18ο μάθημα

Αόριστο ολοκλήρωμα
Μέθοδοι ολοκλήρωσης

3ο Κεφάλαιο

19ο μάθημα

Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης
Η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$

20ο μάθημα

Εμβαδόν

Μάθημα 18

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Ονομάζουμε **αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f** στο Δ, μια συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ, για την οποία ισχύει: $F'(x)=f(x)$, $x\in\Delta$.

Θεώρημα

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F+c$ είναι παράγουσες της f στο Δ, $c\in R$ και αντίστροφα: κάθε παράγουσα $G(x)$ της f θα έχει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c\,,\ c\in R$$

Ορισμός

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f το ονομάζουμε **ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ** της f στο Δ και το συμβολίζουμε με $\int f(x)dx$.

Η διαδικασία εύρεσης της παράγουσας μιας συνάρτησης ονομάζεται **ολοκλήρωση** της συνάρτησης.

Συνέπεια του ορισμού είναι η ιδιότητα $\int f'(x)dx=f(x)+C$, $c\in R$ και ο επόμενος πίνακας Αορίστων ολοκληρωμάτων.

Πίνακας Αόριστων Ολοκληρωμάτων		
$\int 0dx=c,\ c\in R$	$\int cdx=cx+c_1$	$\int \frac{1}{x}dx=\ell n\lvert x\rvert+c,\ c\in R$
$\int \alpha x^{\nu}dx=\alpha\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c,\ c\in R$	$\int e^x dx=e^x+c,\ c\in R$
$\int \sigma\upsilon\nu x dx=\eta\mu x+c,\ c\in R$	$\int \eta\mu x dx=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in R$
$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx=-\sigma\varphi x+c,\ c\in R$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c,\ c\in R$	$\int \alpha^x dx=\frac{\alpha^x}{\ell n\alpha}+c,\ c\in R$

Αναφέρουμε τις ιδιότητες αορίστων ολοκληρωμάτων

1. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,\ \lambda \in R^*$

2. $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx\ ,\ \lambda, \mu \in R^*$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1. Μέθοδος τωνπαραγουσών
2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
3. Μέθοδος της αντικατάστασης

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Η διαδικασία που ακολουθούμε στην εύρεση της παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης καθορίζεται από τον τύπο της και ακολουθούμε την "Μέθοδο των παραγουσών" όταν οι συναρτήσεις μας επιτρέπουν με απλούς συλλογισμούς χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και τους κανόνες παραγώγισης να καταλήξουμε στην παράγουσα F της f.

Η παραγώγιση της F θα επαληθεύσει το αποτέλεσμα.

Όσα ακολουθούν είναι εφαρμογή του τύπου

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int [F(g(x))]' dx = F(g(x)) + c,\ c \in R \ \text{ όπου } \ F' = f$$

Πίνακας Βασικών Αόριστων Ολοκληρωμάτων

Α. $\int f^{\alpha}(x)f'(x)dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c\ ,\ \alpha \neq -1\ ,\ c \in R$

- $\int (3x-1)^{28}dx = \dfrac{1}{3}\int (3x-1)^{28}(3x-1)'dx = \dfrac{1}{3}\dfrac{(3x-1)^{29}}{29} + c,\ c \in R$

- $\int (x^2+6x+10)^{100}(x+3)dx = \int (x^2+6x+10)^{100}\dfrac{(x^2+6x+100)'}{2}dx$

  $= \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+6x+10)^{101}}{101} + c,\ c \in R$

- $\int \eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x dx = \int (\eta\mu^5 x)(\eta\mu x)'dx = \dfrac{\eta\mu^6 x}{6} + c,\ c \in R$

- $\int \dfrac{\ell nx}{x} = \int \left(\dfrac{1}{x}\right)\ell nx dx = \int (\ell nx)' \cdot \ell nx dx = \dfrac{\ell n^2 x}{2} + c,\ c \in R$

- $\int x\sqrt[3]{x^2+1} = \int (x^2+1)^{\frac{1}{3}}\dfrac{(x^2+1)'}{2}dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \dfrac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + c,\ c \in R$

- $\int \frac{x}{\sqrt[v]{x^2+3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)'(x^2+3)^{-\frac{1}{v}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+3)^{-\frac{1}{v}+1}}{-\frac{1}{v}+1}+c = \frac{v}{2(v-1)}(x^2+3)^{\frac{v-1}{v}}+c,\ c\in R$

Β. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ell n|f(x)|+c,\ c\in R$

- $\int \frac{1}{5-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(5-2x)'}{5-2x}dx = -\frac{1}{2}\ell n|5-2x|+c,\ c\in R$
- $\int \varepsilon\varphi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\ell n|\sigma\upsilon\nu x|+c,\ c\in R$
- $\int \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{(x^4+3x^2+1)'}{x^4+3x^2+1}dx = \ell n|x^4+3x^2+1|+c,\ c\in R$

Γ. $\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)}+c,\ c\in R$

- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^{\sqrt{x}}2(\sqrt{x})'dx = 2\int e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'dx = 2e^{\sqrt{x}}+c,\ c\in R$

Δ. $\int \eta\mu f(x)f'(x)dx = -\sigma\upsilon\nu f(x)+c,\ c\in R$	$\int \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)dx = \eta\mu f(x)+c,\ c\in R$

- $\int \eta\mu(x^2+6x)(2x+6)dx = -\sigma\upsilon\nu(x^2+6x)+c,\ c\in R$
- $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(\ell nx)}{x}dx = \int [\sigma\upsilon\nu(\ell nx)](\ell nx)'dx = \eta\mu(\ell nx)+c,\ c\in R$

Ε. $\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}dx = \varepsilon\varphi(f(x))+c,\ c\in R$	$\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}dx = -\sigma\varphi(f(x))+c,\ c\in R$

- $\int \frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu^2(e^x)}dx = \varepsilon\varphi(e^x)+c,\ c\in R$
- $\int \frac{1}{x\eta\mu^2(\ell nx)} = \int \frac{(\ell nx)'}{\eta\mu^2(\ell nx)} = -\sigma\varphi(\ell nx)+c,\ c\in R$

Ζ. $\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x)+c,\ c\in R$,	
$\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)}+c,\ c\in R$	$\int e^x(f(x)+f'(x))dx = e^x f(x)+c,\ c\in R$

- $\int \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}dx = \int \frac{(x)' e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \int \left(\frac{x}{e^x}\right)' dx = \frac{x}{e^x} + c,\ c \in R$

- $\int e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx = \int \left((e^x)' \eta\mu x + e^x (\eta\mu x)'\right)dx = \int (e^x \eta\mu x)' dx = e^x \eta\mu x + c,\ c \in R$

Η. Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης η οποία δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ και των οποίων ο παρονομαστής γίνεται γινόμενο παραγόντων και ο αριθμητής του είναι μικρότερου βαθμού από τον παρανομαστή τότε κάνουμε διάσπαση του κλάσματος όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x+4}{x^2-4x+3}dx$ **,** $x \in R - \{1,3\}$ **.**

Λύση

Είναι $\frac{x+4}{x^2-4x+3} = \frac{x+4}{(x-1)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{\alpha(x-3)+\beta(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{\alpha x - 3\alpha + \beta x - \beta}{(x-1)(x-3)} =$

$= \frac{(\alpha+\beta)x - 3\alpha - \beta}{(x-1)(x-3)}$ οπότε πρέπει: $(\alpha+\beta)x - 3\alpha - \beta = x + 4$ για κάθε $x \in R - \{1,3\}$ δηλαδή

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta=1 \\ -3\alpha-\beta=4 \end{array}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε: $-2\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{2}$ οπότε

$-\frac{5}{2} + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{2}$.

Έτσι: $\int \frac{x+4}{x^2-4x+3}dx = \int \left(\frac{-\frac{5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{7}{2}}{x-3}\right)dx = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-3}dx =$

$-\frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln|x-3| + c,\ c \in R$.

Θ. Για να υπολογίσουμε αόριστο ολοκλήρωμα κλάσματος του οποίου ο παρανομαστής γίνεται γινόμενο παραγόντων και ο αριθμητής του είναι βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του βαθμού του παρανομαστή τότε κάνουμε πρώτα διαίρεση και μετά διάσπαση.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3-4x+5}{x^2-3x+2}dx$.

Λύση

Κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-4x+5 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2-2x & \quad x+3 \\ \cline{1-1} 3x^2-6x+5 & \\ -3x^2+9x-6 & \\ \cline{1-1} 3x-1 & \end{array}$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3-4x+5=\left(x^2-3x+2\right)(x+3)+3x-1 \quad (1)$$

Είναι $\int \frac{x^3-4x+5}{x^2-3x+2}dx \overset{(1)}{=} \int \frac{(x+3)\left(x^2-3x+2\right)+3x-1}{x^2-3x+2}dx =$

$$=\int \frac{(x+3)\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-3x+2}dx+\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx = \int xdx+3\int dx+\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}+3x-2\ell n|x-1|+5\ell n|x-2|+c,\ c\in R$$

Το $\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2}dx$ το υπολογίσαμε όπως στο παράδειγμα 1 με τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα απλών κλάσματων.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\mathbf{I_1=\int συν^2x\,dx,\quad I_2=\int ημ^2\,dx,\quad I_3=\int ημ^2x\cdot συν^3xdx,\quad I_4=\int εφ^2xdx}$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $συν^2x=\frac{1+συν2x}{2}$ οπότε

$$I_1=\int συν^2x\,dx=\int \frac{1+συν2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int συν2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}ημ2x+c \qquad \left((ημ2x)'=συν2x\,(2x)'=2συν2x\right)$$

Επίσης ισχύει $ημ^2x=\frac{1-συν2x}{2}$ οπότε

$$I_2=\int ημ^2x\,dx=\int \frac{1-συν2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int συν2xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}ημ2x+c,\ c\in R$$

Είναι $I_3 = \int ημ^2xσυν^3x\,dx = \int ημ^2x \cdot συν^2x \cdot συνx\,dx = \int ημ^2x\left(1-ημ^2x\right)συνx\,dx =$

$$= \int ημ^2x \cdot συνx\,dx - \int ημ^4x \cdot συνx\,dx = \frac{1}{3}ημ^3x - \frac{1}{5}ημ^5x + c,\ c \in R$$

$$\left(\begin{array}{l}\left(ημ^3x\right)' = 3ημ^2x\left(ημx\right)' = 3ημ^2x \cdot συνx \\ \left(ημ^5x\right)' = 5ημ^4x\left(ημx\right)' = 5ημ^4x \cdot συνx\end{array}\right)$$

Είναι $I_4 = \int εφ^2x\,dx = \int \frac{ημ^2x}{συν^2x}dx = \int \frac{1-συν^2x}{συν^2x}dx = \int\left(\frac{1}{συν^2x} - 1\right)dx = εφx - x + c,\ c \in R$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Τύπος: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (1)

Χρησιμοποιείται κυρίως σε ολοκλήρωση γινομένου δύο συναρτήσεων. Ακόμη όμως και για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f παρατηρούμε ότι:

$$\int f(x)dx = \int 1f(x)dx = \int (x)' f(x)dx$$

Ο τύπος μπορεί να πάρει και τις μορφές

$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$

όπου $F(x)$, $G(x)$ παράγουσες των f, g αντίστοιχα.

Η επιλογή κατάλληλης παράγουσας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα του $2^{ου}$ μέλους της (1) να είναι απλούστερο στον υπολογισμό ή να είναι της μορφής $(κ)\cdot(\text{Αρχικό})$.

Επισημαίνουμε συνοπτικά κάποιες μορφές και ποια παράγουσα επιλέγουμε

α. (πολυωνυμική)·(εκθετική) με παράγουσα της εκθετικής

β. (πολυωνυμική)·(τριγωνομετρική) με παράγουσα της τριγωνομετρικής

γ. (πολυωνυμική)·(λογαριθμική) με την παράγουσα πολυωνυμικής

δ. (εκθετική)·(τριγωνομετρική) με παράγουσα όποια θέλουμε

Διαδοχική εφαρμογή της μεθόδου κάνουμε:

1. Στα γινόμενα α και β μέχρι να εξαντληθούν οι δυνάμεις του πολυωνύμου

2. Στο δ μέχρι να προκύψει το ζητούμενο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος και να το υπολογίσουμε επιλύοντας εξίσωση με άγνωστο ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Σημείωση: Όταν εφαρμόζεται πολλές φορές η προηγούμενη μέθοδος παίρνουμε κάθε φορά την παράγουσα της ίδιας μορφής δηλαδή ή μόνο της τριγωνομετρικής ή μόνο της εκθετικής εκτός από την περίπτωση γ. που παίρνουμε την παράγουσα της πολυωνυμικής.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα: $I_1=\int \ell nx dx$ **,** $I_2=\int \ell n^2(x+1)dx$

Λύση

Είναι $I_1=\int \ell nx dx=\int x'\ell nx dx=x\ell nx-\int x\frac{1}{x}dx=x\ell nx-x+c,\ c\in R$.

Επίσης $I_2=\int \ell n^2(x+1)dx=\int (x+1)'\ell n^2(x+1)dx=$

$$=(x+1)\ell n^2(x+1)-\int (x+1)2\ell n(x+1)\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=(x+1)\ell n^2(x+1)-2\int \ell n(x+1)dx=(x+1)\ell n^2(x+1)-2\int (x+1)'\ell n(x+1)dx=$$

$$=(x+1)\ell n^2(x+1)-2(x+1)\ell n(x+1)+2\int (x+1)\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=(x+1)\ell n^2(x+1)-2(x+1)\ell n(x+1)+2x+c,\ c\in R$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int (x^2+x)e^x dx,\quad I_2=\int (x^2+2x+3)\ell nx\,dx,\quad I_3=\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x\,dx,\quad I_4=\int 2^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

Λύση

Είναι $I_1=\int (x^2+x)(e^x)'dx=(x^2+x)e^x-\int (2x+1)e^x dx=(x^2+x)e^x-\int (2x+1)(e^x)'dx=$ $(x^2+x)e^x-(2x+1)e^x+\int 2e^x dx=(x^2+x)e^x-(2x+1)e^x+2e^x+c,\ c\in R$

Επίσης $I_2=\int\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)'\ell nx\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ell nx-\int\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\frac{1}{x}dx=$ $\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ell nx-\int\left(\frac{x^2}{3}+x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ell nx-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2-3x+c,\ c\in R$

Έχουμε $I_3=\int e^{2x}(\eta\mu x)'dx=e^{2x}\eta\mu x-2\int \eta\mu x e^{2x}dx=e^{2x}\eta\mu x+2\left[e^{2x}\sigma\upsilon\nu x-2\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x dx\right]$

οπότε $I_3=e^{2x}\eta\mu x+2e^{2x}\sigma\upsilon\nu x-4I_3$ ή $I_3=\frac{e^{2x}(\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x)}{5}+c,\ c\in R$

Είναι $I_4=\int 2^x\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int 2^x(\eta\mu x)'dx=2^x\eta\mu x-\int 2^x\ell n2\eta\mu x\,dx=$

$$2^x\eta\mu x+\ell n2\int 2^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=2^x\eta\mu x+\ell n2\left[2^x\sigma\upsilon\nu x-\int 2^x\ell n2\sigma\upsilon\nu x\,dx\right]$$ οπότε

$I_4 = 2^x ημx + 2^x συνx\ell n2 - \ell n2 I_4$ ή $I_4 = \dfrac{1}{\ell n^2 2}\left(2^x ημx + 2^x \ell n2 συνx\right) + c,\ c \in R$.

Παράδειγμα 6

Αν $I_ν = \int εφ^ν x dx$ **να δείξετε ότι** $I_ν + I_{ν-2} = \dfrac{1}{ν-1} εφ^{ν-1} x$ **με** $ν \geq 3$**.**

Λύση

$$I_ν = \int εφ^ν x dx = \int εφ^{ν-2} x \cdot εφ^2 x dx = \int εφ^{ν-2} x \cdot \left(\frac{1}{συν^2 x} - 1\right) dx = \int εφ^{ν-2} x \cdot \frac{1}{συν^2 x} dx - \int εφ^{ν-2} x\, dx$$

$$= \int εφ^{ν-2} x \cdot (εφx)' dx - I_{ν-2} \overset{u=εφx}{=} \int u^{ν-2} du - I_{ν-2} =$$

$$\frac{u^{ν-1}}{ν-1} - I_{ν-2} = \frac{1}{ν-1} εφ^{ν-1} x - I_{ν-2}$$

> Για την ολοκλήρωση των $εφ^ν x$, $σφ^ν x$ χρησιμοποιούμε τους τύπους:
> $εφ^2 x = \dfrac{1}{συν^2 x} - 1$, $σφ^2 x = \dfrac{1}{ημ^2 x} - 1$
> και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης.

> **Κατηγορία – Μέθοδος 3**
> **Ολοκλήρωση με αντικατάσταση**
> Θεωρητική στήριξη της μεθόδου αποτελεί ο τύπος:
> $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$ όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x) dx$
> με την προϋπόθεση ότι $\int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c,\ c \in R$ (όπου F μια παράγουσα της f).
> Εφαρμόζεται από το 1ο μέλος στο 2ο σε ολοκληρώματα που έχουν η μπορούν να πάρουν την μορφή $\int f(g(x)) g'(x) dx$ και ο υπολογισμός του $\int f(u) du$ είναι ευκολότερος και από το 2ο μέλος στο 1ο όταν ζητούμενο είναι το $I = \int f(x) dx$ και υπάρχει κατάλληλη αντικατάσταση $x = g(t)$ οπότε $dx = g'(t) dt$ που το $\int f(g(t)) g'(t) dt$ υπολογίζεται εύκολα.

Εφαρμογές:

1. Σε πολυώνυμα

$I = \int (2x+6)(x^2+6x+7)^8 dx =$ (θέτουμε $u = x^2 + 6x + 7$ οπότε $du = (2x+6) dx$)

$$= \int u^8 du = \frac{u^9}{9} + c = \frac{1}{9}(x^2+6x+7)^9 + c,\ c \in R.$$

2. Σε κλάσματα

α. $\displaystyle\int \frac{\ell nx}{x} dx = \int \ell nx \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ell nx (\ell nx)' dx \overset{u=\ell nx}{=} \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}\ell n^2 x + c,\ c \in R$

β. $\int \frac{dx}{x\ell nx\ell n(\ell nx)} = \int \frac{(\ell nx)' dx}{\ell nx\ell n(\ell nx)} \overset{u=\ell nx}{=} \int \frac{du}{u\ell nu} = \int (\ell nu)' \frac{1}{\ell nu} du \overset{y=\ell nu}{=} \int \frac{dy}{y} = \ell n|y| + c =$

$= \ell n|\ell nu| + c = \ell n|\ell n(\ell nx)| + c,\ c \in R$

γ. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x)'}{e^x+1} dx \overset{u=e^x}{=} \int \frac{du}{u+1} = \ell n|u+1| + c = \ell n|e^x+1| + c = \ell n(e^x+1) + c,\ c \in R$

δ. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx \overset{u=x^2+4x+5}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$\sqrt{u} + c = \sqrt{x^2+4x+5} + c,\ c \in R$

3. Σε ρίζες

$I = \int x\sqrt{x+1}$ Θέτουμε την ρίζα $\sqrt{x+1} = u$ οπότε $du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$ ή $dx = 2 \cdot u \cdot du$.

Ακόμη $\sqrt{x+1} = u \Leftrightarrow x+1 = u^2 \Leftrightarrow x = u^2 - 1$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$I = \int (u^2-1)u2udu = \int (2u^4 - 2u^2)du = 2\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} + c =$

$= \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + c,\ c \in R$

4. Σε ολοκλήρωση γινομένων της μορφής $I = \int ημ^ν xσυν^μ xdx$

α. Αν υπάρχει περιττός εκθέτης κάνουμε διάσπαση.

Έτσι $I = \int ημ^3 xσυν^4 xdx = \int ημ^2 xσυν^4 xημx\, dx =$

$= -\int (1-συν^2x)συν^4x(συνx)' dx \overset{u=συνx}{=} -\int (1-u^2)u^4 du$

$= -\int (u^4 - y^6)du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c = -\frac{1}{5}συν^5 x + \frac{1}{7}συν^7 x + c,\ c \in R$

Στην περίπτωση που και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού: $συν^2 x = \frac{1+συν2x}{2}$, $ημ^2 x = \frac{1-συν2x}{2}$

Έτσι $I = \int συν^4 xdx = \int (συν^2 x)^2 dx = \int \frac{(1+συν2x)^2}{4} dx =$

$\int \frac{1+2συν2x+συν^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ημ2x + \int \frac{1}{4}συν^2 2xdx =$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\eta\mu 2x+\frac{1}{8}\int(1+\sigma\upsilon\nu 4x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\eta\mu 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\eta\mu 4x+c,\ c\in R$$

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστούν τα $I_1=\int\varepsilon\varphi x dx$ **,** $I_2=\int\frac{1}{\eta\mu x}dx$ **.**

Λύση

Έχουμε: $I_1=\int\varepsilon\varphi x dx=\int\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx=-\int\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx=-\int\frac{du}{u}=-\ell n|u|+c=-\ell n|\sigma\upsilon\nu x|+c,\ c\in R$

$$I_2=\int\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=-\int\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx\overset{u=\sigma\upsilon\nu x}{=}-\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{du}{u^2-1}=\int\frac{A}{u+1}du+\int\frac{B}{u-1}du$$

όπου τα A, B υπολογίζονται κατά τα γνωστά δηλαδή $\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u-1}$.

> **Κατηγορία – Μέθοδος 4**
> **Εύρεση του τύπου συνάρτησης** όταν γνωρίζουμε μια σχέση μεταξύ της συνάρτησης και της παραγώγου της.
> Βασική επιδίωξη είναι από την δοσμένη σχέση να καταλήξουμε σε ισότητα που η ολοκλήρωση των δύο μελών να μας δίνει εξίσωση που μοναδικός άγνωστος θα είναι η $f(x)$.
> Από τα δεδομένα αν υπάρχουν υπολογίζουμε την σταθερά c.

Παράδειγμα 8

Α. Να βρεθεί συνάρτηση $f(x)$ **με** $Af=R$**,** $f(x)>0$ **για κάθε x τέτοια ώστε** $f'(x)(x^2-x+1)=(2x-1)f(x)$ **της οποίας η εφαπτομένη στο** $A(2,f(2))$ **έχει κλίση 18.**

Β. Να βρεθεί η συνάρτηση f(x) στις παρακάτω περιπτώσεις

α. $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $f(x)\neq 0$, $f(1)=1$.

β. $f'(x)+f(x)=2$ **και το** C_f **περνά από** $(1,e)$

γ. $f'(x)-f(x)=1$ **και** C_f **περνά από** $(1,1)$.

Λύση

Α. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ οπότε $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$ ή $\ell nf(x)=\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx$ ή

$\ell nf(x)=\ell n(x^2-x+1)+c=\ell n(x^2-x+1)+\ell ne^c=\ell ne^c(x^2-x+1)$.

Είναι $f(x)=e^c(x^2-x+1)$ και με $x=2$ προκύπτει $f'(2)=18\Rightarrow$

$\overset{\upsilon\pi o\theta.}{\Rightarrow}3\cdot 18=3f(2)\Rightarrow f(2)=18\Rightarrow 18=e^c 3\Rightarrow e^c=6\Rightarrow f(x)=6(x^2-x+1)$

Β.α. $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $f(x)\neq 0$,

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x\Rightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=2x\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\int 2x dx\Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)}=x^2+c\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+c},\ c\in R \text{ με } x=1\Rightarrow 1=\frac{1}{1+c}\Rightarrow c=0,\ c\in R, f(x)=\frac{1}{x^2}$$

β. Με τη χρήση της συνάρτησης e^x.

$f'(x)+f(x)=2$ πολλαπλασιάζουμε με e^x και έχουμε:

$$f'(x)e^x+f(x)(e^x)'=2e^x\Rightarrow[f(x)e^x]'=2e^x\Rightarrow$$

$$\int\left[f(x)e^x\right]'dx=\int 2e^x dx\Rightarrow f(x)e^x=2e^x+c\Rightarrow f(x)=2+ce^{-x},\ c\in R.$$

Με $x=1$ είναι $e=2+c-e^{-1}\Leftrightarrow c=e(e-2)$. Άρα $f(x)=2+e(e-2)e^{-x}$.

γ. Ομοίως $\dfrac{f'(x)e^x-f(x)(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{1}{e^x}\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=e^{-x}\Rightarrow\dfrac{f(x)}{e^x}=\int e^{-x}dx\Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{e^x}=-e^{-x}+c\Rightarrow f(x)=-1+ce^x,\quad x=1\Rightarrow 1=-1+ce\Rightarrow c=\frac{2}{e}\Rightarrow f(x)=-1+2e^{x-1},$$

$c\in R$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\displaystyle\int\frac{x^3+27}{x+3}dx$ **β.** $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$ **γ.** $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

δ. $\displaystyle\int e^x\text{συν}e^x dx$ **ε.** $\displaystyle\int\frac{\text{ημ}2x}{1+\text{συν}^2x}dx$ **στ.** $\displaystyle\int\text{συν}x\cdot e^{\text{ημ}x}dx$

2. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx$ **β.** $\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ **γ.** $\displaystyle\int\text{εφ}x\,dx$

δ. $\displaystyle\int\text{σφ}x\,dx$ **ε.** $\displaystyle\int\frac{1}{\text{ημ}x\cdot\text{συν}x}dx$ **στ.** $\displaystyle\int\frac{1}{\text{ημ}^2x\cdot\text{συν}^2x}dx$

3. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int e^{-x}\eta\mu x\,dx$ **β.** $\int x^2 \ln x\,dx$ **γ.** $\int e^x \cdot \eta\mu 2x\,dx$

δ. $\int \ln x\,dx$ **ε.** $\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$ **στ.** $\int x^2 \cdot e^{-x}dx$

4. Να βρείτε την συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) = 6x + 20,\ f'(-2) = -2,\ f(0) = 2$$

5. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: R \to (0,+\infty)$ όταν για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\left(x^2 - x + 1\right)f'(x) = (2x-1)f(x)$$

και η εφαπτομένη της C_f στο $\left(2, f(2)\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 18.

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1$ να είναι η αρχική της συνάρτησης $g(x) = 3x^2 + x - 4$.

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: **α.** $\int \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2}dx$, **β.** $\int \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x+2\right)}dx$

8. Να βρείτε την συνάρτηση f αν για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)e^{f(x)} = 2x - 1$ και η γραφική παράσταση της f στο σημείο $A\left(1, f(1)\right)$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 3.

9. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 12x^2 + 2$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

10. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ **β.** $\int \left(\eta\mu\left(\eta\mu x + x\right)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\left(\eta\mu x + x\right)dx\right)$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Ένα δοχείο αρχικά περιέχει ένα λίτρο χημικής ουσίας Χ και 20 λίτρα νερό. Η ουσία Χ αντιδρά με το νερό ώστε να σχηματιστεί αέριο.
Τη χρονική στιγμή t sec απομένουν στο δοχείο υ λίτρα της ουσίας Χ ενώ ο όγκος του νερού έχει μειωθεί κατά $2(1-\upsilon)$ λίτρα.
Ο ρυθμός μείωσης του όγκου της ουσίας Χ είναι κάθε χρονική στιγμή ανάλογος του γινομένου του όγκου της Χ και του όγκου του νερού που υπάρχει στο δοχείο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

α. Να δείξετε ότι $\frac{du}{dt} = -ku(9+u)$ **όπου k είναι θετική σταθερά.**

β. Να λύσετε την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

γ. Αν είναι γνωστό ότι όταν $t = 30$ **είναι** $u = 0,9$ **τότε να βρείτε:**

i. Πόσος χρόνος χρειάστηκε ώστε το $\frac{1}{4}$ **της αρχικής ποσότητας της Χ να αντιδράσει με το νερό.**

ii. Ποιος είναι ο όγκος της Χ που απομένει στο δοχείο μετά τα 5 πρώτα λεπτά.

Δίνεται: $\ell n1,1 \cong \frac{2}{21}$, $\ell n1,3 \cong \frac{16}{61}$, $\left(\frac{10}{11}\right)^{10} \cong \frac{5}{13}$.