το Μ (−1/2, 0) και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β.

α. Να βρείτε τον τύπο της f.

β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

48. Έστω f δευτεροβάθμια, πολυωνυμική συνάρτηση, ώστε:

$$3\cdot f(x+1) - 2\cdot f(x-2) = x^2 + 14x - 5 \,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

α. Να βρεθεί ο τύπος της f.

β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f, οι οποίες άγονται από το σημείο Α $(1, -1/4)$, είναι κάθετες μεταξύ τους.

49. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με:

- $f(x) \neq 0$
- $g(x) = f(x)\cdot h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- f, g, h είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και
- $h^2(x) = 1 - [h'(x)]^2$

Αν Μ (x_0, y_0) κοινό σημείο των C_f και C_g, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Μ.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

50. Μια σκάλα μήκους 13 m είναι ακουμπισμένη σ' έναν κατακόρυφο τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας έλκεται από τον τοίχο, με ρυθμό 2 m/sec. Να βρείτε:

α. Πόσο γρήγορα γλιστράει το πάνω άκρο της σκάλας, όταν το κάτω άκρο απέχει από τον τοίχο 5 m.

β. Το ρυθμό μεταβαβολής του εμβαδού του τριγώνου, που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος, όταν το κάτω άκρο της απέχει από τον τοίχο 12 m.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και το σημείο Μ $(\alpha, \ln\alpha)$, με $\alpha > 0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο Μ.

β. Για ποια τιμή του α, η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

γ. Αν το σημείο Μ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y, με σταθερή ταχύτητα $v = 2$ m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ, ως προς το χρόνο t, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία η εφαπτόμενη στο Μ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

52. Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x\cdot\ln x$ **β.** $f(x) = x/\ln x$

γ. $f(x) = x + συνx$, $x\in[0, 2\pi)$

δ. $f(x) = \begin{cases} e^x - e\cdot x - 1 & , \ x \le 0 \\ x^2\cdot\ln x & , \ x > 0 \end{cases}$

53. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$, με $f\,'(x) > 0$ και $f(1) = -1$, $f(2) = 1$. Αν $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$, $0 \le x \le 3$, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της g .

54. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

α. $\ln(x - 1) + x^2 + x - 6 = 0$

β. $\ln x + x^2 - e = 0$

55. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln(x + 1) - \dfrac{2x}{x+2} + x = 0$

β. $e^{x+1} + 2x - e = 0$

56. Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f\,'(x) - f(x)/x = 2\cdot\ln x$ και $f(1) = 2$.

α. Να βρεθεί ο τύπος της f.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

57. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

α. $2-\dfrac{e}{2}<\ln 2<\dfrac{2}{e}$

β. $2\cdot\ln(ημx) < ημ^2x$, για κάθε $x\in(0, \pi)$

γ. $e^\pi < \pi^e$

58. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x \ge 2$.

Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $\ln(e-1)\cdot\ln(e+1) < 1$

β. $\ln(e^{\pi}-1)\cdot\ln(e^{\pi}+1) < \pi^2$

γ. $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1) < \ln^2 x$, $x > 2$

59. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$\ln(f(x)) + e^{f(x)} = 2x\cdot\ln x - 3x + 2\sqrt{e} + e \text{, για κάθε } x > 0.$$

Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

60. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{-x}) = f(x + \alpha)$, $\forall\, \alpha\in\mathbb{R}$.

61. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \ln(f(x) + e^{f(x)} = x^3 + x^2 + 2x - 1 \text{ , } \forall\, x\in\mathbb{R} .$$

α. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x^2)$

62. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1 - x) = -f(1 + x) \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.

α. Να εξεταστεί η f, ως προς τη μονοτονία.

β. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta \in(1, +\infty)$ και $\beta\cdot\alpha^{\beta} = \alpha\cdot\beta^{\alpha}$ τότε $\alpha = \beta$.

64. Αν $x\cdot g'(x) > \text{συν}x - g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$g(x) > \text{ημ}x \,/\, x \text{ , για κάθε } x \neq 0 .$$

65. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = g(0)$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)\cdot g(x) > f(x)\cdot g'(x)$ και $g(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η $h(x) = f(x)/g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x\in[0, +\infty)$ και $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x\in(-\infty, 0]$.

66. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > 2\cdot f(x)$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > e^{2x}$, για κάθε $x > 0$.

67. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $f'(x) + f(x) > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x\cdot f(x) > 0$, $\forall\, x \neq 0$.

68. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)/x$, $x > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα.

69. Αν $f(x) = 2x - \left(\frac{1}{e}\right)^x - 2004$ τότε:

Α. **α.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

β. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Β. **α.** Να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

β. Να λύσετε στο $[0, 2\pi)$ την ανίσωση:

$$4\cdot \text{συν}x - \left(\frac{1}{e}\right)^{2\cdot\text{συν}x} > -\left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$$

70. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(x) = -\frac{x\cdot f'(x)}{2}\ln x$, να δείξετε ότι:

α. Η $g(x) = f(x)\cdot \ln^2 x$ είναι σταθερή στο $(1, +\infty)$.

β. Αν $f(e) = 3$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Αν $f(e) = -2$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

71. **α.** Να αποδείξετε ότι $\ln(x + 1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε $x\in[0, +\infty)$.

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ώστε:

$$f^5(x) + 2f^3(x) + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2004$$

Να μελετηθεί η f, ως προς τη μονοτονία της.

72. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει: $f'(x) \le f(1) - f(0)$, $\forall\, x\in(0, 1)$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

73. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

α. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

β. $f(x) = 2^{συνx}$, $0 \le x \le 2\pi$

γ. $f(x) = \ln x / x^2$

δ. $f(x) = e^x / 2x$

ε. $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

στ. $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x-1} & , \ x \ge 1 \\ \ln(1-x) & , \ x < 1 \end{cases}$

74. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 (x + α)^2 (x - β)^2$, με $α, β > 0$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

75. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $α \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση f με:

$$f(x) = x^3 + (α - 1) \cdot x^2 + 2x + 10$$

είναι γνησίως αύξουσα, σε όλο το $\mathbb{R}$.

76. Να βρεθεί $κ \in \mathbb{R}$, ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x \cdot e^{2κ - x}$ να είναι το e .

77. Να βρεθούν οι τιμές των α, β $\in \mathbb{R}$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + αx^2 + βx + 9$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα για $x_1 = 1$ και $x_2 = -3$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = α \cdot \ln 2x + β/x + α$ να έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2 + \ln 2$.

78. **α.** Να μελετήσετε, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, τη συνάρτηση $f(x) = e^x / x^ν$, $ν \in \mathbb{N}^*$.

β. Να αποδείξετε ότι $e^x \ge \left(\dfrac{e \cdot x}{ν}\right)^ν$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$.

79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, σε ένα μόνο σημείο της.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $e^x + x^2 = x + 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $e^x - 1 \ge x \cdot (1 - x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

80. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα, αν ισχύει κάποια από τις επόμενες σχέσεις:

α. $(f(x))^2 + x^2 = 1 + 2x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

β. $f(x) = (x^2 + 2\alpha x + 2) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$.

81. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η f έχει τη μικρότερη κλίση.

81. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - (\lambda - 1) \cdot x^2 + (\lambda + 5) \cdot x - 2$$

δεν έχει ακρότατα.

82. Αν α, β > 0 και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}} + \beta^{\frac{x-1}{x}} \le 2$ για κάθε x > 0, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 1$

83. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(0) = 1$ και $e^{2x} \cdot f(x) - 1 \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α (0, 1).

84. Έστω η συνάρτηση f: $(0, 1) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f'''(\xi) = 0$.

85. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α, β]. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι, ώστε $f(\alpha), f(\beta) \in (f(x_1), f(x_2))$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες, για τις οποίες είναι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, ώστε η f να παρουσιάζει στο ξ_1 τοπικό μέγιστο και στο ξ_2 τοπικό ελάχιστο.

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση $y = f'(x)$ να έχει στο ξ τοπικό ελάχιστο.

87. Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ με την f' να είναι περιττή. Αν η f στο $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ παρουσιάζει ακρότατο, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-\alpha, \alpha)$, ώστε:

$$f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = \frac{2\alpha \cdot f'(\alpha)}{\alpha^2 - x_0^2}$$

88. Έστω g, f παραγωγίσιμες συναρτήσεις, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει:

$$f(x) \le x^2 + g(x) \quad \text{και} \quad f(3) - g(3) = 9$$

να δείξετε ότι ισχύει $f'(3) - g'(3) = 6$.

89. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x + \alpha/x \ge \alpha$, να βρείτε το α.

90. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x) \ge x + 1$ και $f(x) \cdot e^{g(x)} = e^x - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_0 = 0$, τέμνονται κάθετα.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x^\alpha$, $x > 0$, $\lambda > 0$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $f(x) \ge 0$, για κάθε $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή για $x = \alpha$.

β. Να δείξετε ότι $\alpha = e$.

γ. Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.

92. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x) > f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει, για $x_0 = 0$, τοπικό ακρότατο το $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

α. Αν $x < 0$ τότε $f(x) < f'(x)$.

β. Αν $x > 0$ τότε $f(x) > f'(x)$.

93. **α.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = x \cdot \ln x + \lambda \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 η θέση του τοπικού ακρότατου, όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

94. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

β. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ, για την οποία ισχύει $f(x) \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $\lambda \ge 1 + 1/e$ να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα, η συνάρτηση $g(x) = (1 - \lambda)\cdot x - \dfrac{x+1}{e^x}$.

95. Αν $f(x) = x^{\lambda} \cdot e^{2\lambda - x}$, $\lambda > 0$, $x > 0$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο.

β. Να βρείτε την τιμή του λ, για την οποία το μέγιστο τη f γίνεται ελάχιστο.

96. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης :

$$8x^2\sqrt{x} - \alpha\sqrt{x} + 1 = 0 \text{ , αν } \alpha \in \mathbb{R}.$$

97. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^3 - \alpha x^2 - 4x + \alpha = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

98. Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$ και $f'''(x) > 0$, για κάθε x, τότε:

α. Να βρείτε τη μονοτονία των f , f' και f'' .

β. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x) = 0$, $f'(x) = 0$ και $f(x) = 0$ έχουν μοναδική ρίζα.

99. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο [α, β] και ισχύει ότι:

$$\alpha\cdot\beta > 0 \text{ , } \quad \frac{1}{\beta} < f(x) < \frac{1}{\alpha} \quad \text{και} \quad f'(x) \ne \frac{1}{\alpha\beta} \text{ , } \forall\, x \in [\alpha, \beta]$$

να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\alpha\beta\cdot f(x_0) = x_0$$

100. Έστω η $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5\alpha^2$.

α. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}$.

101. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x) = x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ ($\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$)

Να αποδείξετε ότι $x_1\cdot x_2 = 1/3$.

102. Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^{x} + 2i\sqrt{x}$, με $x \geq 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $|z - 3|$.

103. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |z|$, $x \in [0, 1]$, όπου:

$$z = (1 - x)\sqrt{e^{2x} - 1} + i\cdot(1 - x),\ x \in [0, 1]$$

α. Να βρείτε το μιγαδικό, του οποίου το μέτρο γίνεται μέγιστο.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y = x$, τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

104. Αν $(x^2 - 4x)\cdot f'(x) + f(x) = 0$, $\forall\ x \in [0, 4]$ να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 4]$.

105. Να αποδείξετε ότι:

α. ισχύει $x\cdot e^x + 2e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x^2) - e^{-x} + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

106. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες, καθώς και τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων:

α. $h(x) = x^2 + 8/x$

β. $g(x) = 3x^5 - 5x^3$

γ. $g(x) = 1 + 2x^2 + 2x^2\cdot(\ln x - 2)^2$

δ. $f(x) = x\cdot e^{-x}$

107. **α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x\cdot\ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο 1.

108. Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5\alpha x^4 + 10\beta x^3 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει τρία σημεία καμπής, να δείξετε ότι $\alpha^2 > \beta^2$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(x) < x \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{x}{x - f(x)}, \quad \forall\, x > 0 .$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

β. Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

110. Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta\cdot\ln x + \beta x$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει σημείο καμπής το $A\,(1, 3)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

β. Να βρείτε τα διαστήματα, όπου η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

δ. Να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \le x + 3$, $\forall\, x \ge 1$.

111. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και g συνάρτηση τέτοια, ώστε $g(x)\cdot f'(x) = 8\cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f έχει σημείο καμπής το $A\,(2, f(2))$, να αποδείξετε ότι $g'(2) = 8$.

112. Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(2\alpha^2 - 4\alpha + 5)\cdot x^2 + \alpha x + 1 , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

δεν έχει σημεία καμπής.

113. Η συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha) = f'(\alpha) = 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 1$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, β) , $\forall\, \beta > \alpha$.

114. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(x^2 + x + 1)\cdot f''(x) + x\cdot e^{f(x)} = 0 , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

115. Η συνάρτηση f έχει συνεχή 2η παράγωγο και $x\cdot f''(x) - ημ2x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $A\,(0, f(0))$ δε μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f .

116. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με f'' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(1) > 0$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(2 - x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

β. Να βρείτε τα διαστήματα, που η g είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής της C_g.

117. Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)/x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

118. Αν $f(x) = 2e^{\lambda x} - x^2 - 2/\lambda^2$, με $\lambda > 0$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f, για κάθε $\lambda \in (0, +\infty)$.

119. **α.** Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{(Jensen)}$$

β. Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - 1 > \sqrt{(e^{\alpha} - 1)(e^{\beta} - 1)}$, $\forall\ \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}_+$.

120. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο A_f.

β. Να αποδείξετε ότι: $\ln\dfrac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\ln\alpha \cdot \ln\beta}$, $\forall\ \alpha, \beta \in A_f$.

121. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που η γραφική της παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω και περνά από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $3f(x) \geq 4f(3x/4)$.

122. Η συνάρτηση $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι: $f^2(x) + (x - 4)\cdot f(x) + x = 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

DE L' HOSPITAL

123. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ **β.** $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x)$

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx+x\cdot συνx}{x\cdot(e^x-1)\cdot ημx}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}+x+3}$

124. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\cdot ημ\dfrac{1}{x}-x^2\cdot συν\dfrac{1}{x}\right)$

β. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\right)^{εφx}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

δ. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{εφx}$ **ε.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(συνx\right)^{\frac{1}{ημx}}$

στ. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

125. Να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot ημ\frac{1}{x}}{ημx}$

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-ημx}{x+ημx}$

126. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\ln x}{1-x} & ,\ 0<x\neq 1\\[2ex] x-1 & ,\ x=1\end{cases}$$

και ότι $f'(1)=-0{,}5$.

127. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f: ℝ → ℝ, για την οποία ισχύει $(1-συνx)\cdot f(x)=\ln(1+x)-x$, για κάθε $x>-1$. Να βρείτε το f(0) .

128. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f: ℝ → ℝ, για την οποία ισχύει: $x\cdot f(x)+e^{ημx}=f(x)\cdot ημx+e^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το f(0).

129. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $|f(x) - \ln(1 + x^2)| \leq x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0 = 0$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

130. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α. $h(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$ **β.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$

γ. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$

131. Να βρείτε τα α, β, γ $\in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \dfrac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -2$ και $y = 3$.

132. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 2\cdot\ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2\cdot\ln(e^x + 1) - 2\cdot\ln 2$.

133. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g, με $g(x) = x\cdot f(e^{-x})$. Αν η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f στο $x_0 = 0$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

134. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = f(x) + x + \ln(x + 1) - \ln x \text{ , για κάθε } x > 0 .$$

Αν η ευθεία $y = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

135. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{-x} \leq x\cdot f(x) \leq 1 \text{ , για κάθε } x > 0 .$$

Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

136. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 - 12x$ **β.** $f(x) = \eta\mu x + x$, $x \in [-\pi, \pi]$

γ. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ **δ.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

137. Αν Μ το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x) = x\cdot\ln x - \lambda x + 3$, που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση ΟΜ, όταν ο ρυθμός μεταβολής του ΟΜ ως προς λ γίνει μηδέν.

138. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής: η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4, 0)$, η κορυφή Α είναι στο διάστημα $[0, 4]$ του άξονα x΄x και η κορυφή Β είναι σημείο της παραβολής $y = 4x - x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του Β το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο;

ΓΕΝΙΚΕΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

139. Μια συνεχής συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(-2, +\infty)$, δε μηδενίζεται πουθενά και $f(0) = 1/2$. Αν μια αρχική της f είναι η $1/f$ τότε:

α. Να βρείτε τον τύπο της f.

β. Να μελετήσετε την f, ως προς τα κοίλα,

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

140. Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με $\alpha > 0$, παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν για τους μιγαδικούς $z = \alpha + i\cdot f(\alpha)$ και $w = \beta + i\cdot f(\beta)$ ισχύει η σχέση $|z + iw| = |z - iw|$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει, τουλάχιστον έναν, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f\,'(x_0) = f(x_0) / x_0$.

141. **α.** Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$ (1), να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0$.

β. Έστω η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = f(\alpha) + i\cdot f(\beta)$ και $z_2 = f(\beta) - i\cdot f(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα (1), του προηγούμενου ερωτήματος. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \neq \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $f\,'(\xi_1) + f\,'(\xi_2) = 0$.

142. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f: (1, +∞) → ℝ, ισχύει ότι:

$$2\frac{f(x)}{\ln x} + x \cdot f'(x) = 0 \ .$$

Αν f(e) = 1 τότε:

α. Να βρεθεί ο τύπος της f.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι:

$$z \cdot \bar{z} - (z^2 + \bar{z}^2) + \lim_{x \to e}\left(f'(x) + \frac{2}{e} \right) = -1$$

143. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο (0, +∞), για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = g(x) + \alpha \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} \ , \ \forall \ x > 0 \ .$$

Έστω, επιπλέον, ο αριθμός αρνητικός, πραγματικός α και ο θετικός, πραγματικός β, για τον οποίο ισχύει $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \beta$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = αx + α + β είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

β. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = α + βi, α, β ∈ℝ, βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, όταν x → +∞ και το μέτρο του είναι $\sqrt{2}$, τότε να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = z^2/2$ και $w_2 = z^{2003}/2^{1001}$ στη μορφή x + yi .

γ. Να αποδείξετε ότι: f(x) ≤ g(x) + α·e , ∀ x > 0 .

144. Έστω οι μιγαδικοί w = x + yi και $\bar{z} = \bar{w} \cdot (3 + 4i) + w(3 - 4i)$, x, y ∈ℝ.

Α. Να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Β. Να βρεθεί ο μιγαδικός w αν ισχύει ότι $|w|^2 = z - 25$.

Γ. Έστω z = 50 .

α. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M(w), που είναι εικόνες των μιγαδικών w.

β. Να βρεθεί ο μιγαδικός w με το μικρότερο μέτρο.

145. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο [α, β], παραγωγίσιμες στο (α, β), με $g(x) \cdot g'(x) \neq 0$, για κάθε x ∈ (α, β) και οι μιγαδικοί $w = 2\cdot f(\alpha) - i\cdot g(\beta)$, $z = g(\alpha) - 2i\cdot f(\beta)$, ώστε να ισχύει: $|2w + \bar{z}| = |2\bar{w} + z|$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\mathrm{Re}(z\cdot w) = 0$

β. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$.