4ο Γενικό Λύκειο Χανίων

Γ τάξη

Τμήμα ….

2008 - 2009

Μαθηματικά

Θετικής - Τεχνολογική Κατεύθυνσης

Ασκήσεις για λύση

Μ.. Παπαγρηγοράκης

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΡΙΣΜΟΣ

347 Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & \text{αν } x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{αν } x>2 \end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2

348 Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=3$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3

349 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[0.+\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x\le f(x)\le x\sqrt{x}+\eta\mu x$, για κάθε $x\ge 0$.Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

350 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 και ισχύει ότι $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{αν } x\le \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{αν } x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\dfrac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$

351 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 για την οποία ισχύει ότι $f'(1)=2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]=2$

352 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in R$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

353 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o με $f(x_o)=3$, $f'(x_o)=2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2f(x)-6}{x-x_o}$

354 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο 0. Να αποδείξετε ότι

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}=(\alpha-\beta)f'(0)$, $\alpha,\beta\in R^*$

Β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x}=2f(0)f'(0)$

355 ** Θεωρούμε μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)+xy+\alpha$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(0)=-\alpha$

Β) η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

Γ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο R τότε ισχύει ότι $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$ για κάθε $x_o\in R$.

Δ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$ για κάθε $x_o\in R$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ- ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

356 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ Β) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

Γ) $g(x)=\sqrt{x}\eta\mu x+\dfrac{\ln x}{x-1}$ Δ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

Ε). $g(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1+\varepsilon\varphi x}$ Στ) $f(x)=\dfrac{2+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$

Ζ) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x+2}$ Η) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

Θ) $h(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$ Ι) $f(x)=\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

357 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με $P(x)=\left[P'(x)\right]^2$ για κάθε $x\in R$.

358 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $f(x)=x^2\ln x$ τότε $2xf(x)-xf'(x)+x^2=0$

Β) Αν $\dfrac{x}{e^x}$ τότε $x\dfrac{dy}{dx}+(x-1)y=0$

Γ) Αν $y=e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$ τότε $y'-2y-2e^x\sigma\upsilon\nu x=0$

359 Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g(e)=1$ και $g'(e)=2$. Αν $f(x)=x^2g(x)+\dfrac{x^2}{\ln x}$ να βρείτε τον $f'(e)$

360 Να αποδείξετε ότι

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ Β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2^5}{x-2}=80$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

361 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\etaμ^4\sqrt{x}$ β) $f(x)=x^2\etaμ3x$

γ) $f(x)=\etaμ^2x-συν^2x$ δ) $f(x)=εφ^2(4x^3+1)$

ε) $f(x)=συν\left(x^2+3x\right)$ στ) $f(x)=συν\sqrt{\ln x}$

ζ) $f(x)=\etaμ\left(2^x+3^x\right)$ η) $f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(x^3-5\right)^3$

362 A) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων α) $f(x)=x^{\ln x}$ με $x>0$ β) $f(x)=2^{εφx}$

B) Να βρείτε την $\frac{dy}{dx}$ στο x_0 της συνάρτησης:

$y=(u+3)^2$, $u=\sqrt{t-3}$, $t=x^2$ και $x_0=2$.

363 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

A) $f(x)=\begin{cases} x^2\etaμ\frac{1}{x} & αν \quad x\neq 0 \\ 0 & αν \quad x=0 \end{cases}$

B) $f(x)=x^2+|x-3|+2$

364 Έστω η συνάρτηση h με $h(u)=[g^2(u)+1]^3$. Αν $g(3)=-3$ και $g'(3)=-1$, να βρείτε την $h'(3)$.

365 Δίνεται η $f(x)=e^x+x^3+x$, $x\in R$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

B) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

Γ) Αν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $A_{f^{-1}}$, να αποδείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.

366 A) Αν $f(x)=c(x-α)(x-β)(x-γ)$ με $c,α,β,γ\in R$ και $x\neq α,β,γ$ τότε να αποδείξετε ότι:

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-α}+\frac{1}{x-β}+\frac{1}{x-γ}$

B) Να βρεθεί η f' αν $f(x)=\frac{(x^2+5)^3(1+x^4)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

367 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να αποδειχτεί ότι

A) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή

B) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.

Γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή να αποδείξετε ότι

i) $f''(-α)=-f''(α)$.

ii) $f''(0)=0$

Δ) Αν η f είναι άρτια και $g(x)=(x^2+1)f(x)+3x$ τότε $g'(0)=3$

368 Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $g(x)=e^{f(x^2)}$, με $f'(1)\neq 0$, να αποδειχτεί ότι $g'(1)=2g(1)f'(1)$

369 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(2x+3)=x^2+3x+5$ να βρεθεί το $f'(3)$

370 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f(x+y)=f(x)f(y)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x,y\in R$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\ell\in R$ να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

371 Δίνεται ότι οι συναρτήσεις f,h είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $[0,2]$ και ισχύει $2f^2(x)-h^3(x)=-9$ για κάθε $x\in[0,2]$. Αν $f(1)=3$ και $f'(1)=-2$, να βρεθεί το $h'(1)$

372 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και άρτια, να αποδείξετε ότι και συνάρτηση $g(x)=f(f'(x))-f'\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ είναι άρτια.

373 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ισχύει ότι $f(x+y)\text{-}g(x+y)=f(x)\text{-}g(x)$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδειχτεί ότι $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in R$

374 ** Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο:

$x^4 = x\cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{x \text{ προσθετέοι}}$, άρα

$(x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{x \text{ φορές}}\right)'$, δηλαδή

$4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + \ldots + 3x^2}_{x \text{ φορές}}$, δηλ $4x^3=3x^3$, άρα $4=3$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

375 Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι:

A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}=2f''(x)$ για κάθε $x\in R$,

B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{h}=-f''(x)$ για κάθε $x\in R$,

376 Να αποδειχτεί ότι:

A) Αν $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x$ τότε $y''=(1-y')(1+y')$.

B) Αν $y=\eta\mu(\ln x)+\sigma\upsilon\nu(\ln x)$ τότε

$x^2y''+xy'+y=0$

377 Αν η συνάρτηση f έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f\left(x^2\right)=xf(x)$, να αποδείξετε ότι $f''(1)=0$.

378 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, τότε $f^{(\nu)}(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\nu\pi}{2}\right)$

B) Αν $f(x)=xe^x$ τότε $f^{(\nu)}(x)=e^x(x+\nu)$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

379 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1}=7$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία $x+9y+5=0$

380 Αν $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $\alpha>0$, να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ημιάξονες Ox, Oy και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_o=\alpha$ είναι ανεξάρτητο του α.

381 Έστω $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{2}$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των C_f, C_g, αντίστοιχα, που τέμνονται στον άξονα $y'y$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

382 Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+2\alpha x+\beta+\alpha & x\geq 2\\ \dfrac{\gamma}{x+1} & x<2\end{cases}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$ να είναι παράλληλη προς την $2x+y-1=0$

383 Αν $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+3$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η ευθεία ε: $2x-y+4=0$ να είναι εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

384 Αν $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=-x^2+8x-20$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g.

385 Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$

386 Για ποια τιμή του $\alpha\neq 0$ η εφαπτόμενη της C_f $f(x)=x^2-3x$ στο $A(1,f(1))$ είναι εφαπτόμενη της C_g $g(x)=\dfrac{\alpha}{x}$;

387 Αν η ευθεία $y-2x=0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $y=f(x)$, στο σημείο της με $x_o=-1$, να βρεθεί η εφαπτομένη (ε_1) του C_g της g με $g(x)=f\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1=1$

388 Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_g της g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o

389 Να βρείτε τον $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την $y=x$.

390 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $x\ln x\leq f(x)\leq x^2-x$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

391 ** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(2+x)-f(2-x)=-2x$, $\forall x\in R$
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2,f(2))$ είναι κάθετη στην $y=x$.

392 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\alpha\cdot\ln x$, $x>0$, όπου $\alpha\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ και αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο P για κάθε $\alpha\in R$.

393 Μία συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$, για κάθε $x\in R$. Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

394 Έστω f β/θμια πολυωνυμική συνάρτηση ώστε $3f(x+1)-2f(x-2)=x^2+14x-5\ \forall x\in R$

Α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f, οι οποίες άγονται από το σημείο $A\left(1,-\frac{1}{4}\right)$, είναι κάθετες.

395 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g,h:R\to R$. Αν $f(x)\neq 0$, $g(x)=f(x)h(x)$ για κάθε $x\in R$, οι f,g,h είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και $h^2(x)=1-[h'(x)]^2$. Αν $M(x_o,y_o)$ κοινό σημείο των C_f και C_g, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Μ.

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

396 Μια σκάλα μήκους 13m είναι ακουμπισμένη σ' έναν κατακόρυφο τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας έλκεται από τον τοίχο με ρυθμό $2m/sec$. Να βρείτε:

Α) Πόσο γρήγορα γλιστράει το πάνω άκρο της σκάλας όταν το κάτω άκρο απέχει από τον τοίχο 5m.

Β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος όταν το κάτω άκρο της απέχει από τον τοίχο 12m

397 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$ και το σημείο $M(\alpha,\ln\alpha)$, $\alpha>0$.

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ.

Β) Για ποια τιμή του α η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Γ) Αν το σημείο Μ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με σταθερή ταχύτητα $v=2m/sec$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία η εφαπτομένη στο Μ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θ ROLLE

398 Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x & x\ge 0\end{cases}$ να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$ και να βρεθεί $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

399 Έστω η $f:[\alpha,\beta]\to R$ παραγωγίσιμη, ώστε: $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=\alpha^2-\beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\xi)f'(\xi)=\xi$

400 Δίνεται ότι η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\xi f'(\xi)=f(\xi)$

401 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $3\xi^2\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^3-\alpha^3}=f'(\xi)$

402 Να αποδείξετε ότι η κάθε μια από τις παρακά τω εξισώσεις έχει το πλήθος των ριζών που περιγράφεται

Α) Η $x^8=7x+6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο R

Β) Η $e^x=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μέχρι τρείς ρίζες στο R

Γ) Η $x^7+\alpha x^2+\lambda=0$ έχει το πολύ τρείς (ανά δύο άνισες) πραγματικές ρίζες.

403 Να αποδείξετε ότι κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει μοναδική ρίζα στο R

Α) η $x^5+3x-\alpha=0$

Β) η $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ με $\beta^2<\alpha\gamma$, $\alpha\neq 0$

404 Αν $f(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^2-4\right)+1$, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$.

405 Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\ln\left(1+xe^x\right)=x$ Β) $2^x+5^x=2+5x$

406 Α) Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)>0$ και $g'(x)<0$ να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+2x$ και $g(x)=e^{-x}-x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

407 Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x\eta\mu x=1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^x\sigma\upsilon\nu x=-1$

ΘΜΤ

408 Αν f συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1)=-2$ και $|f'(x)|<2$, $\forall x\in(1,5)$ να δείξετε ότι $-10<f(5)<6$

409 ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,20)$, ώστε $\xi=\dfrac{19\cdot\log e}{1+\log 2}$.

410 Η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο R και υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(0)=3\alpha-1$, $f(1)=5\alpha-1$ και $f(2)=7\alpha-1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$ ώστε $f''(\xi)=0$

411 Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$ με $f''(\xi)=0$.

412 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(4x)=4f(x)$ και $f\left(\dfrac{25}{100}\right)=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=12$

413 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $xe^{\frac{1}{x+1}}<x+1<xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$.

Β) $2-\dfrac{e}{\pi}<\ln\pi<\dfrac{\pi}{e}$

Γ) $\dfrac{x}{x+1}\prec\ln(x+1)\prec x$ αν $x>0$

Δ) $x\le e^{x-1}\le 1+(x-1)e$ αν $x\in(1,2)$

414 Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 km. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 km/h.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

415 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν $f(2)-f(1)=f(3)-f(2)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(1,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της f' στο x_o να είναι παράλληλη στον $x'x$.

416 Η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν οι αριθμοί $f(2),f(4),f(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(2,6)$ ώστε $f''(x_o)=0$.

417 Μια ευθεία (ε): $y=\lambda x+\mu$ τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:R\to R$ σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in R$, ώστε $f''(x_0)=0$.

418 Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f'''(x)=0$.

419 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $\dfrac{f(2000)}{f(1999)}=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1999,2000)$.

420 Έστω f παραγωγίσιμη στο R της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να αποδείξετε ότι: $f(1999)+f(2002)<f(2000)+f(2001)$.

421 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν ότι είναι συνεχής στο $[1,e]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ και $f(e)-f(1)=1$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $xf'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,e)$.

422 Δίνονται οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu 2x+\gamma\sigma\upsilon\nu 3x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

423 Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_o)=f(x_o)f''(x_o)$.

424 Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Β) υπάρχουν $\kappa_1,\kappa_2\in(\alpha,\beta)$ με $\kappa_1<\kappa_2$ ώστε $3f'(\kappa_1)+2f'(\kappa_2)=0$

Γ) ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)-f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

425 Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

426 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha)=f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha<\ln\gamma<\ln\beta$, με $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}=e^2$, να δειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in R$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

427 Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με $f(-1)=-1$, $f(1)=1$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν

Α) $-1<\xi_1<\xi_2<1$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

Β) $-1<\kappa_1<\kappa_2<1$ ώστε $\frac{1}{f'(\kappa_1)}+\frac{1}{f'(\kappa_2)}=2$.

428 Η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) αν υπάρχει $x_o \in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)>0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<0$,

Β) αν υπάρχει $x_o \in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)<0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)>0$.

429 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ και ισχύει $f(x^2)=2x f(x),\ \forall x\in[0,\alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)}{2x(\sqrt{\alpha}-1)}$. Δίνεται ότι $\alpha>1$, $f(0)=0$

430 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\beta)<0$ και $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)<0$.

431 Έστω $f(x)=\alpha^2x^6+\beta x^4+x^2+\gamma+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R^*$ με $3\beta^2<5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της .

432 Αν $f(x)=\frac{2^x-2^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$, $x\in(0,\pi)$ τότε:

Α) Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(\eta\mu x,x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x)=2^{\xi}\ln 2$.

Β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-2^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$.

433 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$,ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$, να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $P(2\xi,0)$

434 Η συνάρτηση $f:[1,4]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1)=2$ και $f(4)=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

435 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι προυποθέσεις του θ Rolle στο διάστημα $[2,20]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν

Α) $x_1,\ x_2,\ x_3$ με $2<x_1<x_2<x_3<20$ ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)=0$

Β) $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ με $2<\xi_1<\xi_2<\xi_3<20$ ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=0$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

436 Έστω οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x\in R$ να ισχύουν οι σχέσεις: $f'(x)=f(x)\ln g(x)$ και $g'(x)=-g(x)\ln f(x)$

Α) Να αποδειχτεί ότι είναι σταθερή η συνάρτηση $G(x)=(\ln f(x)-\eta\mu x)^2+(\ln g(x)-\sigma\upsilon\nu x)^2$, $x\in R$.

Β) Αν $f(0)=1$, $g(0)=e$ να βρεθούν οι f,g

437 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε: $f'''(x)+2f'(x)=f''(x)+2f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$. Να αποδείξετε ότι :

Α) Η $g(x)=[f''(x)-f'(x)]^2+2[f'(x)-f(x)]^2$, για κάθε $x\in R$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της .

Β) Η $h(x)=f(x)e^{-x}$, $\forall x\in R$, είναι σταθερή .

Γ) Να βρεθεί ο τύπος της f .

438 Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι σταθερή

439 Να βρείτε συνάρτηση f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

Α) Αν $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ $x\in R$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f(0)$

Β) Αν $f'(1-2x)=7-12x$, $x\in R$ και $f(1)=2$.

Γ) Αν $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x\in R^*$ και $f(-1)=f(1)=2$.

Δ) Αν $f''(x)=4e^{-2x}+6x+2$, $x\in R$, $f'(0)=f(0)=1$

440 Να αποδειχτεί ότι:

Α) αν $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=1$ τότε $f(x)=e^x$ για κάθε x,

Β) αν $\delta''(x)=\delta(x)+5x$ για κάθε $x\in R$, $\delta(0)=1$ και $\delta'(0)=-4$, τότε $\delta(x)=e^x-5x$.

441 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\eta\mu x$, $\alpha\in R$.

442 Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=xf'(x)$, $f(1)=1$ και $f(-1)=2$.

443 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=2$, ώστε να ισχύει $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0$, $\forall\, x\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-e^x\right)^2=1$.

Β) Να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x)-e^x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και να βρείτε τον τύπο της f.

444 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$ για κάθε $x\in R$. Αν $f(3)=7$, να βρεθεί ο τύπος της f.

445 Να βρεθεί συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, αν ισχύει ότι $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$ και $f'(1)=0$

446 Να βρείτε την f, αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)-f(x)=\sqrt{2}\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ και $f(0)=1$.

447 Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=f'(0)=1$, για την οποία ισχύει: $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$ για κάθε $x,y\in R$.

448 Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=(2x+1)f(x)$, $\forall x\in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)=ce^{x^2+x}$

449 Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το $M(0,-3)$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη x_o έχει εφαπτομένη με $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{4x_o}{4x_0^2+1}$

450 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ με $f(0)=0$, που είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι η σταθερή συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

Α) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $(1-\xi)\cdot f'(\xi)=f(\xi)$.

Β) Υπάρχουν α,β με $0<\alpha<\beta<1$, ώστε $Re(z_1\cdot z_2)<0$ με $z_1=\beta+i$, $z_2=f'(\alpha)+i\cdot f'(\beta)$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

451 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων

Α) $f(x)=x\ln x$

Β) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

Γ) $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[0,2\pi)$

Δ) $f(x)=\begin{cases}e^x-ex-1 & x\le 0\\ x^2\ln x & x>0\end{cases}$

452 Εστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με $f'(x)>0$ και $f(1)=-1$, $f(2)=1$. Αν $g(x)=\frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, $0\le x\le 3$, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της g

453 Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

Α) $\ln(x-1)+x^2+x-6=0$

Β) $\ln x+x^2-e=0$

454 Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}+x=0$.

Β) $e^{x+1}+2x-e=0$

455 Έστω $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x)-\frac{f(x)}{x}=2\ln x$, $f(1)=2$

Α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γν αύξουσα

456 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $2-\frac{e}{2}<\ln 2<\frac{2}{e}$

Β) $2\ln(\eta\mu x)<\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

Γ) $e^{\pi}<\pi^{e}$

457 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x\ge 2$

A) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

B) να αποδείξετε ότι:

α) $\ln(e-1)\ln(e+1)<1$

β) $\ln\left(e^{\pi}-1\right)\ln\left(e^{\pi}+1\right)<\pi^2$.

γ) $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1)<\ln^2 x$, $x>2$

458 Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $\ln(f(x))+e^{f(x)}=2x\ln x-3x+2\sqrt{e}+e$ για κάθε $x>0$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

459 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^{-x}\right)=f(x+\alpha)$, $\forall\alpha\in R$.

460 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ για την οποία ισχύει ότι:
$f^3(x)+\ln(f(x))+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1$, $\forall x\in R$

A) Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f\left(1-x^2\right)$

461 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(1-x)=-f(1+x)$ για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει ότι $f'(x)\ne 0$, $\forall x\in R$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

462 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$

A) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η f.

B) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ και $\beta\cdot\alpha^{\beta}=\alpha\cdot\beta^{\alpha}$ τότε $\alpha=\beta$.

463 Αν $xg'(x)>\sigma\upsilon\nu x-g(x)$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι $g(x)\succ\dfrac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x\ne 0$.

464 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R με $f(0)=g(0)$ και για κάθε $x\in R$ να ισχύουν $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ και $g(x)>0$. Να αποδείξετε ότι:

A) η $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι γνήσια αύξουσα στο R..

B) $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

465 Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>2f(x)$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>e^{2x}$ για κάθε $x>0$.

466 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f'(x)+f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε $xf(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$.

467 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$, είναι γνησίως φθίνουσα.

468 Αν $f(x)=2x-\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x}-2004$ τότε:

Αα) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Βα) Να αποδείξετε ότι έχει ακριβώς μια λύση στο R η εξίσωση $f(x)=0$

β) Να λύσετε στο $[0,2\pi)$ την ανίσωση:

$$4\sigma\upsilon\nu x-\left(\frac{1}{e}\right)^{2\sigma\upsilon\nu x}>-\left(\frac{1}{e}\right)^{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$$

469 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x)=-\dfrac{xf'(x)}{2}\ln x$ να δείξετε ότι

A) Η $g(x)=f(x)\ln^2 x$ είναι σταθερή στο $(1,+\infty)$

B) Αν $f(e)=3$ τότε η f είναι γν. φθίνουσα.

Γ) Αν $f(e)=-2$ τότε η f είναι γν. αύξουσα.

470 A) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{5}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

B) Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,+\infty)$ ώστε $[f(x)]^5+2[f(x)]^3+3f(x)=$
$=(x+1)\ln(x+1)-\dfrac{4}{5}x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+2004$.. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της.

471 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει ότι $f'(x)\le f(1)-f(0)$ για κάθε $x\in(0,1)$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

472 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x)=x^2\ln x$ Β) $f(x)=2^{\sigma\upsilon\nu x}$, $0\le x<2\pi$

Γ) $f(x)=\frac{\ell nx}{x^2}$ Δ) $f(x)=\frac{e^x}{2x}$

Ε) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ Στ) $f(x)=\begin{cases}1-e^{x-1}, & x\ge 1\\ \ln(1-x), & x\prec 1\end{cases}$

473 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2(x+\alpha)^2(x-\beta)^2$ με $\alpha,\beta>0$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

474 Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha\in R$, η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+(\alpha-1)x^2+2x+10$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

475 Να βρεθεί ο $\kappa\in R$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=xe^{2\kappa-x}$ να είναι το e.

476 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in R$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

Α) Η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha\,x^2+\beta\,x+9$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα για $x_1=1$ και $x_2=-3$

Β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln 2x+\frac{\beta}{x}+\alpha$ να έχει στη θέση $x_o=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2+\ln 2$.

477 Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^\nu}, \nu\in N^*$

Β) Να αποδείξετε ότι $e^x\ge\left(\frac{ex}{\nu}\right)^\nu$, $\forall x\in(0,+\infty)$

478 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-x-1$.

Α) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα μόνο σημείο της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x^2=x+1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^x-1\ge x(1-x)$, $\forall x\in R$

479 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα αν ισχύει κάποια από τις επόμενες σχέσεις:

Α) $(f(x))^2+x^2=1+2xf(x)$, $\forall x\in R$.

Β) $f(x)=\left(x^2+2\alpha x+2\right)e^x$, $\forall x\in R$, $|\alpha|<1$

480 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η f έχει τη μικρότερη κλίση.

481 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ αν η συνάρτηση $f(x)=x^3-(\lambda-1)x^2+(\lambda+5)x-2$ δεν έχει ακρότατα.

482 Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}}+\beta^{\frac{x-1}{x}}\le 2$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=1$.

483 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν: $f(0)=1$ και $e^{2x}f(x)-1\le 0$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.

484 Έστω η συνάρτηση $f:(0,1)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'''(\xi)=0$.

485 Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha),f(\beta)\in(f(x_1),f(x_2))$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

486 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και έστω ότι η εξίσωσης $f(x)=0$ έχει τρείς πραγματικές ρίζες, τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Υπάρχουν: $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ ώστε η f να παρουσιάζει στο ξ_1 τοπικό μέγιστο και στο ξ_2 τοπικό ελάχιστο.

Β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $y=f'(x)$, να έχει στο ξ τοπικό ελάχιστο

487 Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ με την f' να είναι περιττή. Αν η f στο $x_0\in(-\alpha,\alpha)$ παρουσιάζει ακρότατο, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=\frac{2\alpha f'(\alpha)}{\alpha^2-x_o^2}$

488 Έστω g,f παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει $f(x)\le x^2+g(x)$ και $f(3)-g(3)=9$, να δείξετε ότι ισχύει $f'(3)-g'(3)=6$.

489 Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x+\frac{\alpha}{x}\ge\alpha$, να βρείτε το α.

490 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ οι οποίες

είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x)\geq x+1$ και $f(x)e^{g(x)}=e^x-x$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_o=0$, τέμνονται κάθετα.

491 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x^\alpha$, x>0, λ>0 για την οποία γνωρίζουμε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$. N

Α. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή για $x=\alpha$

Β. Να δείξετε ότι $\alpha=e$.

Γ. Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$.

492 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>f''(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η f παρουσιάζει για $x_o=0$ τοπικό ακρότατο το $f(0)=0$ να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $x<0$ τότε $f(x)<f'(x)$

Β) Αν $x>0$ τότε $f(x)>f'(x)$

493 Α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x\ln x+\lambda x$, $\lambda\in R$

Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0,f(x_0))$, όπου x_o η θέση του τοπικού ακροτάτου όταν το λ διατρέχει το R

494 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}+1-\lambda$, $\lambda\in R$

Α) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

Β) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in R$.

Γ) Αν $\lambda\geq 1+\frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(1-\lambda)x-\frac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

495 Αν $f(x)=x^\lambda\cdot e^{2\lambda-x}$, $\lambda>0$, $x>0$ τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο.

Β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το μέγιστο της f γίνεται ελάχιστο.

496 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2\sqrt{x}-\alpha\sqrt{x}+1=0$ όταν το $\alpha\in R$

497 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-\alpha x^2-4x+\alpha=0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha\in R$

498 Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ και $f'''(x)>0$ για κάθε x, τότε:

Α) να βρείτε την μονοτονία των f, f' και f''.

Β) να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x)=0$, $f'(x)=0$ και $f(x)=0$ έχουν μοναδική ρίζα.

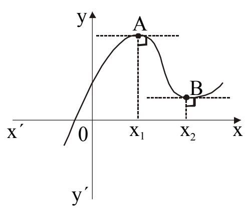
499 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι $\alpha\beta>0$, $\frac{1}{\beta}<f(x)<\frac{1}{\alpha}$ και $f'(x)\neq\frac{1}{\alpha\beta}$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $(\alpha\beta)f(x_0)=x_0$.

500 Έστω η $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5\alpha^2$

Α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ όταν το α διατρέχει το R

501 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+\kappa x^2+x+\lambda$, με $\kappa,\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι $x_1\cdot x_2=\frac{1}{3}$



502 Δίνεται ο μιγαδικός $z=e^x+2i\sqrt{x}$ με $x\geq 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $|z-3|$

503 Έστω η συνάρτηση $f(x)=|z|$, $x\in[0,1]$ όπου $z=(1-x)\sqrt{e^{2x}-1}+i(1-x)$, $x\in[0,1]$.

Α) Να βρείτε το μιγαδικό του οποίου το μέτρο γίνεται μέγιστο.

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y=x$, τέμνοται σε ένα ακριβώς σημείο.

504 Αν $(x^2-4x)f'(x)+f(x)=0$, $\forall x\in[0,4]$ να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

505 Να αποδείξετε ότι:

Α) ισχύει $xe^x+2e^x+1>0$ για κάθε $x\in R$

Β) η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

ΚΥΡΤΕΣ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

506 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες καθώς και τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

Α) $h(x)=x^2+\frac{8}{x}$ Β) $g(x)=3x^5-5x^3$

Γ). $g(x)=1+2x^2+2x^2(\ln x-2)^2$ Δ) $f(x)=xe^{-x}$

507 Α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο 1.

508 Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=x^5+5\alpha x^4+10\beta x^3+x^2$, $x\in R$, $\alpha,\beta\in R$ έχει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>\beta$.

509 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(x)<x$ και $f'(x)=\frac{x}{x-f(x)}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Β) Η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

510 Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$ με $\alpha,\beta\in R$, έχει σημείο καμπής το $A(1,3)$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$:

Β) Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

Δ) Να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\le x+3$, $\forall x\ge 1$.

511 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και g συνάρτηση ώστε να ισχύει $g(x)\cdot f'(x)=8f(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_f έχει σημείο καμπής το $A(2,f(2))$ να αποδείξετε ότι $g'(2)=8$.

512 Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης: $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3(2\alpha^2-4\alpha+5)x^2+\alpha x+1$ $\alpha\in R$ δεν έχει σημεία καμπής.

513 Η συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι: αν υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=1$, τότε εξίσωση $f(x)=1$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α,β), για κάθε $\beta>\alpha$

514 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(x^2+x+1)f''(x)+xe^{f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

515 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $xf''(x)-\eta\mu 2x=0$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι το $A(0,f(0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f

516 Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''\searrow$ στο R, $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, $f'(1)>0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(2-x)$, $\forall x\in R$.

Α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

Β) Να βρείτε τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g

517 Έστω μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ η οποία είναι κυρτή με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

518 Αν $f(x)=2e^{\lambda x}-x^2-\frac{2}{\lambda^2}$, $\lambda>0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f, για κάθε $\lambda\in(0,+\infty)$

519 Α) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (Jensen)

Β) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}-1>\sqrt{(e^{\alpha}-1)(e^{\beta}-1)}$, $\forall\alpha\neq\beta\in R_+$

520 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln(x))$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο A_f

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{\ln\alpha.\ln\beta}$, $\forall\alpha,\beta\in A_f$

521 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ που η γραφική της παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω και περνά από την αρχή των αξόνων. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι: $3f(x)\ge 4f\left(\frac{3x}{4}\right)$

522 Η συνάρτηση $f:(0,1)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f^2(x)+(x-4)f(x)+x=0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL

523 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

Α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ Β) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$ Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Ε) $\lim\limits_{x\to0}\frac{ημx+xσυνx}{x\left(e^x-1\right)ημx}$ Στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}+x+3}$

524 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3ημ\frac{1}{x}-x^2συν\frac{1}{x}\right)$ Β) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\right)^{εφx}$

Γ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ Δ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{εφx}$

Ε) $\lim\limits_{x\to\infty}(συνx)^{\frac{1}{ημx}}$ Στ) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

525 ****Να υπολογιστούν τα όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ Β) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2ημ\frac{1}{x}}{ημx}$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-ημx}{x+ημx}$

526 Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x}, & 0\prec x\neq1\\ -1, & x=1\end{cases}$ και ότι $f'(1)=-0,5$.

527 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $(1-συνx)f(x)=\ln(1+x)-x$ για κάθε $x>-1$. Να βρείτε το $f(0)$.

528 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{ημx}=f(x)ημx+e^x$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $f(0)$.

529 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι $\left|f(x)-\ln\left(1+x^2\right)\right|\le x^2$, $x\in R$, να δειχθεί ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_o=0$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

530 Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

Α) $h(x)=\frac{e^x}{x^3}$ Β) $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ Γ) $f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

531 Να βρείτε τα $α,β,γ\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\frac{(α-1)x^2+βx+5}{3x+γ}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$.

532 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x-2\ln2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=2\ln\left(e^x+1\right)-2\ln2$

533 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και η συνάρτηση g με $g(x)=xf\left(e^{-x}\right)$. Αν η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f στο $x_o=0$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

534 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ με $g(x)=f(x)+x+\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

535 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le1$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

536 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=x^3-12x$ Β) $f(x)=ημx+x$, $x\in[-π,π]$

Γ) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ Δ) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

537 Αν Μ το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x)=x\ln x-λx+3$ που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση ΟΜ όταν ο ρυθμός μεταβολής του ΟΜ ως προς $λ$ γίνει μηδέν.

538 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α=90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4,0)$, η κορυφή Α είναι στο διάστημα $[0,4]$ του άξονα x'x και η κορυφή Β είναι σημείο της παραβολής $y=4x-x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του Β το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο;

ΓΕΝΙΚΕΣ – ΣΥΝΔΙΑΣΤΚΕΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

539 Μια συνεχής συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(-2,+\infty)$, δε μηδενίζεται πουθενά και $f(0)=\frac{1}{2}$. Αν μια αρχική της f είναι η $\frac{1}{f}$ τότε:

A) να βρείτε τον τύπο της f,

B) να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα,

Γ) να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

540 Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ($\alpha>0$), παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν για τους μιγαδικούς $z=\alpha+if(\alpha)$ και $w=\beta+if(\beta)$ ισχύει η σχέση $|z+iw|=|z-iw|$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει (τ.ε) $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}$

541 A) Αν για τους μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει η σχέση: $\left||z_1|-|z_2|\right|=|z_1+z_2|$, (1) να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0$

B) Έστω η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=f(\alpha)+if(\beta)$ και $z_2=f(\beta)-if(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα (1) του ερωτήματος (A). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\neq\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

542 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, ισχύει ότι $2\cdot\frac{f(x)}{\ln x}+x\cdot f'(x)=0$. Αν $f(e)=1$ τότε

A) Να βρεθεί ο τύπος της f.

B) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι $z\cdot\overline{z}-\left(z^2+\overline{z}^2\right)+\lim\limits_{x\to e}\left(f'(x)+\frac{2}{e}\right)=-1$

543 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=g(x)+\alpha\cdot x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x. Ο αριθμός α είναι ένας αρνητικός πραγματικός και ο β ο θετικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\beta$.

A. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\alpha x+\alpha+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

B. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν $x\to+\infty$ και το μέτρο του είναι $\sqrt{2}$ να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1=\frac{z^2}{2}$ και $w_2=\frac{z^{2003}}{2^{1001}}$ στη μορφή x+ψi.

Γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\le g(x)+\alpha\cdot e$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x.

544 Έστω οι μιγαδικοί $w=x+yi$ και $\overline{z}=\overline{w}(3+4i)+w(3-4i)$ όπου $x,y\in R$.

A) Να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός

B) Να βρεθεί ο μιγαδικός w αν ισχύει ότι $|w|^2=z-25$.

Γ) Έστω $z=50$

α) Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(w)$ που είναι εικόνες των μιγαδικών w.

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός w με το μικρότερο μέτρο.

545 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, συνεχείς το $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g(x)g'(x)\neq0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και οι μιγαδικοί $w=2f(\alpha)-ig(\beta)$, $z=g(\alpha)-2if(\beta)$ ώστε να ισχύει ότι $|2w+\overline{z}|=|2\overline{w}-z|$. Να αποδείξετε ότι

A) $\mathrm{Re}(z\cdot w)=0$ B) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=0$