Μάθημα 17

Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η διαδικασία με την οποία προσδιορίζουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης ονομάζεται **μελέτη συνάρτησης**.
Αυτή συνίσταται στα εξής βασικά βήματα:

1. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$.
2. Ελέγχουμε την περιοδικότητα της f και τις "συμμετρίες" της γραφικής παράστασης C_f.
3. Εξετάζουμε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια.
4. Προσδιορίζουμε τις f' και f'' και βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f, τα διαστήματα κυρτότητας, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.
5. Υπολογίζουμε τα όρια στα άκρα όλων των ανοικτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f και προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.
6. Προσδιορίζουμε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
7. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f όπου σημειώνουμε το πρόσημο των $f'(x)$ και $f''(x)$ και τα όρια που υπολογίσαμε.
8. Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε προσεγγιστικά την γραφική παράσταση της f.

Β. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$, και είναι συνεχής στο R.

Είναι $f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3)' - (3x)' + 2' = 3x^2 - 3$,

$x \in A$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Επίσης $f''(x) = (3x^2 - 3)' = (3x^2)' - 3' = 6x$, για κάθε $x \in A$
με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty,-1)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Για κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Ακρότατα

Στα σημεία $x=-1$ και $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατες τιμές.

Ειδικότερα στο $x=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=4$ και στο $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=0$.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x \in (-\infty,0)$ είναι $f''(x) < 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0,+\infty)$

Σημεία καμπής

Στο $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει καμπή με Σ.Κ. το $A(0,f(0))$ δηλαδή το $A(0,2)$.

Ασύμπτωτες: Δεν υπάρχουν αφού η f είναι πολυωνυμική.

Σημεία τομής με τους άξονες

Για $x=0$ είναι $f(0)=2$ οπότε η C_f τέμνει τον yy΄ στο $A(0,2)$.

Για $y=0$ είναι $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow x^3-x-2x+2=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)-2]=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow$

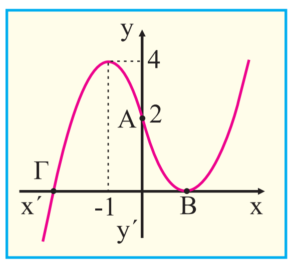
$x=1$ ή $x=1$ ή $x=-2$ οπότε η C_f εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο $B(1,0)$ και τον τέμνει στο $\Gamma(-2,0)$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		−		−	0	+		+	
f	$(-\infty)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	$(+\infty)$
			Τ.Μ.		Σ.Κ.		Τ.Ε.		

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορίσμου $A=R-\{x\in R: x-1=0\}=R-\{1\}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$ για κάθε $x\in A$.

Είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x\in A$ και

$$f''(x)=\left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}$$ για κάθε $x\in A$.

Επίσης έχουμε $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in A$ και

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 6(x-1)^3>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

x	-∞	1	+∞
$f'(x)$	−	‖	−

x	-∞	1	+∞
$f''(x)$	−	‖	+

Μονοτονία της f

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$, είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για το $(1,+\infty)$.

Ακρότατα: Δεν υπάρχουν αφού η f' δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι $f''(x)<0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,1)$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1,+\infty)$.

Σημεία καμπής: Δεν υπάρχουν αφού στο $x_0=1$ εκατέρωθεν του οποίου αλλάζει πρόσημο η δεύτερη παράγωγος η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

Ασύμπτωτες

α. Είναι
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\frac{2x+1}{x-1}=-\infty\\ \lim_{x\to1^+}f(x)&=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1}{x-1}=+\infty\end{aligned}\right\}$$
Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του διαγράμματος της f.

β. Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f, στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής με τους άξονες

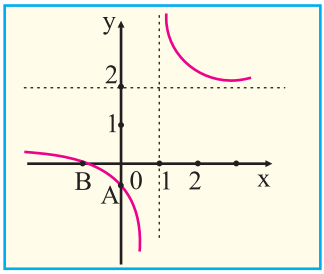
Για $x=0$ είναι $f(0)=-1$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-1)$.

Για $y=0$ είναι $\dfrac{2x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $B\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
f	(2)	↘ $(-\infty)$	‖	$(+\infty)$ ↘	(2)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 3

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$**.**

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=R-\{x\in R: x-2=0\}=R-\{2\}$.

Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+3}{x-2}\right)'=\dfrac{(x^2+3)'\cdot(x-2)-(x^2+3)(x-2)'}{(x-2)^2}=\dfrac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-4x-x^2-3}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$, για κάθε $x\in R-\{2\}$

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x-3 \Leftrightarrow x_1=2-\sqrt{7}$ ή $x_2=2+\sqrt{7}$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	

Είναι $f''(x)=\left[\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}\right]'=\dfrac{(x^2-4x-3)'(x-2)^2-(x^2-4x-3)[(x-2)^2]'}{(x-2)^4}=$

$=\dfrac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-3)2(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{2(x-2)[(x-2)^2-(x^2-4x-3)]}{(x-2)^4}=$

$=\dfrac{2(x-2)(x^2-4x+4-x^2+4x+3)}{(x-2)^4}=\dfrac{2\cdot 7}{(x-2)^3}=\dfrac{14}{(x-2)^3}$, για κάθε $x\in A=R-\{2\}$.

Είναι φανερό ότι $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A = R - \{2\}$
Είναι: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 14(x-2)^3 > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 2-\sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2-\sqrt{7}]$
Για κάθε $x \in (2-\sqrt{7}, 2)$ ή $(2, 2+\sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[2-\sqrt{7}, 2)$, $(2, 2+\sqrt{7}]$.
Για κάθε $x \in (2+\sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2+\sqrt{7}, +\infty)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2-\sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (2-\sqrt{7}, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ έπεται ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2-\sqrt{7}$ τοπικό μέγιστο το $f(2-\sqrt{7}) = 4-2\sqrt{7}$. Επίσης για κάθε $x \in (2, 2+\sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (2+\sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2+\sqrt{7}$ τοπικό ελάχιστο το $f(2+\sqrt{7}) = 4+2\sqrt{7}$.

Κυρτότητα της f

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2)$ είναι $f''(x) < 0$, η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2)$.
Επειδή για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$, η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2, +\infty)$.

Σημεία καμπής

Εκατέρωθεν του $x_0 = 2$ αλλάζει πρόσημο η f'' αλλά στο σημείο αυτό η f δεν παρουσιάζει καμπή αφού $2 \notin A$.

Ασύμπτωτες

α. $$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty\end{aligned}\right\}$$ Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στα $+\infty$ και $-\infty$ διότι:

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-2x} = 1 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2$$

Σημεία τομής της C_f με τους άξονες

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=-\dfrac{3}{2}$ οπότε η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$.

Για $y=0$ έχουμε $\dfrac{x^2+3}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^2+3=0$, (αδύνατη). Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

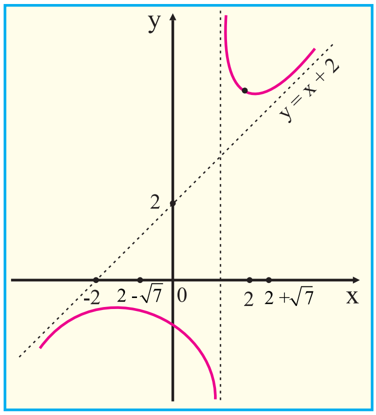
Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=+\infty$$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
f	$(-\infty)$	↗	$4-2\sqrt{7}$	↘	$(-\infty)$ ‖ $(+\infty)$	↘	$4+2\sqrt{7}$	↗	$(+\infty)$
			T.M.				T.E.		

Γραφική παράσταση



Άσκηση 4

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=R-\{x\in R: x(x-1)=0\}=R-\{0,1\}$

Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)'=-\dfrac{(x^2-x)'}{(x^2-x)^2}=-\dfrac{2x-1}{(x^2-x)^2}$, για κάθε $x\in A=R-\{0,1\}$

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

Επίσης $f''(x)=\left[\dfrac{1-2x}{(x^2-x)^2}\right]'=\dfrac{(1-2x)'(x^2-x)^2-(1-2x)\left[(x^2-x)^2\right]'}{(x^2-x)^4}=$

$$=\frac{-2(x^2-x)^2-(1-2x)2(x^2-x)(x^2-x)'}{(x^2-x)^4}=\frac{-2(x^2-x)^2-(1-2x)2(x^2-x)(2x-1)}{(x^2-x)^4}=$$

$$=\frac{-2(x^2-x)[(x^2-x)-(2x-1)^2]}{(x^2-x)^4}=\frac{-2(x^2-x)(x^2-x-4x^2-1+4x)}{(x^2-x)^4}=$$

$$=\frac{-2(-3x^2+3x-1)}{(x^2-x)^3}=\frac{2(3x^2-3x+1)}{(x^2-x)^3}\text{, για κάθε } x\in A=R-\{0,1\}$$

Η $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3x+1=0$ που είναι αδύνατη στο $R-\{0,1\}$ οπότε $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in A$.

Για το πρόσημο της f'' έχουμε:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2(3x^2-3x+2)(x^2-x)^3>0 \Leftrightarrow x^2-x>0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$ και $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Μονοτονία της f

Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)<0$ η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=\frac{1}{2}\in A$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4$.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,0)$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)<0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,1)$

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1,+\infty)$

Σημεία καμπής

Εκατέρωθεν των σημείων $x=0$ και $x=1$ αλλάζει πρόσημο η f''. Επειδή όμως τα σημεία 0 και 1 δεν ανήκουν στο A η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x(x-1)} = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x(x-1)} = -\infty$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x(x-1)} = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x(x-1)} = +\infty$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x(x-1)} = 0$. Η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f , στα $+\infty$ και $-\infty$.

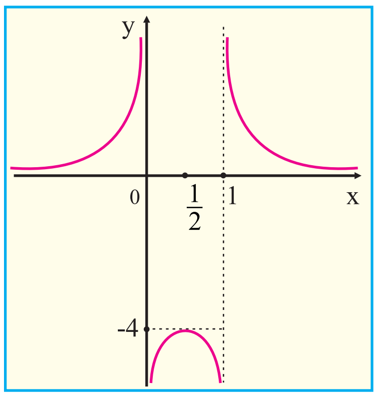
Σημεία τομής με τους άξονες

Δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες αφού στο $x_0 = 0$ η f δεν ορίζεται ενώ για $y = 0$ προκύπτει αδύνατη εξίσωση.

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f''(x)$		+	‖	−		−	‖	+	
f	(0)	↗	(+∞) ‖ (-∞)	↗	-4 Τ.Μ.	↘	(-∞) ‖ (+∞)	↘	(0)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 5

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^x$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \{x \in R : x > 0\} = (0, +\infty)$

Είναι $f'(x) = (x^x)' = (e^{x\ell nx})' = e^{x\ell nx}(x\ell nx)' = e^{x\ell nx}\left[(x)'\ell nx + x(\ell nx)'\right] =$

$= x^x\left(\ell nx + x\dfrac{1}{x}\right) = x^x(\ell nx + 1)$.

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ell nx+1=0 \Leftrightarrow \ell nx=-1 \Leftrightarrow \ell nx=\ell n\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	0		1/e	
f΄(x)	‖	−	0	+

Είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ell nx>-1 \Leftrightarrow \ell nx>\ell n\frac{1}{e} \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Επίσης $f''(x)=[x^x(\ell nx+1)]'=[e^{x\ell nx}(\ell nx+1)]'=(e^{x\ell nx})'(\ell nx+1)+e^{x\ell nx}(\ell nx+1)'=$

$=e^{x\ell nx}(x\ell nx)'(\ell nx+1)+e^{x\ell nx}\frac{1}{x}=e^{x\ell nx}(\ell nx+1)(\ell nx+1)+e^{x\ell nx}\frac{1}{x}=$

$=e^{x\ell nx}\left[(\ell nx+1)^2+\frac{1}{x}\right]=e^{x\ell nx}\frac{x(\ell nx+1)^2+1}{x}=x^x\frac{x(\ell nx+1)^2+1}{x}$, για κάθε $x\in A$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in A=(0,+\infty)$ είναι $f''(x)\neq 0$ και μάλιστα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in A$.

Μονοτονία της f

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$ η f παρουσιάζει στο $x_0=\frac{1}{e}\in A$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

Κυρτότητα της f

Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$

Σημεία καμπής

Δεν υπάρχουν διότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)=A$.

Ασύμπτωτες

Δεν υπάρχουν.

Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ell nx} = 1$ διότι:

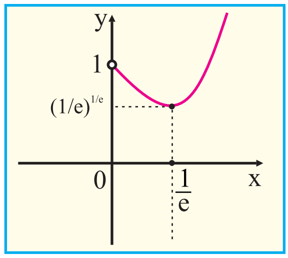
$$\lim_{x\to 0^+} x\ell nx = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 .$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$.

Πίνακας Μεταβολών

x	0		1/e		+∞
f΄(x)		−	0	+	
f΄΄(x)		+		+	
f	(1)	↘	Τ.Ε. $((1/e)^{1/e})$	↗	(+∞)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 6

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες.

Λύση

Έχουμε: $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$

για κάθε $x \in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

Προφανώς κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν διότι η f είναι συνεχής στο R. Χρησιμοποιώντας γνωστό κριτήριο εξετάζουμε την ύπαρξη πλαγίων ή οριζοντίων ασυμπτώτων:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x x(1 + e^{-2x})} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

Ομοίως βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$. Συνεπώς οι ευθείες $y = 1$ και $y = -1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντιστοίχως.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\ell nx}{x^\nu}$ όπου $\nu \in N^* - \{1\}$. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα , τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

Λύση

$A_f = (0,+\infty)$. Είναι $f'(x) = \dfrac{x^{\nu-1} - \nu x^{\nu-1}\ell nx}{x^{2\nu}} = \dfrac{1-\nu\ell nx}{x^{\nu+1}}$.

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ell nx = \dfrac{1}{\nu} \Leftrightarrow x = e^{1/\nu}$. Επομένως το $x=e^{1/\nu}$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Επίσης $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<e^{\frac{1}{\nu}}$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e^{\frac{1}{\nu}}$.

Επίσης $f''(x) = \dfrac{-\nu x^{\nu} - (\nu+1)x^{\nu}(1-\nu\ell nx)}{x^{2\nu+2}} = \dfrac{x^{\nu}[-(2\nu+1)+\nu(\nu+1)\ell nx]}{x^{2\nu+2}} =$

$\dfrac{\nu(\nu+1)\ell nx-(2\nu+1)}{x^{\nu+2}}$. Έχουμε $f''(x)=0 \Leftrightarrow \ell nx = \dfrac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}}$.

Επίσης $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>e^{\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}}$. Άρα στο σημείο "θέση" $x=e^{\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}}$ παρουσιάζει καμπή.

Σχετικά με τις ασύμπτωτες έχουμε:

• **Οριζόντιες - πλάγιες ασύμπτωτες**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx}{x^{\nu+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ell nx)'}{(x^{\nu+1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\nu+1)x^{\nu+1}} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx}{x^{\nu}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ell nx)'}{(x^{\nu})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\nu x^{\nu}} = 0.$$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

• **Κατακόρυφες ασύμπτωτες:**

$$\lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{x^{\nu}} = \lim_{x\to0^+}\ell nx\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{\nu}} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

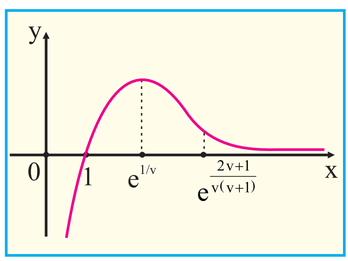
Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f:

x	0		$e^{1/\nu}$		$e^{\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	
$f''(x)$		−		−	0	+	
f		↗		↘		↘	

(Είναι $e^{\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}} > e^{1/\nu}$ διότι $\dfrac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} > \dfrac{1}{\nu}$ και η e^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση). Έτσι στη θέση $x=e^{1/\nu}$ η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο ενώ στη θέση $x=e^{\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}}$ η f παρουσιάζει καμπή.

Με βάση τον πίνακα αυτό σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f:



Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{(2x+8)(x-3)}{x^2-9}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Να σχεδιαστεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f (χωρίς να γίνει αναφορά στον τύπο της) η οποία να έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις ευθείες $y=1$, $y=2$ και

α. Κανένα ακρότατο, **β.** Ένα τοπικό ακρότατο
γ. Δύο τοπικά ακρότατα **δ.** Τρία τοπικά ακρότατα

4. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις:

1. $f(x)=2x^2-4x+3$ **2.** $f(x)=xe^x$ **3.** $f(x)=e^{-\ell n|x-1|}$

4. $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ **5.** $f(x)=\frac{|x-1|}{1-|x|}$ **6.** $f(x)=\frac{\ell nx}{x^2}$

7. $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}$ **8.** $f(x)=συν^2x$

5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της για δύο αντίθετες τιμές του x οι οποίες και να προσδιοριστούν.
Στη συνέχεια να γίνει η μελέτη αυτής της συνάρτησης και η γραφική της παράσταση.

(**Απ.:** Οι τιμές του $x=\pm1$)

6. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{2}\ell n\frac{1+x}{1-x}$.
Ποιο είναι το σύνολο τιμών της;
Να καθοριστεί η αντίστροφη της f (η f^{-1}) και το σύνολο τιμών της αντίστροφης. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.
Τέλος να αποδειχθεί η σχέση: $f^{-1}(x)<|x|<f(x)$ για κάθε $x\in(-1,1)$ και να ερμηνευθεί γεωμετρικά με βάση τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

7. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x}{x-\ell nx}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Στη συνέχεια, αφού αποδειχθεί ότι $\frac{x}{x-\ell nx}\le x$ για κάθε $x>0$, να ερμηνευθεί γεωμετρικά η ανισότητα αυτή με βάση τη γραφική παράσταση της f.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$. Να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\dfrac{x^3}{3-x^2}=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$.

10. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\eta\mu^2 x}{2+\eta\mu x}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση

α. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$ **β.** $g(x)=e^{1/x}$

Β. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων $f(x)=\lambda$ και $g(x)=\mu$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda,\mu\in R$.