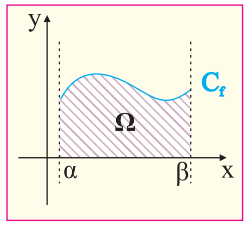
Μάθημα 20

Εμβαδόν

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

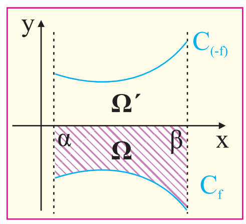


1.α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f (γραφική παράσταση της f) τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Παρατήρηση

Το χωρίο Ω ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha\leq x\leq\beta$ και $0\leq y\leq f(x)$.



β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\leq 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta [-f(x)]dx\,.$$

Ισοδύναμη έκφραση του $E(\Omega)$ **:**

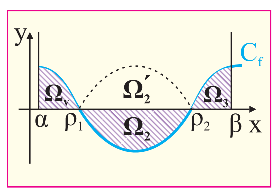
Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύουν $\alpha\leq x\leq\beta$ και $f(x)\leq y\leq 0$.

γ. Αν μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

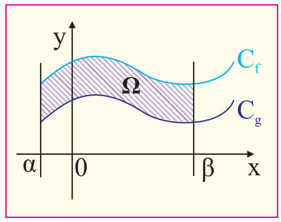
$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx\,.$$

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$
$$=\int_\alpha^{\rho_1} f(x)dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta} f(x)dx$$



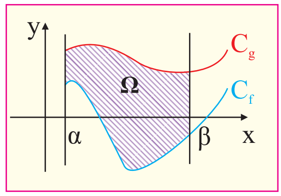
2. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[\alpha,\beta]$ και από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.



Ειδικότερα:

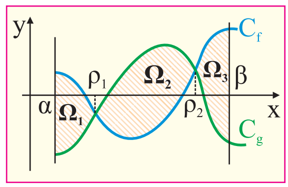
α. Αν $f(x)\geq g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$



β. Αν $f(x)\leq g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[g(x)-f(x)]dx$



γ. Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

τότε $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$

$\int_{\alpha}^{\rho_1}(f(x)-g(x))dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}(g(x)-f(x))dx+\int_{\rho_2}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$.

Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2-3x+2$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=3$.

Λύση

Βρίσκουμε που τέμνει η C_f τον $x'x$. Θέτουμε: $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

Βρίσκουμε το πρόσημο της f δηλαδή

-∞	1		2	-∞
+		−		+

$f(x)>0\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2+\infty)$ και

$f(x)<0\Leftrightarrow x^2-3x+2<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$

Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=\frac{11}{6} \text{ τ.μ.}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την C_f, την C_g τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Αποδεικνύουμε ότι η $(f-g)$ είναι συνεχής.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $(f-g)$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $g(x)=4x-x^2$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=3$.

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g:

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=4x-x^2\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$.

Είναι $f(x)-g(x)=x^2-4x+x^2=2x^2-4x=2x(x-2)$ οπότε

$f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ και

$f(x)-g(x)\leq 0\Leftrightarrow 2x(x-2)\leq 0\Leftrightarrow x\in[0,2]$

	0		2	
+	o	–	o	+

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[-1,0]$ είναι $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

για κάθε $x\in[0,2]$ είναι $f(x)-g(x)\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$

για κάθε $x\in[2,3]$ είναι $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Έτσι $E=\int_{-1}^0 (f(x)-g(x))dx+\int_0^2 (g(x)-f(x))dx+\int_2^3 (f(x)-g(x))dx=8$ τ.μ.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

α. Για να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$, θα εφαρμόσουμε τον τύπο $E=\int_{\rho_1}^{\rho_\kappa}|f(x)|dx$, όπου ρ_1 η μικρότερη ρίζα της f και ρ_κ η μεγαλύτερη ρίζα της f.

β. Ομοίως όταν ζητείται να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την C_g, θα εφαρμόσουμε τον τύπο $E=\int_{\rho_1}^{\rho_\kappa}|f(x)-g(x)|dx$, όπου ρ_1, ρ_κ η μικρότερη και μεγαλύτερη αντίστοιχα ρίζα της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^3-x$ και τον x΄x.

Λύση

x		-1		0		1	
f(x)	−		+		−		+

Βρίσκουμε που τέμνει η C_f τον x΄x. Έίναι

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$.

Βρίσκουμε το πρόσημο της f δηλ.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x^3-x>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1+\infty)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x^3-x<0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

Άρα το εμβαδόν είναι: $E=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=$

$$=\int_{-1}^{0}x^3dx-\int_{-1}^{0}xdx-\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{0}^{1}xdx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3x^4+x^2$ και $g(x)=2x^4+2x^2$.

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g :

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^4+x^2=2x^4+2x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

- Μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$:

Είναι $f(x)-g(x)=3x^4+x^2-2x^4-2x^2=x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$

	-1		1	
+	ο	−	ο	+

$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$f(x)-g(x)\leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[-1,1]$: $f(x)-g(x)\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$

Άρα $E=\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx=\int_{-1}^{1}(-x^4+x^2)dx=...=\frac{4}{15}$ τ.μ.

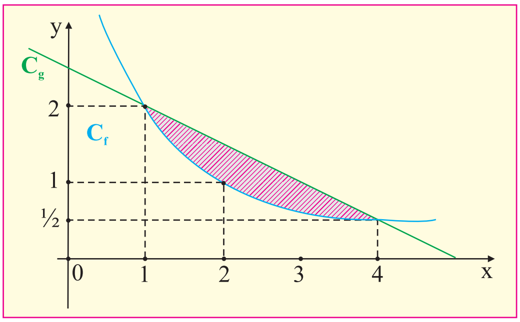
Παράδειγμα 5

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{2}{x}$ **και την ευθεία** $x+2y-5=0$ **.**

Λύση

- Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων της $f(x)=\frac{2}{x}$ και της ευθείας $x+2y-5=0$.

Είναι



$$\left.\begin{matrix} f(x)=\frac{2}{x} \\ x+2y-5=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{2}{x} \\ y=\frac{5-x}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x}=\frac{5-x}{2} \Leftrightarrow 4=5x-x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Είναι $E=\int_1^4 (g(x)-f(x))dx=\int_1^4\left(\frac{5-x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{1}{4}(15-8\ell n4)$ τ.μ.

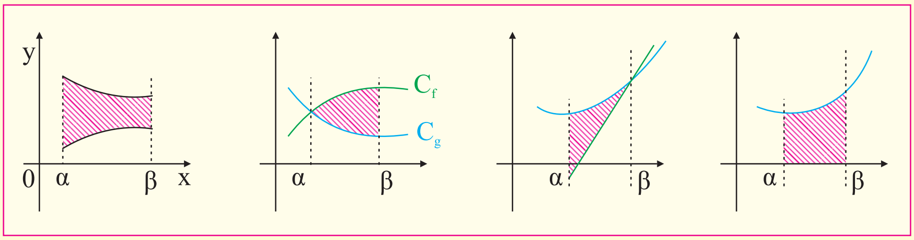
Κατηγορία – Μέθοδος 4

Στις περιπτώσεις που ο υπολογισμός του εμβαδού δεν είναι άμεσα υπολογίσιμος από τα προηγούμενα, χωρίζουμε την επιφάνεια σε επι μέρους χωρία που την επικαλύπτουν και είναι υπολογίσιμα. Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι το άθροισμα των επι μέρους χωρίων.

Στην ίδια λογική της **επικάλυψης** είναι και η περίπτωση που βρίσκουμε το ζητούμενο εμβαδόν από την διαφορά υπολογίσιμων χωρίων.

Στον καθορισμό των χωρίων αποφασιστικό ρόλο παίζουν **οι γραφικές παραστάσεις** των συναρτήσεων του προβλήματος.

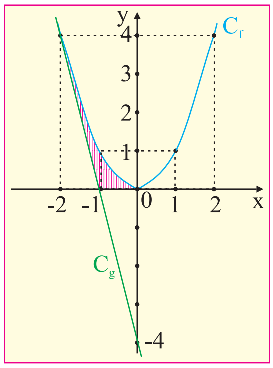
Τα χωρία θα καθορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις μόνο δύο συναρτήσεων και δύο κατακόρυφες ευθείες όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα.



Παράδειγμα 6

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-2,4)$ και τον άξονα x΄x.

Λύση



Βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(-2,4)$. Είναι

$$\left.\begin{array}{l} x_0=-2 \\ f(x_0)=f(-2)=(-2)^2=4 \\ f'(x)=2x \\ f'(x_0)=f'(-2)=-4 \end{array}\right\} \text{ και η εξίσωση της εφαπτομένης:}$$

ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-4=-4(x+2) \Leftrightarrow$

$y=-4x-8+4 \Leftrightarrow y=-4x-4$. Θέτουμε $g(x)=y=-4x-4$

σχεδιάζουμε την C_f και την ευθεία ε.

Βρίσκουμε που τέμνει η ευθεία τον x΄x. Για $y=0$ έχουμε $x=-1$.

Είναι $E=\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx=\dfrac{2}{3}$ τ.μ.

Παράδειγμα 7

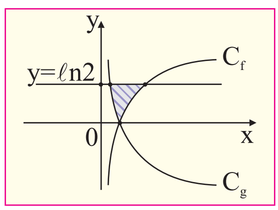
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ell nx$, $g(x)=\ell n\dfrac{1}{x}$ και την ευθεία $y=\ell n2$.

Λύση

Είναι $x>0$. Θέτουμε $h(x)=y=\ell n2$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g, h (ανά δύο).

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ell nx=\ell n\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$



$\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \text{ απορ.} \end{cases}$

Επίσης $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \ell nx=\ell n2 \Leftrightarrow x=2$

και $g(x)=h(x) \Leftrightarrow \ell n\dfrac{1}{x}=\ell n2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

- Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f, g, h με:

$f(x)=\ell nx$, $\quad g(x)=\ell n\dfrac{1}{x}=-\ell nx$, $\quad h(x)=y=\ell n2$

Είναι $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(h(x)-g(x))dx+\int_{1}^{2}(h(x)-f(x))dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ell n2+\ell nx)dx+\int_{1}^{2}(\ell n2-\ell nx)dx=$

$$=\ell n2\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ell nxdx+\ell n2\int_{1}^{2}dx-\int_{1}^{2}\ell nxdx=$$

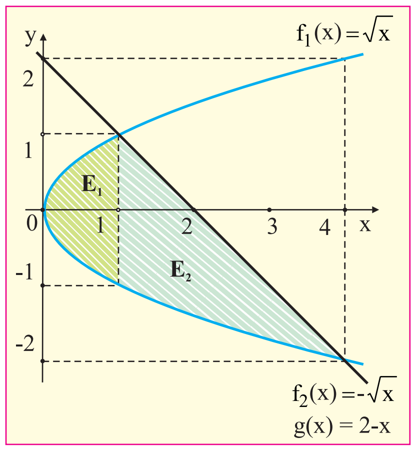
$$=\ell n2[x]_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x)'\ell nxdx+\ell n2[x]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}(x)'\ell nxdx=$$

$$=\ell n2\left[1-\frac{1}{2}\right]+[x\ell nx]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+\ell n2[2-1]-[x\ell nx]_{1}^{2}+\int_{1}^{2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{\ell n2}{2}+\left(1\ell n1-\frac{1}{2}\ell n\frac{1}{2}\right)-[x]_{\frac{1}{2}}^{1}+\ell n2-(2\ell n2-1\ell n1)+[x]_{1}^{2}=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y=2-x$ και $y^2=x$.



Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραμμών:

$$\left.\begin{array}{l} y=2-x \\ y^2=x \end{array}\right\}(2-x)^2=x \Leftrightarrow 4-4x+x^2-x=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=4 \end{cases}$$

- Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις της ευθείας $y=2-x$ και της παραβολής $y^2=x$.

Είναι $E=2E_1+E_2$

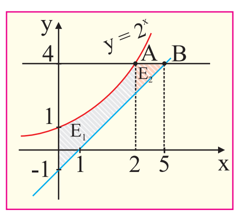
$$E=2\int_0^1 f_1(x)dx+\int_1^4(g(x)-f_2(x))dx=2\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^4(2-x+\sqrt{x})dx=$$

$$2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx+2\int_1^4 xdx+\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{27}{6}\ \text{τ.μ.}.$$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις: $y=4$, $y=2^x$, $x=0$, $y=x-1$.



Λύση

Έστω Α το σημείο τομής της 2^x και της $y=4$ οπότε $2^x=4 \Leftrightarrow x=2$

Έστω Β το σημείο τομής της $y=4$ και $y=x-1$ οπότε $x=5$.

Το Ε χωρίζεται σε E_1 και E_2 : $E = E_1 + E_2 = \int_0^2 [2^x - (x-1)]dx + \int_2^5 [4-(x-1)]dx =$

$$= \left[\frac{2^x}{\ell n2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \left(\frac{3}{\ell n2} + \frac{9}{2}\right) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$ και το σημείο $A(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη στο Α.

Λύση

Η εφαπτομένη στο $A(2\alpha, 8\alpha^2)$ έχει εξίσωση $y - 8\alpha^2 = 8\alpha(x - 2\alpha)$ αφού $f(2\alpha) = 4 \cdot 2\alpha = 8\alpha$ Είναι $y = 8\alpha x + 8\alpha^2 - 16\alpha^2 \Leftrightarrow y = 8\alpha x - 8\alpha^2$

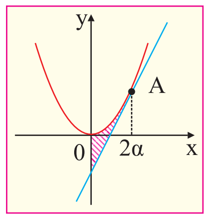
επειδή $f''(x) = 8 > 0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα στο R

οπότε $f(x) > g(x) = y = 8\alpha x - 8\alpha^2$.

Το εμβαδόν του χωρίου είναι :

$$E = \int_0^{2\alpha} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{2\alpha} (2x^2 - 8\alpha x + 8\alpha^2)dx = \frac{16\alpha^3}{3} \text{ τ.μ.}.$$

Η σχετική θέση της C_f με την εφαπτομένη της $y = g(x)$ σε σημείο Α καθορίαζεται από το πρόσημο της $f''(x)$. Έτσι αν $f''(x) > 0$, $x \in \Delta$ τότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος Δ.



Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ και $M\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από το Μ στην καμπύλη της f και στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις παραπάνω εφαπτόμενες.

Λύση

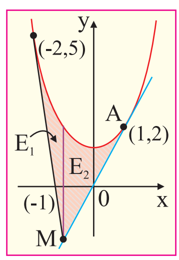
Έστω (x_0, y_0) ένα σημείο επαφής. Το $M \notin C_f$, άρα βρίσκουμε τα σημεία επαφής λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$, όπου (x, y) οι συντεταγμένες του Μ, δηλαδή

$$\left.\begin{matrix} -1 - y_0 = -x_0 - 2x_0^2 \\ y_0 = x_0^2 + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x = g_1(x) \\ y = -4x - 3 = g_2(x) \end{cases}$$

Η ευθεία $x = -\frac{1}{2}$ χωρίζει το χωρίο σε δύο χωρία, οπότε:

$$E = E_1 + E_2 = \int_{-2}^{-1/2} [f(x) - g_2(x)]dx + \int_{-1/2}^{1} [f(x) - g_1(x)]dx =$$

$$\int_{-2}^{-1/2} [x^2 + 1 - (-4x - 3)]dx + \int_{-1/2}^{1} (x^2 + 1 - 2x)dx = \frac{57}{8} - \frac{33}{8} = 3 \text{ τ.μ.}$$



Άσκηση 4

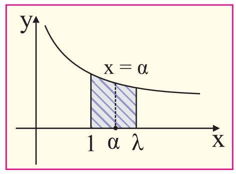
Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ $(\lambda>0)$.

i. Να υπολογίσετε το $E(\lambda)$.

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$.

iii. Να προσδιορίσετε την ευθεία $x=\alpha$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

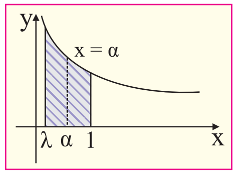


i. Η f είναι συνεχής και $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις $\lambda>1$ και $0<\lambda<1$.

Αν $\lambda>1$ τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)dx=\int_1^\lambda\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda=-\frac{1}{\lambda}+1$

Αν $0<\lambda<1$ τότε $E(\lambda)=\int_\lambda^1 f(x)dx=\int_\lambda^1\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_\lambda^1=-1+\frac{1}{\lambda}$



ii. Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}+1\right)=1$ και

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\lambda}\right)=+\infty$

iii. Για τον προσδιορισμό του α θα πρέπει να ισχύει:

Αν $\lambda>1$, τότε $\int_1^\alpha f(x)dx=\frac{E(\lambda)}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\alpha}+1=\frac{-\frac{1}{\lambda}+1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\alpha}=\frac{\lambda-1}{2\lambda}-1\Leftrightarrow\alpha=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$.

Αν $0<\lambda<1$, τότε $\int_\alpha^1 f(x)dx=\frac{E(\lambda)}{2}\Leftrightarrow-1+\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\frac{1}{\lambda}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}=\frac{1-\lambda}{2\lambda}+1\Leftrightarrow\alpha=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$.

Άσκηση 5

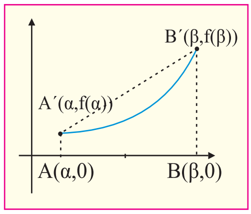
Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$, $f(\alpha)>0$ και γνησίως αύξουσα με τα κοίλα άνω. Να δειχθεί η σχέση: $f(\alpha)(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$

Λύση

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$:

Είναι $\alpha\le x\Leftrightarrow f(\alpha)\le f(x)$ οπότε $\int_\alpha^\beta f(\alpha)dx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ή $(\beta-\alpha)f(\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx$ (1)

Πρέπει να δείξουμε την ανισότητα $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$. Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ η χορδή Α΄Β΄ είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f. Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου με κορυφές τα σημεία $A'(\alpha,f(\alpha))$, $B'(\beta,f(\beta))$, $B(\beta,0)$, $A(\alpha,0)$ είναι μεγαλύτερο του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την $x=\alpha$, $x=\beta$, τον x΄x και την C_f και είναι ίσο με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Είναι



$$E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{(AA'+BB')AB}{2} = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) \text{ οπότε}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) \quad (2).$$ Από (1) και (2) εδείχθη το ζητούμενο.

Άσκηση 6

i. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις $x=2$, $x=3$ για $f(x)=x^2+2x-3$.

ii. Ομοίως για την $f(x)=x^2-2x$ και $x=0$, $x=3$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $f(x)\ge 0$, για $x\in[2,3]$.

Άρα $E=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3(x^2+2x-3)dx=\frac{25}{3}$ τ.μ..

ii. Προφανώς η f έχει ρίζες 0, 2 και $f(x)\ge 0$, για $x\in[2,3]$ ενώ $f(x)\le 0$, για $x\in[0,2]$.

Άρα $E=\int_0^2[-f(x)]dx+\int_2^3 f(x)dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx=\frac{8}{3}$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in R$.

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και τα σημεία καμπής της C_f

iii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική ασύμπτωτη την $y=0$.

iv. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση της f.

v. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, την οριζόντια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ με $\lambda>0$ να δείξετε ότι $E(\lambda)=2\int_0^\lambda f(x)dx$.

vi. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο των παραγωγίσιμων στο R συναρτήσεων x και $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Η e^{-x^2} είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση της $(-x^2)$ με την e^x. Είναι $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

ii. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο των $e^{-\frac{x^2}{2}}$ και $(1-x^2)$

Είναι $f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)(1-x^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x)$

$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)=e^{-\frac{x^2}{2}}[x(x^2-3)]$

με $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$

Η f είναι κυρτή όταν $f''(x)\geq 0$.

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	Σ.Κ.	∪

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $[-\sqrt{3},0]$, $[\sqrt{3},+\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα σημεία με τετμημένες $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$

iii. Η $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ως συνεχής συνάρτηση στο R **δεν** έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}x}=0$

Άρα ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η $y=0\cdot x+0$ ή $y=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\underset{x^2=y}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}e^{-\frac{y}{2}}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}x}=0$.

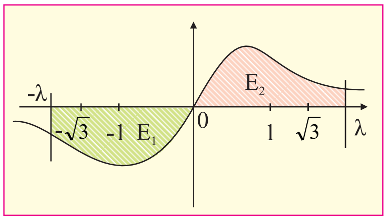
Άρα ασύμπτωτη και στο $-\infty$ είναι η $y=0$.

Υπενθύμιση
Η $y=\alpha x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στην C_f στο $+\infty$ όταν $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x]$

iv. **Πίνακας μεταβολών**

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−		−	0	+		+	0	−		−	
$f''(x)$		−	0	+		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$		↘		↘		↗		↗		↘		↘	
			ΣΚ		ΤΕ		ΣΚ		ΤΜ		ΣΚ		

Η γραφική παράσταση



v. Η f είναι **περιττή** αφού για κάθε $x \in R$ είναι $f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -f(x)$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τις ευθείες $x = -\lambda$, $x = 0$ και την $y = 0$ είναι $E_1 = \int_{-\lambda}^{0} -f(x)dx$ αφού $f(x) < 0$. (Θέτουμε $x = -t$ οπότε $dx = -dt$ για $x = 0$ είναι $t = 0$ ενώ για $x = -\lambda$ είναι $t = \lambda$).

Έτσι $E_1 = \int_{\lambda}^{0} -f(-t)(-dt) = -\int_{\lambda}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{\lambda} f(t)dt = E_2$ επομένως

$E = E_1 + E_2$ οπότε $E(\lambda) = 2\int_{0}^{\lambda} f(x)dx$.

vi. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{0}^{\lambda} f(x)dx = \int_{0}^{\lambda} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\int_{0}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)' dx =$

$= -\int_{0}^{\lambda}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx = -\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\lambda} = -\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}} - e^0\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ οπότε $E(\lambda) = 2\left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)$ και

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 2\left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right) = 2(1-0) = 2$ τ.μ.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ και τον άξονα $x'x$.

2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = |\ell nx|$ και την ευθεία $y = 1$.

3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^3 - 5x^2$, $g(x) = x^3 - 4x^2$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$.

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{6}{x-1} - 3$ και την ευθεία $3x + y - 9 = 0$.

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^3+x^2-x-2$.

6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $f(x)=e^x$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,e)$. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δύο αυτές εφαπτόμενες και την C_f.

8. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=4-x^2$, $g(x)=2x-1$ και των ευθειών $x=-2$ και $x=2$.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x}$, την εφαπτομένη της στο $(1,1)$ και τον άξονα $x'x$.

10. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\frac{1}{3}(x+1)$ αντίστοιχα.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

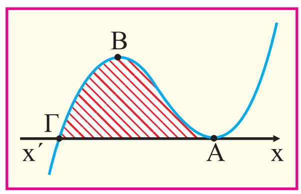
Α. Το σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της καμπύλης $y=x^3-12x+16$.

Να υπολογίσετε:

α. Τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β. Τις συντεταγμένες του Γ, του σημείου δηλαδή που η καμπύλη $y=x^3-12x+16$ τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



Β. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Με $E(\kappa)$, $\kappa\in(0,1)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από τις ευθείες $x=0$, $x=1$ την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y=f(\kappa)$. Να βρεθεί ο κ ώστε το $E(\kappa)$ να γίνεται ελάχιστο.