Μάθημα 19

Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης
Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: A \to R$ με $A=[\alpha,\beta]$. Χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα που το καθένα έχει μήκος $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Σε κάθε υποδιάστημα που σχηματίζεται π.χ. στο $[x_{\kappa-1},x_{\kappa}]$, $\kappa=1,2,....,\nu$ θεωρούμε τυχαίο σημείο ξ_{κ} (μπορεί να είναι και ένα από τα άκρα) και σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$S_{\nu}=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+...+f(\xi_{\nu})\Delta x=\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$$

το οποίο ονομάζουμε **άθροισμα Riemann της f στο** $[\alpha,\beta]$. Το σύνολο των άκρων $x_0=\alpha<x_1<x_2<...<x_{\nu}=\beta$ των διαστημάτων ονομάζουμε διαμέριση P_{ν} του $[\alpha,\beta]$ και τα $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{\nu}$ **ενδιάμεσα σημεία** της διαμέρισης. Το προηγούμενο άθροισμα έχει όριο όταν $\nu\to+\infty$ το οποίο ονομάζουμε **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[\alpha,\beta]$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{\nu}$ της διαμέρισης P_{ν} και το συμβολίζουμε με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Έτσι έχουμε:
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$$

Τα α,β ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης**. Αν ως ξ_{κ} επιλέξουμε τα δεξιά άκρα των διαστημάτων τότε $\xi_{\kappa}=\alpha+\kappa\Delta x=\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και ο προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\right]$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της f τον άξονα x΄x και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Άρα με $f(x)\geq 0$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$.

2. Όπως ορίστηκε το ολοκλήρωμα προϋποθέτει ότι $\alpha<\beta$. Μια επέκταση του ορισμού όταν $\alpha\geq\beta$ γίνεται ως εξής:

Αν $\alpha=\beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$.

Αν $\alpha>\beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=-\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$.

3. α. $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $\lambda\in R$.

β. $\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, όπου $\lambda,\mu\in R$.

4. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$, όπου f συνεχής στο Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$.

Σχόλιο: Δεν είναι απαραίτητο το γ να είναι μεταξύ των α, β αρκεί να ανήκει στο Δ.

π.χ. $\int_{2}^{6} f(x)dx=\int_{2}^{10} f(x)dx+\int_{10}^{6} f(x)dx$, αν 2, 6, 10 ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και η f είναι συνεχής σ' αυτό.

5. Αν $\alpha\leq\beta$ και f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

6. $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$, $\alpha\leq\beta$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

7. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx=c(\beta-\alpha)$.

8. Με χρήση των προηγούμενων ιδιοτήτων αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με m, M ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο της f, αντίστοιχα στο $[\alpha,\beta]$ τότε $m\leq f(x)\leq M$ οπότε

$\int_{\alpha}^{\beta} m\,dx\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta} M\,dx$ δηλαδή $m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$

Για να δείξουμε μια διπλή ανισότητα με ολοκλήρωμα μελετούμε την υπό ολοκλήρωση (ή ολοκληρωτέα) συνάρτηση ως προς τα ακρότατα και εφαρμόζουμε την ιδιότητα 8.

π.χ. Να δειχθεί ότι $4\leq\int_{1}^{3} 2^x dx\leq 16$.

Έχουμε $f(x)=2^x$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$ οπότε: $m=2^1=2$, $M=2^3=8$.

Άρα $2\leq 2^x\leq 8$ για κάθε $x\in[1,3]$ τότε $\int_{1}^{3} 2\,dx\leq\int_{1}^{3} 2^x dx\leq\int_{1}^{3} 8\,dx$ δηλαδή

$2(3-1)\leq\int_{1}^{3} 2^x dx\leq 8(3-1)\Leftrightarrow 4\leq\int_{1}^{3} f(x)dx\leq 16$

Συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκλήρωμα με μεταβλητά όρια ολοκλήρωσης

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha,x\in\Delta$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right]'=f(x)$.

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Παρατήρηση: Τη μεταβλητή x ονομάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης και αν τα όρια ολοκλήρωσης είναι σταθεροί αριθμοί το αποτέλεσμα θα είναι σταθερό ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Αν όμως εκτός της μεταβλητής ολοκλήρωσης υπάρχει στη συνάρτηση και άλλη μεταβλητή και σταθερά όρια τότε το εξαγόμενο είναι συνάρτηση της άλλης μεταβλητής

π.χ. $\int_{\alpha}^{\beta}(x-t)f(t)dt$ είναι συνάρτηση του x ενώ το $\int_{\alpha}^{\beta}(x-t)f(x)dx$ είναι συνάρτηση του t.

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ.)

Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f στο Δ και f συνεχής στο Δ και α,β ανήκουν στο Δ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης στο ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανάλογες των μεθόδων που αναφέραμε στο αόριστο ολοκλήρωμα. Υπενθυμίζουμε:

1. Μέθοδος παραγουσών
2. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.
3. Μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ολοκλήρωση με τη μέθοδο των παραγουσών.
Αφορά τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων για τις οποίες γνωρίζουμε την παράγουσα.

Παράδειγμα 1
Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 e^{3x+4}dx$, **ii.** $\int_0^1 x(4x^2-2)^3 dx$, **iii.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$, **iv.** $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$

Λύση

i. $(e^{3x+4})' = e^{3x+4}(3x+4)' = 3\cdot e^{3x+4}$ είναι: $\int_0^1 e^{3x+4}dx = \frac{1}{3}[e^{3x+4}]_0^1 = \frac{1}{3}(e^7-e^4) = \frac{e^7-e^4}{3}$

ii. Είναι $((4x^2-2)^4)' = 4(4x^2-2)^3(4x^2-2)' = 4(4x^2-2)^3 8x = 32x(4x^2-2)^3$

$$\int_0^1 (4x^2-2)^3 dx = \frac{1}{32}[(4x^2-2)^4]_0^1 = \frac{1}{32}(2^4-(-2)^4) = \frac{1}{32}\cdot 0 = 0$$

iii. Είναι $\left(\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)' = -\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)' = -2\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx = -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 0+\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(-\eta\mu\frac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

iv. Είναι $\left(\sqrt{x^2+16}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+16}}(x^2+16)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ οπότε

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \left[\sqrt{x^2+16}\right]_0^3 = \sqrt{25}-\sqrt{16} = 5-4 = 1$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2}(|x-1|-|x+1|-4)dx$.

Λύση

Θέτουμε $f(x)=|x-1|-|x+1|-4$. Η f είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών.

Αν $x \le -1$: $f(x) = -x+1-(-x-1)-4 \Leftrightarrow f(x) = -x+1+x+1-4 \Leftrightarrow f(x) = -2$

Αν $-1 < x < 1$: $f(x) = -x+1-(-x+1)-4 \Leftrightarrow f(x) = -x+1+x-1-4 \Leftrightarrow f(x) = -2x-4$

Αν $x \ge 1$: $f(x) = x-1-(x+1)-4 \Leftrightarrow f(x) = x-1-x-1-4 \Leftrightarrow f(x) = -6$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ αν } x \le -1 \\ -2x-4 \text{ αν } -1 < x < 1 \\ -6 \text{ αν } x \ge 1 \end{cases}$

Είναι $\int_{-2}^{2} f(x) = \int_{-2}^{-1}(-2)dx + \int_{-1}^{1}(-2x-4)dx + \int_{1}^{2}(-6)dx =$

$$= -2\int_{-2}^{-1}dx - 2\int_{-1}^{1}xdx - 4\int_{-1}^{1}dx - 6\int_{1}^{2}dx = -2[x]_{-2}^{-1} - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - 4[x]_{-1}^{1} - 6[x]_{1}^{2} = -16$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

α. Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f'(x)g(x)dx} = [\mathbf{f(x)g(x)}]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)g'(x)dx} \text{ ή}$$

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)g(x)dx} = [\mathbf{F(x)g(x)}]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathbf{F(x)g'(x)dx} = [\mathbf{f(x)G(x)}]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathbf{f'(x)G(x)dx}$$

όπου F, G παράγουσες των f, g αντίστοιχα και η επιλογή κατάλληλης παράγουσας γίνεται με τα ίδια κριτήρια όπως και στα αόριστα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1(2x+1)e^x dx,\ I_2 = \int_0^1 x2^x dx,\ I_3 = \int_{1/2}^1 \frac{\ell n^2 x}{x^2}dx,\ I_4 = \int_0^\pi e^{3x}\text{συν}x dx,\ I_5 = \int_0^\pi xe^x\text{συν}x dx$$

Λύση

- $I_1 = \int_0^1(2x+1)(e^x)'dx = [(2x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (3e-1)-2(e-1) = e+1$

- $I_2=\int_0^1 x2^x\,dx=\int_0^1 x\dfrac{(2^x)'}{\ell n2}dx=\dfrac{1}{\ell n2}[x\cdot 2^x]_0^1-\dfrac{1}{\ell n2}\int_0^1 2^x\,dx=\dfrac{2}{\ell n2}-\dfrac{1}{\ell n^2 2}[2^x]_0^1=\dfrac{2}{\ell n2}-\dfrac{1}{\ell n^2 2}$

- $I_3=-\int_{1/2}^1\left(\dfrac{1}{x}\right)'\ell n^2x=-\left[\dfrac{1}{x}\ell n^2x\right]_{1/2}^1+\int_{1/2}^1\dfrac{1}{x}2\ell nx\dfrac{1}{x}dx=2\ell n^2\dfrac{1}{2}-2\int_{1/2}^1\left(\dfrac{1}{x}\right)'\ell nxdx=$

  $2\ell n^2 2-2\left[\dfrac{1}{x}\ell nx\right]_{1/2}^1+2\int_{1/2}^1\dfrac{1}{x^2}dx=\ldots$

- $I_4=\int_0^\pi e^{3x}(\eta\mu x)'\,dx=[e^{3x}\eta\mu x]_0^\pi-3\int_0^\pi e^{3x}\eta\mu xdx=3\int_0^\pi e^{3x}(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx=$

  $[3e^{3x}\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi-3\int_0^\pi 3e^{3x}\sigma\upsilon\nu xdx\Rightarrow I_4=-3e^{3\pi}-3-9I_4\Leftrightarrow 10I_4-3(e^{3\pi}+1)\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow I_4=-\dfrac{3}{10}(e^{3\pi}+1)$

- $I_5=\int_0^\pi xe^x\sigma\upsilon\nu xdx$

  Αρχικά επιλύουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $I=\int xe^x\sigma\upsilon\nu xdx$

Έχουμε $\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx=\int(e^x)'\sigma\upsilon\nu xdx=e^x\sigma\upsilon\nu x-\int e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=$

$=e^x\sigma\upsilon\nu x+\int e^x\eta\mu xdx=e^x\sigma\upsilon\nu x+\int(e^x)'\eta\mu xdx=e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x-\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx$ οπότε

$2\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx=e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x$ δηλαδή $\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx=\dfrac{e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x}{2}+c$

Ισχύει $\left(\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx\right)'=\dfrac{1}{2}(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)'$ οπότε $e^x\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2}(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)'$ (1)

Επομένως, $I\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{2}\int x(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)'\,dx=$

$$=\frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)-\frac{1}{2}\int(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)(x)'\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)-\frac{1}{2}\int\left[e^x(\eta\mu x)'+(e^x)'\eta\mu x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)-\frac{1}{2}\int[e^x\eta\mu x]'\,dx=\frac{1}{2}x(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)-\frac{1}{2}e^x\eta\mu x+c$$

Επομένως, $I_5=\dfrac{1}{2}[x(e^x\sigma\upsilon\nu x+e^x\eta\mu x)]_0^\pi-\dfrac{1}{2}[e^x\eta\mu x]_0^\pi=$

$$=\frac{1}{2}\pi(e^\pi\sigma\upsilon\nu\pi+e^\pi\eta\mu\pi)-\frac{1}{2}(e^\pi\eta\mu\pi-e^0\eta\mu 0)=$$

$$=\frac{1}{2}\pi(e^\pi(-1)+e^\pi\cdot 0)-\frac{1}{2}(0-0)=-\frac{\pi e^\pi}{2}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα: $\int_0^1 xe^{-x}dx$, $\int_1^e x^2\ell nx\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Λύση

- $\int_0^1 xe^{-x}dx = -\int_0^1 x(e^{-x})'\,dx = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 x'e^{-x}dx =$

$= -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -[xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 =$

$= -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

- $\int_1^e x^2\ell nx\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'\ell nx\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ell nx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}(\ell nx)'\,dx =$

$\frac{e^3}{3}\ell ne - \frac{1}{3}\ell n1 - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e =$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)'dx = [x\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\eta\mu x dx = \frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2} - 0\cdot\eta\mu 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx =$

$= \frac{\pi}{2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 = \frac{\pi}{2} - 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Μέθοδος Αντικατάστασης. Εκφράζεται από τους τύπους

$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $I_2 = \int_0^1 xe^{x^2-1}dx$,

$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2}dx$, $I_4 = \int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sigma\varphi(\ell nx)}{x}dx$, $I_5 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{dx}{x\,\ell nx\;\ell n(\ell nx)}$

Λύση

- $I_1 = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x(\varepsilon\varphi x)'dx$ θέτουμε $u = \varepsilon\varphi x$ οπότε $du = (\varepsilon\varphi x)'dx$.

Αν $x = 0$ τότε $u = 0$. Αν $x = \pi/4$ τότε $u = 1$. Έχουμε $I_1 = \int_0^1 u^3du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

- $I_2=\int_0^1 xe^{x^2-1}dx$. Θέτουμε $u=x^2-1$ οπότε $du=2xdx \Leftrightarrow xdx=\frac{du}{2}$. Αν $x=0$ τότε $u=-1$.

 Αν $x=1$ τότε $u=0$.Είναι $I_2=\int_{-1}^0 e^u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}[e^u]_{-1}^0=\frac{1}{2}[e^0-e^{-1}]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

- $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2x+3\eta\mu x+2}dx=\int_0^1\frac{du}{u^2+3u+2}=\int_0^1\left[\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u+2}\right]du=\ldots$ (θέσαμε $\eta\mu x=u$)

- $I_4=\int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}}\sigma\varphi(\ell nx)(\ell nx)'dx \overset{u=\ell nx}{=} \int_{\ell ne^{\pi/6}}^{\ell ne^{\pi/2}}\sigma\varphi u du=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u}du=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu u}(\eta\mu u)'du=$

 $\int_{\pi/6}^{\pi/2}[\ell n(\eta\mu u)]'du=[\ell n(\eta\mu u)]_{\pi/6}^{\pi/2}=\ell n\eta\mu\frac{\pi}{2}-\ell n\eta\mu\frac{\pi}{6}=-\ell n\frac{1}{2}=\ell n2$

- $I_5=\int_{e^2}^{e^5}\frac{dx}{x\ell nx\,\ell n(\ell nx)}$. Θέτουμε $\ell n(\ell nx)=u$ οπότε $[\ell n(\ell nx)]'dx=du \Leftrightarrow \frac{1}{x\ell nx}dx=du$.

Αν $x=e^5$ τότε $u=\ell n(\ell ne^5)=\ell n5$. Αν $x=e^2$ τότε $u=\ell n(\ell ne^2)=\ell n2$.

Έχουμε $I_5=\int_{\ell n2}^{\ell n5}\frac{1}{u}du=[\ell n|u|]=\ell n|\ell n5|-\ell n|\ell n2|$.

Εφαρμογές με αντικατάσταση $x=\varphi(t)$

Παράδειγμα 6

α. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$I_1=\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}dx$ **,** $\rho>0$ **, αντικαθιστώντας** $x=\rho\eta\mu\theta$ **,**

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $I_2=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$ **, αν η f είναι περιττή στο [–α,α].**

ii. $I_3=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=2\int_0^{\alpha}f(x)dx$ **αν η f είναι άρτια στο [–α,α].**

Λύση

α. Θέτουμε $x=\rho\eta\mu\theta$ και για να είναι “1 - 1” παίρνουμε $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

 με $x=-\rho$ είναι $\eta\mu\theta=-1$ οπότε $\theta=-\frac{\pi}{2}$, με $x=\rho$ είναι $\eta\mu\theta=1$ οπότε $\theta=\frac{\pi}{2}$

 Επίσης $dx=\rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ και $\sqrt{\rho^2-x^2}=\sqrt{\rho^2-\rho^2\eta\mu^2\theta}=\sqrt{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$

 Έχουμε $I_1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta=\rho^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta=\rho^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\theta}{2}d\theta=$

 $=\rho^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}d\theta+\frac{1}{2}\rho^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu2\theta d\theta=\frac{1}{2}\rho^2[\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{4}\rho^2[\eta\mu2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\pi\rho^2$

Σχόλιο: Το ολοκλήρωμα I εκφράζει το εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας ρ.

β. Αν η f περιττή τότε $f(-x)=-f(x)$ στο $[-\alpha,\alpha]$

Έχουμε $I_2=\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=I+J$. Για το I θέτουμε $x=-u$ οπότε $dx=-du$.

Αν $x=-\alpha$ τότε $u=\alpha$. Αν $x=0$ τότε $u=0$.

Έχουμε $I=\int_{\alpha}^{0}f(-u)(-du)\overset{f\ \text{περιττή}}{=}\int_{\alpha}^{0}f(u)du=-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ (1)

οπότε $I_2\overset{(1)}{=}-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=0$

ii. Ομοίως αν f άρτια τότε $(f(-x)=f(x)$ στο $[-\alpha,\alpha])$ και έχουμε:

$I_3=\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}f(-x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$. Θέτουμε $-x=u$ οπότε $dx=-du$.

Αν $x=-\alpha$ τότε $u=\alpha$ και αν $x=0$ τότε $u=0$.

Έχουμε $I_3=\int_{\alpha}^{0}f(u)(-du)+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}f(u)du+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=$

$=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I_1=\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$, $I_2=\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx$ **, θέτοντας** $x=2\eta\mu t$ **και** $x=\varepsilon\varphi t$ **αντίστοιχα.**

Λύση

- Θέτουμε $x=2\eta\mu t$ οπότε $(x)'dx=(2\eta\mu t)'dt$ ή $dx=2\sigma\upsilon\nu t dt$

Αν $x=0$ είναι $0=2\eta\mu t\Leftrightarrow \eta\mu t=0$ οπότε $t=0$

Αν $x=2$ είναι $2=2\eta\mu t\Leftrightarrow \eta\mu t=1$ οπότε $t=\frac{\pi}{2}$

Έτσι $I_1=\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\eta\mu^2 t}\cdot 2\sigma\upsilon\nu t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-\eta\mu^2 t)}\cdot 2\sigma\upsilon\nu t\,dt=$

$4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t}\cdot\sigma\upsilon\nu t\cdot dt=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}\cdot dt=$

$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dt+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2t\,dt=2[t]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\eta\mu 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+(\eta\mu\pi-\eta\mu 0)=\pi$

Για τον υπολογισμό του I_2 θέτουμε $x=\varepsilon\varphi t$ οπότε $(x)'dx=(\varepsilon\varphi t)'dt$ ή $dx=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$.

Αν $x=-1$ είναι $\varepsilon\varphi t=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ οπότε $t=-\frac{\pi}{4}$

Αν $x=1$ είναι $\varepsilon\varphi t=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ οπότε $t=\frac{\pi}{4}$

Έτσι $I_2=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 t}{\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt=[t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα 8

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ να αποδείξετε ότι:

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\eta\mu x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sigma\upsilon\nu x)dx$ **ii.** $\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\eta\mu x)dx$

Λύση

i. Θέτουμε $x=\frac{\pi}{2}-t$ τότε $(x)'dx=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)'dt$ ή $dx=-dt$

Αν $x=0$ τότε $0=\frac{\pi}{2}-t\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$

Αν $x=\frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-t\Leftrightarrow t=0$

Έτσι $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\eta\mu x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sigma\upsilon\nu t)dt\overset{t=x}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sigma\upsilon\nu x)dx$

ii. Θέτουμε $x=\pi-t$ τότε $(x)'dx=(\pi-t)'dt$ ή $dx=-dt$

Αν $x=0$ τότε $0=\pi-t\Leftrightarrow t=\pi$

Αν $x=\pi$ τότε $\pi=\pi-t\Leftrightarrow t=0$

Έτσι $\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\eta\mu(\pi-t))dt=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\eta\mu t)dt=$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\eta\mu t)dt-\int_0^{\pi}tf(\eta\mu t)dt\overset{t=x}{=}\pi\int_0^{\pi}f(\eta\mu x)dx-\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx$$

Δηλαδή $\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\eta\mu x)dx-\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx\Leftrightarrow$

$$2\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\eta\mu x)dx\Leftrightarrow\int_0^{\pi}xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\eta\mu x)dx$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Η συνάρτηση που ορίζεται από ολοκλήρωμα και η παράγωγός της.

α. Εύρεση του πεδίου ορισμού της $F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt$

Βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της προς ολοκλήρωσην συνάρτησης και απαιτούμε τα άκρα να είναι στο ίδιο διάστημα ώστε η ολοκληρούμενη συνάρτηση να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί το σύνολο ορισμού των συναρτήσεων και η παράγωγός τους.

1. $F(x)=\int_3^x \sqrt{t^2-4}dt$, **2.** $G(x)=\int_2^x \sqrt{t^3-t}\, dt$

Λύση

1. Πρέπει $t^2-4\geq 0 \Leftrightarrow t\leq -2$ ή $t\geq 2 \Leftrightarrow t\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. Επειδή το $3\in[2,+\infty)$ πρέπει και το $x\in[2,+\infty)$. Άρα $A_F=[2,+\infty)$ και $F'(x)=\sqrt{x^2-4}$

2. Πρέπει $t^3-t\geq 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-1)\geq 0$ $t\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$. Επειδή το $2\in[1,+\infty)$ πρέπει και το $x\in[1,+\infty)$. Άρα $A_G=[1,+\infty)$ και $G'(x)=\sqrt{x^3-x}$

β. Εύρεση του πεδίου ορισμού σύνθετης συνάρτησης που ορίζεται από ολοκλήρωμα $H(x)=\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt$, με $f(t)$ συνεχή στο Δ. Απαιτούμε στο διάστημα του πεδίου ορισμού της $f(t)$ που ανήκει το α στο ίδιο διάστημα να ανήκει και η g (x). Εννοείται ότι έχουμε πάρει τους περιορισμούς που απαιτούνται για την g (x).

Όσον αφορά και την παράγωγο της H είναι $H'(x)=f(g(x))g'(x)$

Δηλαδή $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)'=f(g(x))g'(x)$.

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί το ευρύτερο σύνολο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η $H(x)=\int_1^{x^2+1}\sqrt{5-t}dt$ **καθώς και η παράγωγός της.**

Λύση

Πεδίο ορισμού της $f(t)=\sqrt{5-t}$ είναι το $A_f=(-\infty,5]$. Το πεδίο ορισμού της $g(x)=x^2+1$ είναι το R.

Πρέπει: $x^2+1\in(-\infty,5] \Leftrightarrow x^2+1\leq 5 \Leftrightarrow x^2\leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|\leq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2 \Leftrightarrow x\in[-2,2]$$

Άρα το πεδίο ορισμού της H (x) είναι :

$A_H=[-2,2]$ και $H'(x)=\sqrt{5-(x^2+1)}(x^2+1)'=\sqrt{4-x^2}\,2x$

γ. Η παράγωγος της $g(x)=\int_{h(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$

Επιλέγουμε $\alpha\in A_f$

$$g(x)=\int_{h(x)}^{\alpha} f(t)dt+\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt=-\int_\alpha^{h(x)} f(t)dt+\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)dt.$$

Οπότε $g'(x)=-f(h(x))h'(x)+f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

δ. Η παράγωγος της $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-t)f(t)dt$

$$g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-t)f(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}xf(t)dt-\int_{\alpha}^{\beta}tf(t)dt=x\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt-\int_{\alpha}^{\beta}tf(t)dt$$

Άρα $g'(x)=(x)'\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt+x\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt\right)'-\left(\int_{\alpha}^{\beta}tf(t)dt\right)'=$

$\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt+x\cdot 0-0=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$

ε. Η παράγωγος της $g(x)=\int_{\alpha}^{x}(x-t)f(t)dt$

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x}xf(t)dt-\int_{\alpha}^{x}tf(t)dt \Leftrightarrow g(x)=x\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x}tf(t)dt$$

Άρα $g'(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)\Leftrightarrow g'(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt$

ζ. Οι μορφές $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x-t)dt$, $h(x)=\int_{\alpha}^{x}f(x-t)dt$, $\Phi(x)=\int_{\alpha}^{x}f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ παραγωγίζονται αφού πρώτα μετασχηματίζουμε τα ολοκληρώματα κάνοντας αντίστοιχα τις αντικαταστάσεις $x-t=u$, $\frac{x}{t}=u$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Εύρεση του τύπου συνάρτησης f όταν γνωρίζουμε σχέση στην οποία υπάρχει $\int_{\alpha}^{x}f(x)dt$.

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση ώστε να εξαλείφονται τα ολοκληρώματα.
Η τυχούσα σταθερά που θα προκύψει, υπολογίζεται αν θέσουμε σε υπόθεση και συμπέρασμα όπου x το ένα όριο ολοκλήρωσης όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 11

Αν $G(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$ **όπου** $f(t)=\int_{1}^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ $x>0$, $t>0$ **να βρεθεί η** $G''(1)$.

Λύση

$G'(x)=f(x)=\int_{1}^{3x}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$. Άρα $G''(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{3x}}(3x)'=\frac{3e^{3x}}{\sqrt{3x}}$. Επομένως $G''(1)=\frac{3e^3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^3$

Παράδειγμα 12

Να βρεθεί συνάρτηση $f:R\to R$ **για την οποία ισχύει ότι** $\int_{\alpha}^{x}e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)$.

276.

Λύση

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της υπόθεσης και έχουμε:

$$e^{-x}f(x)=-e^{-x}-\left(-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)\right)\overset{\text{πράξεις}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{-x}f'(x)=-e^{-x}\Leftrightarrow f'(x)=-1\Leftrightarrow f(x)=-x+c$$

Στην υπόθεση για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)=0$.

Στο συμπέρασμα για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)=-\alpha+c\Leftrightarrow 0=-\alpha+c\Leftrightarrow c=\alpha$. Άρα $f(x)=-x+\alpha$

Παράδειγμα 13

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\int_1^{x^2}f(t)dt=x^2\ell nx$, $x>0$. Να βρείτε το $f(1)$ και το $f(4)$.

Λύση

$$\int_1^{x^2}f(t)dt=x^2\ell nx \text{ οπότε } \left(\int_1^{x^2}f(t)dt\right)'=(x^2\ell nx)'\Leftrightarrow f(x^2)(x^2)'=2x\ell nx+x^2\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$2xf(x^2)=2x\ell nx+x \quad (1)$$

Η (1) για $x=1$ γίνεται: $\quad 2\cdot1\cdot f(1^2)=2\cdot1\cdot\ell n1+1\Leftrightarrow 2f(1)=1\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}$

Η (1) για $x=2$ γίνεται: $\quad 2\cdot2\cdot f(2^2)=2\cdot2\cdot\ell n2+2\Leftrightarrow 4f(4)=4\ell n2+2\Leftrightarrow$

$$2f(4)=2\ell n2+1\Leftrightarrow f(4)=\frac{2\ell n2+1}{2}$$

Παράδειγμα 14

Να βρείτε την συνεχή στο R συνάρτηση f και την τιμή του λ αν ισχύει: $2x^2-\int_\lambda^x f(t)dt=8$ για κάθε $x\in R$.

Λύση

Ισχύει $2x^2-\int_\lambda^x f(t)dt=8$ (1). Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη οπότε:

$\left(2x^2-\int_\lambda^x f(t)dt\right)'=(8)'\Leftrightarrow 4x-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=4x$. Θέτουμε στην (1) $f(t)=4t$ και

έχουμε: $2x^2-\int_\lambda^x 4tdt=8\Leftrightarrow 2x^2-4\left[\frac{t^2}{2}\right]_\lambda^x=8\Leftrightarrow 2x^2-4\frac{x^2-\lambda^2}{2}=8\Leftrightarrow$

$$2x^2-2x^2+2\lambda^2=8\Leftrightarrow \lambda^2=4\Leftrightarrow \lambda=-2 \text{ ή } \lambda=2$$

Παράδειγμα 15

Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=(1+x^2)\left[1+\int_0^x\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right]$ για όλα τα $x\in R$.

Λύση

Όταν παραγωγίζουμε για να εξαλείψουμε ένα ολοκλήρωμα λύνουμε ως προς αυτό ώστε να εξαλείφεται με την πρώτη παραγώγιση.

Έτσι έχουμε: $\frac{f(x)}{1+x^2}=1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$. Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη και έχουμε:

$$\left[\frac{f(x)}{1+x^2}\right]'=\frac{f(x)}{1+x^2}\Leftrightarrow \frac{f(x)}{1+x^2}=c\cdot e^x \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x\left(1+x^2\right)$$

(χρησιμοποιήσαμε την πρόταση: $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Στην υπόθεση για } x=0 \text{ έχουμε } f(0)=1\\ \text{Στο συμπέρασμα για } x=0 \text{ έχουμε } f(0)=c\end{array}\right\} c=1.\ \text{Άρα } f(x)=e^x\left(1+x^2\right)$$

Παράδειγμα 16

Να βρεθεί συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x)=\eta\mu x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt \qquad \textbf{(1)}$$

Λύση

Αρχικά μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$

• Θέτουμε $x-t=u\Leftrightarrow -t=u-x$.

• $(x-t)'dt=du\Leftrightarrow -dt=du\Leftrightarrow dt=-du$.

• Αν $t=0$ τότε $u=x$. Αν $t=x$ τότε $u=0$.

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται: $I=\int_x^0 e^{u-x}f(u)(-du)=-\int_x^0 \frac{1}{e^x}e^u f(u)du=\frac{1}{e^x}\int_0^x e^u f(u)du$

Έτσι $f(x)=\eta\mu x+\frac{1}{e^x}\int_0^x e^u f(u)du \Leftrightarrow e^x f(x)=e^x\eta\mu x+\int_0^x e^u f(u)du$.

Άρα $\quad \left(e^x f(x)\right)'=\left(e^x\eta\mu x\right)'+\left(\int_0^x e^u f(u)du\right)'\Leftrightarrow$

$$\left(e^x\right)'f(x)+e^x f'(x)=\left(e^x\right)'\eta\mu x+\left(e^x\right)(\eta\mu x)'+\left(\int_0^x e^u f(u)du\right)'\Leftrightarrow$$

$$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\eta\mu x+(\sigma\upsilon\nu x)e^x+e^x f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$$

Άρα $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+c \quad (2)$

Θέτουμε $x=0$ στις (1) και (2) και έχουμε:

$f(0)=0$ και $f(0)=c-1$. Άρα $c-1=0\Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+1$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όπως είδαμε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής και $\alpha \in \Delta$.

Την συνάρτηση λοιπόν αυτή μπορούμε να την συναντήσουμε σε οποιοδήποτε θέμα συνέχειας και παραγώγων π.χ. Bolzano, ακρότατα το Θ. Fermat, καμπυλότητα, όρια, ασύμπτωτες, σε θέματα Rolle και Μέσης Τιμής.

Στα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν θα τονιστούν κάποια σημεία που θέλουν μεγαλύτερη προσοχή.

Παράδειγμα 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\int_0^x dt, & x>0 \\ 2\int_0^x \dfrac{dt}{2t+1}, & x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right] \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Λύση

• Αν $x>0$, η $f(x)=2\int_0^x dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

• Αν $x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, η $f(x)=2\int_0^x \dfrac{dt}{2t+1}$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής.

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

• Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} 2\int_0^x \dfrac{dt}{2t+1}=2\int_0^0 \dfrac{dt}{2t+1}dt=0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} 2\int_0^x dt=2\int_0^0 dt=0$

και $f(0)=2\int_0^0 \dfrac{dt}{2t+1}=0$. Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

• Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\int_0^x \frac{dt}{2t+1}}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\left[2\int_0^x \frac{dt}{2t+1}\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\frac{1}{2x+1}}{1}=\lim_{x\to0^-}\frac{2}{2x+1}=2$$

και $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\int_0^x dt}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left[2\int_0^x dt\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\cdot1}{1}=2.$$

Άρα $f'(0)=2$ και επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Είναι $\left[\int_x^0 f(t)dt\right]'=-f(x)$, $\left[\int_0^x dt\right]'=1$.

Παράδειγμα 18

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $F(x)=\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t}dt$ **.**

Λύση

Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της $F(x)=\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t^2}dt$.

Το πεδίο ορισμού της $f(t)=(t^2-5t+4)e^{-t}$ είναι το R.

Το πεδίο ορισμού της $g(x)=x^2$ είναι το R και επειδή $g(x)=x^2\in R$ για κάθε $x\in R$ έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της F είναι το R.

$$F'(x)=\left(\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t}\right)'=(x^4-5x^2+4)e^{-x^2}(x^2)'=2x(x^4-5x^2+4)e^{-x^2}$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 2x(x^4-5x^2+4)e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x(x^4-5x^2+4)=0\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }$$

$$x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; x^2=1 \;\text{ ή }\; x^2=4$$

$$\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; x=-1 \;\text{ ή }\; x=1 \;\text{ ή }\; x=-2 \;\text{ ή }\; x=2 \text{ έχουμε:}$$

Πίνακας προσήμου των τιμών της F΄

x	-∞		-2		-1		0		1		2		+∞
F΄(x)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	
F(x)		↘		↗		↘		↗		↘		↗	
			T.E.		T.M.		T.E.		T.M.		T.E.		

Άρα για $x=-2$, $x=0$, $x=2$, η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $F(-2)$, $F(0)$, $F(2)$ αντίστοιχα, ενώ για $x=-1$, $x=1$ η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $F(-1)$, $F(1)$ αντίστοιχα.

Έχουμε: $F(0)=\int_0^0(t^2-5t+4)e^{-t}dt=0$

Παρατηρούμε ότι : η F είναι άρτια στο R διότι για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$F(-x)=\int_0^{(-x)^2}(t^2-5t+4)e^{-t}dt=\int_0^{x^2}(t^2-5t+4)e^{-t}dt=F(x)$$

Επομένως $F(-2)=F(2)$ και $F(-1)=F(1)$.

Έχουμε $F(1)=\int_0^1(t^2-5t+4)e^{-t}dt=-\int_0^1(t^2-5t+4)(e^{-t})'dt=$

$$=-[(t^2-5t+4)e^{-t}dt]_0^1+\int_0^1\left[(t^2-5t+4)'e^{-t}dt\right]=-4+\int_0^1(2t-5)e^{-t}dt=$$

$$=-4-\int_0^1(2t-5)(e^{-t})'dt=-4-[(2t-5)e^{-t}]_0^1+2\int_0^1 e^{-t}dt=-4-\left[-3\frac{1}{e}+5\cdot 1\right]-2[e^{-t}]_0^1=$$

$$-4+\frac{3}{e}-5-2\left(\frac{1}{e}-1\right)=-4+\frac{3}{e}-\frac{2}{e}+2=-2+\frac{1}{e}=\frac{1-2e}{e}$$

Άρα $F(-1)=F(1)=\dfrac{1-2e}{e}$. Ανάλογα υπολογίζουμε το $F(-2)=F(2)$.

Παράδειγμα 19

Έστω $F(x)=\int_0^{x^2+x}\sqrt{t+3}dt$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F στο $x=-\dfrac{1}{2}$ παρουσιάζει αρνητικό ελάχιστο.

Λύση

Δίνεται $F(x)=\int_0^{x^2+x}\sqrt{t+3}dt$.

$f(t)=\sqrt{t+3}$, $A_f=[-3,+\infty)$ $\qquad$ $g(x)=x^2+x$, $A_g=R$

Επομένως ζητάμε εκείνα τα $x\in R$ ώστε $(x^2+x)\in[-3,+\infty)$ δηλαδή

$x^2+x\ge -3 \Leftrightarrow x^2+x+3\ge 0$ που ισχύει για κάθε $x\in R$ διότι $\Delta<0$. Άρα $A_F=R$

$F'(x)=\left(\int_0^{x^2+x}\sqrt{t+3}dt\right)'=\sqrt{x^2+x+3}\,(2x+1)$, $A_{F'}=R$

Έχουμε $F'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2+x+3}=0 \underset{\substack{(x^2+x+3>0,\ x\in R\\ \text{αφού } \Delta<0)}}{\Leftrightarrow}$

$$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

x	-∞		-1/2		+∞
F΄(x)		−	0	+	
F(x)		↘	O.E.	↗	

Πράγματι λοιπόν για $x=-\dfrac{1}{2}$ η F παρουσιάζει ελάχιστο και ίσο με $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$.

1ος τρόπος

Έχουμε: $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}\sqrt{t+3}dt=\int_0^{-\frac{1}{4}}(t+3)^{\frac{1}{2}}(t+3)'\,dt=\left[\dfrac{(t+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{-\frac{1}{4}}=$

$=\dfrac{2}{3}\left[(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}\left(\left(-\dfrac{1}{4}+3\right)^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{2}{3}\left[\left(\dfrac{11}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}\right]<0$, διότι

$\dfrac{11}{4}<3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{11}{4}\right)^{\frac{3}{2}}<3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{11}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}<0$.

2ος τρόπος

Έχουμε $F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{-1/4}\sqrt{t+3}dt=-\int_{-1/4}^{0}\sqrt{t+3}dt$ (1) Επειδή $\sqrt{t+3}>0$ για κάθε $t\in\left[-\frac{1}{4},0\right]$

ισχύει $\int_{-1/4}^{0}\sqrt{t+3}dt>0\Leftrightarrow-\int_{-1/4}^{0}\sqrt{t+3}dt<0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}F\left(-\frac{1}{2}\right)<0$.

Παράδειγμα 20

Να βρεθεί το όριο της $f(x)=\dfrac{\int_0^x(\eta\mu t-t)dt}{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}$ όταν $x\to0$.

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0}f(x)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left[\int_0^x(\eta\mu t-t)dt\right]'}{(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x-x}{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x-x(-\eta\mu x)}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\eta\mu x-x}{x\eta\mu x}\right]\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=0$$

Παράδειγμα 21

Έστω $\beta>\alpha>0$ και η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$ και έστω $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)dt$, $x>0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

α. Η εφαπτομένη της C_g στο $(x_0,g(x_0))$ είναι παράλληλη στον x΄x.

β. $g(x_0)=2+f(x_0)$

Λύση

α. Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την g στο [α,β]

- Η g συνεχής στο [α,β]
- Η g παραγωγίσιμη στο (α,β)
- $g(\alpha)=2+\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\alpha f(t)dt=2+\frac{1}{\alpha}\cdot0=2$, $g(\beta)=2+\frac{1}{\beta}\int_\alpha^\beta f(t)dt\overset{\upsilon\pi o\theta.}{=}2+\frac{1}{\beta}\cdot0=2$

  Δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$.

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$, οπότε η εφαπτόμενη στο $(x_0.g(x_0))$ είναι παράλληλη στον x΄x.

β. Από υπόθεση έχουμε: $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x}f(t)dt \Leftrightarrow xg(x)=2x+\int_{\alpha}^{x}f(t)dt \Leftrightarrow$

$\int_{\alpha}^{x}f(t)dt=xg(x)-2x \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{x}f(t)dt=x\left(g(x)-2\right)$ (1)

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$\left[\int_{\alpha}^{x}f(t)dt\right]'=\left[x\left(g(x)-2\right)\right]' \Leftrightarrow f(x)=(x)'\left(g(x)-2\right)+x\left(g(x)-2\right)' \Leftrightarrow$

$f(x)=g(x)-2+xg'(x)$ (2)

Θέτουμε στην (2) όπου x το x_0 και έχουμε:

$f(x_0)=g(x_0)-2+x_0g'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)-2+x_0\cdot 0$ (διότι από α ερώτημα το $g'(x_0)=0$)

$\Leftrightarrow g(x_0)=f(x_0)+2$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ανισότητες με ολοκληρώματα

α. Γνωρίζουμε ότι αν $f(x)\geq 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq 0$ (θεωρία) ή $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0$ αν η f δεν έχει τιμή 0 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β. Αν $f(x)\geq g(x)$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$.

Απόδειξη

$f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M οπότε $m\leq f(x)\leq M$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}mdx\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}Mdx$ ή

$m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$

Παράδειγμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)>0$, $f'(x)+2xf(x)=0$ και η C_f περνά από σημείο $A(1,1)$.

α. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

β. Να δειχθεί ότι $\frac{x-1}{2x^2}f(x)\leq\int_{1}^{x}\frac{f(t)}{2t^2}dt\leq\frac{x-1}{2}$.

Λύση

α. $\frac{f'(x)}{f(x)}=-2x$ Άρα $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(-2x)dx \Leftrightarrow \ell nf(x)=-x^2+c \Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2+c}$.

Επειδή η C_f διέρχεται από το $A(1,1)$ έχουμε:

$f(1)=1 \Leftrightarrow 1=e^{-1+c} \Leftrightarrow e^{c-1}=e^{0} \Leftrightarrow c=1$ Άρα $f(x)=e^{-x^2+1}$

β. Έστω $g(t)=\dfrac{f(t)}{2t^2}=\dfrac{e^{-t^2+1}}{2t^2}$, $t\in[1,x]$

$$g'(t)=\frac{-2te^{-t^2+1}2t^2-e^{-t^2+1}4t}{4t^4}=-\frac{4te^{-t^2+1}(t^2+1)}{4t^4}=\frac{-e^{-t^2+1}(t+1)}{t^3}<0$$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,x]$. Έχουμε $g(1)=\dfrac{f(1)}{2\cdot 1^2}=\dfrac{1}{2}$ και $g(x)=\dfrac{e^{-x^2+1}}{2x^2}=\dfrac{f(x)}{2x^2}$.

Επειδή $1<t<x \Leftrightarrow g(x)<g(t)<g(1)$ (διότι η g είναι γνησίως φθίνουσα)

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{2x^2}\le\dfrac{f(t)}{2t^2}\le\dfrac{1}{2}$ για κάθε $t\in[1,x]$.

Άρα $\int_1^x\dfrac{f(x)}{2x^2}dt\le\int_1^x\dfrac{f(t)}{2t^2}dt\le\int_1^x\dfrac{1}{2}dt \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x^2}f(x)\le\int_1^x\dfrac{f(t)}{2t^2}dt\le\dfrac{1}{2}(x-1)$

Εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής για την εύρεση ορίου

Παράδειγμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}-2$ **,** $x\in R$ **.**

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt$ **.**

Λύση

α. $f'(x)=-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)'}{x^2+4}=-\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=-\dfrac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Επίσης $f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x>0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Επομένως η f παρουσιάζει στο $x=0$ μέγιστο, το $f(0)=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

β. Με $x>0$ και $t\in[x,x+1]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε: $x\le t\le x+1\Leftrightarrow$ $f(x+1)\le f(t)\le f(x)$. Ολοκληρώνουμε ως προς t και έχουμε:

$\int_x^{x+1}f(x+1)dt\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le\int_x^{x+1}f(x)dt\Leftrightarrow f(x+1)\int_x^{x+1}dt\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le f(x)\int_x^{x+1}dt$

(οι ποσότητες $f(x+1)$, $f(x)$ είναι σταθεροί όροι στην ολοκλήρωση ως προς t)

$\Leftrightarrow f(x+1)(x+1-x)\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le f(x)(x+1-x)\Leftrightarrow f(x+1)\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le f(x)$ και

επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)\le\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt\le\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}-2\right]\le\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt\le\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-2\right]\Leftrightarrow$$

$$-2\le\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt\le-2$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=-2$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8
Αναγωγικοί τύποι

Παράδειγμα 24

Να δειχθεί ότι $I_\nu=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu xd=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)I_{\nu-2}$.

Λύση

Είναι $$I_\nu=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu xdx=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-1}x\eta\mu xdx=-\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-1}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=$$

$$=-\left[\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(\eta\mu^{\nu-1}x)'\sigma\upsilon\nu xdx=$$

$$=-\left[\eta\mu^{\nu-1}\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\eta\mu^{\nu-1}0\sigma\upsilon\nu0\right]+\int_0^{\pi/2}(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu xdx=$$

$$=0+\int_0^{\pi/2}(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu^2xdx=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-2}x(1-\eta\mu^2x)dx=$$

$$=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}(\eta\mu^{\nu-2}x-\eta\mu^\nu x)dx=(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{\nu-2}xdx-(\nu-1)\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu xdx=$$

$$=(\nu-1)I_{\nu-2}-(\nu-1)I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}-\nu I_\nu+I_\nu\Leftrightarrow I_\nu+\nu I_\nu-I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}\Leftrightarrow I_\nu=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)I_{\nu-2}$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να δειχθεί ότι αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

(**Απ.:** $u=\alpha+\beta-x$ με άκρα $\begin{matrix}x=\alpha,\ u=\beta\\ x=\beta,\ u=\alpha\end{matrix}$, $dx=-du$ κ.λ.π. .)

2. Αν f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ισχύουν:

α. $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx=\int_{-\alpha}^\alpha f(-x)dx$ **β.** $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha[f(x)+f(-x)]dx$

(**Υπ.:** $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx=\int_{-\alpha}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$, $u=-x$ κ.λ.π.)

3. Αν f συνεχής στο R και $\alpha,\beta,\gamma \in R$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx$.

(**Υπ.:** $x = u-\gamma$, $\begin{matrix} x=\alpha,\ u=\alpha+\gamma \\ x=\beta,\ u=\beta+\gamma \end{matrix}$, $dx = du$ κ.λ.π. .)

4. Αν η f είναι συνεχής στο R με $\alpha,\beta,\theta \in R$ και $\theta > 0$ τότε $\int_{\alpha\theta}^{\beta\theta} f(x)dx = \theta\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

(**Υπ.:** $u = \dfrac{x}{\theta}$ κ.λ.π.)

5. Αν $f(x) = f(\alpha+\beta-x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να δειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

(**Υπ.:** $x = \alpha+\beta-u$, $\begin{matrix} x=\alpha,\ u=\beta \\ x=\beta,\ u=\alpha \end{matrix}$, $dx = -du$ κ.λ.π. .)

6. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}[f(\alpha)+f(\beta)]$$

(**Υπ.:** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx = c(\beta-\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $u = \alpha+\beta-x$ κ.λ.π. για το ολοκλήρωμα του πρώτου μέρους)

7. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R έτσι ώστε

α. f'' γνήσια αύξουσα , **β.** $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\text{συν}x\,dx = -2\pi$, **γ.** $f'(\pi) = \pi$.

Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

(**Απ.:** Βρίσκουμε ότι $f'(0) = \pi$ στο $[0,\pi]$ για την f' Εφαρμόζεται το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0,\pi): f''(x_0) = 0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f'' αλλάζει πρόσημο άρα $x_0 =$ σημείο καμπής . f'' γνήσια μονότονη άρα μοναδική ρίζα το x_0)

8. Έστω f συνεχής στο R με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(x) = 1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$, για κάθε $x \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

(**Απ.:** Με $u = xt\begin{cases} t=0,\ u=0 \\ t=1,\ u=x \end{cases}$, $du = xdt$, $dt = \dfrac{1}{x}du \Rightarrow f(x) = 1-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\int_0^x uf^2(u)du \Rightarrow$

$$f(x) = 1-2\int_0^x uf^2(u)du \Rightarrow f'(x) = -2xf^2(x) \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \int\left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)dx = \int 2xdx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} = x^2+c \xrightarrow[\text{Συμπ.}]{\text{Υπόθ.}} \left.\begin{matrix} \to x=0,\ f(0)=1 \\ \to x=0,\ c=\dfrac{1}{f(0)}=1 \end{matrix}\right\} f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$)

9. Έστω f συνεχής στο R τέτοια ώστε $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in R$ και $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $x \in R$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(-3,0)$.

(**Υπ.:** $g(0) = 1$, $g(-3) = 25 - \int_0^{24} f(t)dt$ αλλά $\int_0^{24} f(t)dt \geq \int_0^{24} 2dt = 48 \Rightarrow g(-3) < 0$ κ.λ.π., Bolzano)

10. Έστω $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ και $g(x) = \int_0^x h(t)dt$. Να δείξετε ότι $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$.

11. Αν η f είναι περιοδική με περίοδο T τότε $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

(**Υπ.:** Έχουμε $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_\alpha^T f(x)dx + \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = I_1 + I_2$ για το I_2 θέτουμε

$$x = y + T \quad \begin{array}{l} dx = du \\ x = T,\ u = 0 \\ x = \alpha + T \Rightarrow u = \alpha \end{array} \quad \Rightarrow I_2 = \int_0^\alpha f(u+T)du = \int_0^\alpha f(u)du, \ T = \text{περίοδος}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^\alpha f(x)dx \Rightarrow I = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_\alpha^T f(x)dx + \int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^T f(x)dx\ )$$

12. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **β.** $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ **γ.** $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

13. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$ **β.** $\int_0^\pi x^2 \cdot \eta\mu x\, dx$ **γ.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\eta\mu 2x}\, dx$

14. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ **β.** $\int_0^1 \frac{x^3-17x+31}{x^2-5x+6}dx$

15. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x\, dx$, $\nu \in N^*$ να δείξετε ότι ισχύει: $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu \geq 3$.

16. Αν $I_\nu = \int_0^e (\ell nx)^\nu dx$, $\nu \in N^*$ να δείξετε ότι ισχύει: $I_\nu = e - \nu \cdot I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu \geq 1$.

17. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν: $f(\alpha) = f(\beta) = g(\alpha) = g(\beta) = 0$ να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f''(x) \cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x) \cdot g''(x)dx$

18. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{\nu}(1-x)^{\mu}dx=\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu}dx \text{ με } \mu,\nu>0$$

20. Αν $I_{\nu}=\int_0^1 x^{\nu}\cdot e^{x}dx$, $\nu\in N$. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\geq 2$, $I_{\nu}=e-\nu\cdot I_{\nu-1}$ και να υπολογί-

σετε το I_3.

21. Να δείξετε ότι: $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(2-x)dx$

22. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 x\cdot e^{-2x}dx$ **β.** $\int_0^1 x\cdot \ell n(4+x^2)dx$ **γ.** $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\,\text{συν}\frac{1}{x}dx$

23. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α. $\int_0^2 2x^2\cdot \eta\mu(x^3+2)dx$ **β.** $\int_0^{\ell n2}\frac{e^x}{e^x+2}dx$ **γ.** $\int_0^{2e}|\ell nx-1|dx$

24. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και για την οποία ισχύει: $f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,4]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x f(t)dt=4$ έχει μοναδική λύση στο $(0,4)$.

25. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=f(x)+e^x$

(Γενικές Εξετάσεις 1996)

26. Αν η συνάρτηση f΄΄ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και ισχύουν: $\int_0^{\pi} f(x)+f''(x)\eta\mu x\,dx=2$ και $f(\pi)=5$ να βρείτε το $f(0)$.

27. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(x)+f(1-x)=x-x^2$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{12}$.

28. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $\int_3^x f(t)dt \geq x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in R$ να βρείτε το $f(3)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_3^x \sqrt{t^2 - 4}\, dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

30. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 - t}\, dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

31. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F με τύπο $F(x) = \int_{\frac{1}{3}}^x \ell n(x - x^3)dt$

32. α. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι $f'(x) = f(x)$, $x \in R$ αν και μόνο αν $f(x) = c \cdot e^x$, $x \in R$.

β. Αν $f(x) = \int_{-1}^x f(t)dt + 1$ να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f στο R.

33. Αν ισχύει $\int_{3^{2\lambda}+9^{\lambda}}^{11\cdot 4^{\lambda-1}+4^{\lambda+1}} f(x)dx = 0$ να βρείτε το $\lambda \in R$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [–1,1], για την οποία ισχύει: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{-1} f(x)dx$ **(1)**
Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $g(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$ **είναι παραγωγίσιμη στο [–1,1].**

β. Η εξίσωση $f(x) + f(-x) = 0$ **έχει δύο τουλάχιστον ρίζες** ρ_1, ρ_2 **με** $-1 < \rho_1 < 0 < \rho_2 < 1$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο [–1,1], τότε $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$**, για κάθε** $x \in [-1,1]$.