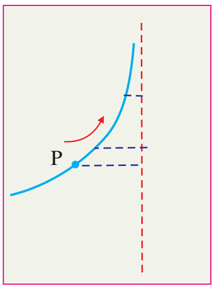
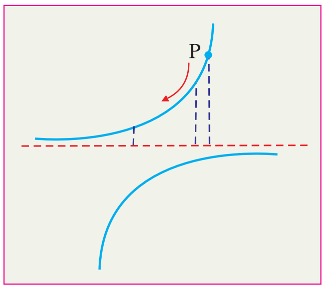
Μάθημα 16

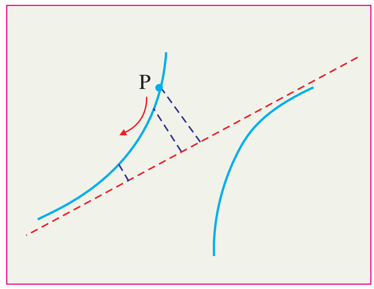
# Ασύμπτωτες

## Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορίζουμε μια ευθεία $(\varepsilon)$ ως **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου P της γραφικής παράστασης από την ευθεία $(\varepsilon)$ γίνεται απεριόριστα μικρή όταν το P μετακινείται προς το "άπειρο" κινούμενο επί της καμπύλης $C_f$ όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

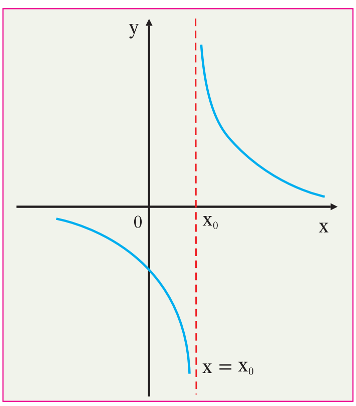


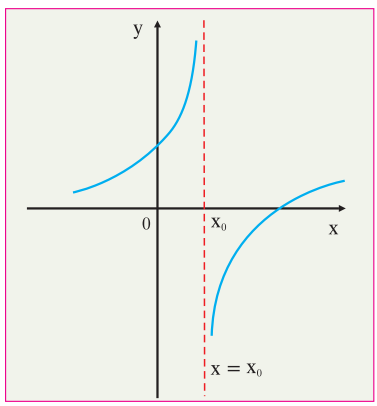




### 1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

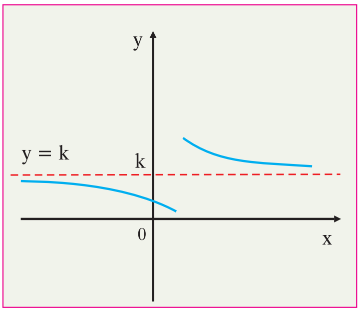
Η ευθεία $x = x_0$ χαρακτηρίζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

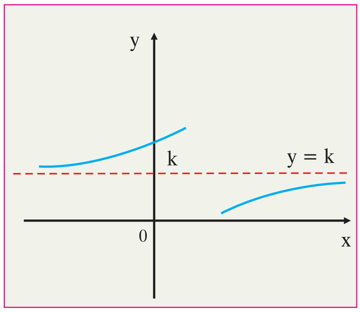


## 2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k\in R$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k\in R$, τότε ορίζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ την ευθεία $y=k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.




**Σχόλιο**

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ η $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ τότε η $C_f$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα.

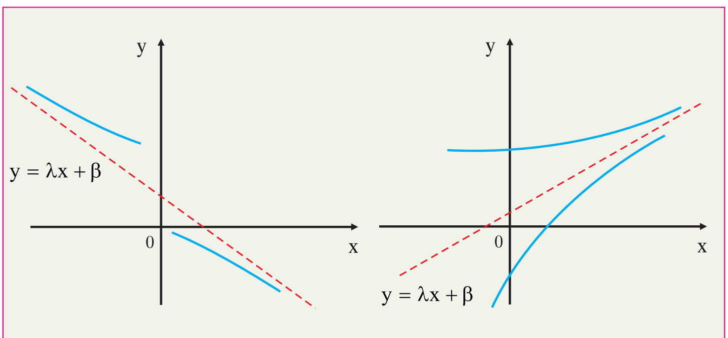
Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$ ή να έχει διαφορετικές ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ή να έχει την ίδια ευθεία ως ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

## 3. Πλάγια ασύμπτωτη

Ορίζουμε την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ ως πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0 \text{ ή } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$$

αντίστοιχα.




πλάγια ασύμπτωτη της f

**Σχόλιο**

Η ασύμπτωτη είναι οριζόντια αν $\lambda=0$, ενώ είναι πλάγια αν $\lambda\neq 0$.

Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες της $C_f$ χρησιμοποιούμε το παρακάτω **θεώρημα:**

**Θεώρημα**

Η $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ ή}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in R \text{ αντίτοιχα.}$$

## B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**Κατηγορία – Μέθοδος 1**

**Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης**

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα σημεία $x_0$ που η f δεν είναι συνεχής και στα σημεία $x_0$ που είναι άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

**Παράδειγμα 1**

**Έστω $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ .Να προσδιορίσετε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης f.**

**Λύση**

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=R-\{-1,1\}$ .Άρα τις κατακόρυφες ασύμπτωτες θα τις αναζητήσουμε στις θέσεις $x_0=-1$ και $x_0=1$.

Για $x_0=-1$ έχουμε : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$ οπότε η $C_f$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=-1$.

Για $x_0=1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$ με $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty\end{cases}$

οπότε η $C_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=1$ την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

**Κατηγορία – Μέθοδος 2**

**Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης**

Για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (Αρκεί το πεδίο ορισμού της να έχει άκρο το $+\infty$ ή το $-\infty$).

Αν κάποιο από τα παραπάνω όρια είναι πραγματικός αριθμός , έστω k τότε η ευθεία $y=k$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ .

**Παράδειγμα 2**

**Να προσδιορίσετε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων με τύπους:**

**i.** $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-1}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$

**Λύση**

**i.** Επειδή το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$, η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=2$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

**ii.** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x+2)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

οπότε η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, οπότε η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=2$.

**Κατηγορία – Μέθοδος 3**

**Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης**

Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες της $C_f$ στο $+\infty$, εφ' όσον το $+\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της, κάνουμε τα εξής:

**1.** Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$.

Αν το $\lambda$ δεν είναι πραγματικός αριθμός τότε η $C_f$ **δεν** έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν το $\lambda$ είναι πραγματικός αριθμός τότε:

**2.** Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta$

Αν το $\beta$ δεν είναι πραγματικός αριθμός τότε η $C_f$ **δεν** έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν το $\beta$ είναι πραγματικός αριθμός τότε η $C_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση: $y=\lambda x+\beta$.

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε αν η $C_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$, αν βεβαίως το $-\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της.

**Παράδειγμα 3**

**Έστω** $f(x)=\sqrt{x^2-25}$ **με** $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.

**Να εξετάσετε αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη.**

**Λύση**

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{25}{x^2}} = 1 = \lambda$$

και $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-25}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-25}-x\right)\left(\sqrt{x^2-25}+x\right)}{\sqrt{x^2-25}+x} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-25-x^2}{x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-25}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = 1\cdot x + 0 = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

Επίσης έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}\right] = -1 = \lambda$$

και $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-25}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-25}+x\right)\left(\sqrt{x^2-25}-x\right)}{\sqrt{x^2-25}-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-25-x^2}{-x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-25}{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

**Προσοχή**

Αν το $\lambda = 0$ και $\beta \in R$ τότε η πλάγια ασύμπτωτη γίνεται της μορφής $y = \beta$ που είναι οριζόντια. Άρα η f δεν μπορεί να έχει στο $+\infty$ συγχρόνως οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη. Ομοίως και για το $-\infty$.

**Παρατηρήσεις**

**1.** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δεύτερου δεν έχουν ασύμπτωτες.

**2.** Στις κλασματικές συναρτήσεις σε κάθε ρίζα του παρονομαστή που δεν είναι ρίζα και του αριθμητή έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης.

Ειδικότερα στις ρητές συναρτήσεις:

**α.** Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή τότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

**β.** Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή τότε η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ όπου $\alpha_\nu, \beta_\nu$ είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων του αριθμητή και παρονομαστή αντίστοιχα.

**γ.** Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρανομαστή τότε η $C_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη.

**δ.** Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος τουλάχιστον κατά δύο από το βαθμό του παρανομαστή η συνάρτηση δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

**3.** Μία πλάγια ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση της $f$.

## Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1

**Έστω $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}$. Δείξτε ότι η $y=2x-3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.**

**Λύση**

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-3)\right]=0$.

Πράγματι είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}-(2x-3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}-2x+3\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+7-2x^2+5x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$

Άρα η $C_f$ έχει την $y=2x-3$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

### Άσκηση 2

**Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}$ με $\alpha\neq 0$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $C_f$ να έχει την $y=\beta x-4$ με $\beta\neq 13$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.**

**Λύση**

Ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\beta$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\beta x\right)=-4$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-13x+6}{3x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{3x^2}=\dfrac{\alpha}{3}$.

Έχουμε $\dfrac{\alpha}{3}=\beta\Leftrightarrow\boxed{\alpha=3\beta}$ (1) και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}-\beta x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3\beta x^2-13x+6}{3x-1}-\beta x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\beta x^2-13x+6-3\beta x^2+\beta x}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\beta-13)+6}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\beta-13)}{3x}=\dfrac{\beta-13}{3}$

έχουμε $\dfrac{\beta-13}{3}=-4\Leftrightarrow\beta-13=-12\Leftrightarrow\beta=1$ και λόγω της (1) $\alpha=3$.

### Άσκηση 3

**Αν η** $y=3x+6$ **είναι ασύμπτωτη της** $C_f$ **στο** $+\infty$ **,να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$ **.**

**Λύση**

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=6$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-3x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{6}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{6}{2}=3$$

## Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

**1.** Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

**i.** $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ **iii.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+x+1}$

(**Απ.: i.** $x=1, x=2$, **ii.** $x=3, x=2$, **iii.** δεν υπάρχει)

**2.** Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

**i.** $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$ **ii.** $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ **iii.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2-1}{x+2}$

(**Απ.: i.** στο $+\infty$, $y=2$, στο $-\infty$, δεν έχει, **ii.** δεν έχει , **iii.** $y=3$ στο $+\infty$)

**3.** Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

**i.** $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2+3x+4}$ **ii.** $f(x)=\ln(e^x+1)+x$ **iii.** $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

(**Απ.: ii.** $y=2x+6$ στο $\pm\infty$, **ii.** $y=2x$ στο $\pm\infty$, **iii.** $y=x+2$ , στο $+\infty$, $y=-x-2$, στο $-\infty$ )

**4.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες ( κατακόρυφες, οριζόντιες, πλάγιες ) αν υπάρχουν των παρακάτω συναρτήσεων:

**i.** $f(x)=\dfrac{3x^3+x+2}{x^2}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ **iii.** $f(x)=\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+x}$

(**Απ.: i.** $x=0$ κατακόρυφη $y=3x$ πλάγια στο $\pm\infty$ οριζόντια δεν έχει, **ii.** $x=1$ κατακόρυφη $y=0$ οριζόντια στο $+\infty$, **iii.** δεν έχει κατακόρυφη $y=-2$ στο $+\infty$ $y=2$ στο $-\infty$ )

**5.** Να αποδείξετε ότι η $y=x+1$ είναι ασύμπτωτη της $f(x)=xe^{1/x}$ στο $+\infty$.

**6.** Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η $y=2x+3$ να είναι ασύμπτωτη της $f(x)=\sqrt{\alpha x^2-\beta x+\alpha}$ στο $+\infty$ με $\alpha>0$.

(**Απ.:** $\alpha=4,\ \beta=-12$)

**7.** Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(x)-g(x)=x-4$, για κάθε $x\in R$ και η $C_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=3x-7$ τότε:

**α.** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

**β.** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$

**γ.** Να βρεθεί αν υπάρχει η πλάγια ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$.

(**Απ.: α.** 2, **β.** $-\frac{5}{7}$, **γ.** $y=2x+3$)

**8.** Αν η $y=2x+3$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x\sqrt{x^2+x+1}+x^2}{xf(x)-2x^2}$.

$\left(\textbf{Απ.: } \frac{1}{2}\right)$

**9.** Η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ μιας περιττής συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

(**Απ.:** $y=\lambda x-\kappa$)

**10.** Αν για την f ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+2x}{xf(x)-x^2}=1$ να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

(**Απ.:** $y=x+3$)

## Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

**Αν η f είναι μία μη σταθερή πολυωνυμική συνάρτηση να δειχθεί ότι η ευθεία y = x είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης** $\mathbf{h(x)=\dfrac{xf(x)+c}{f(x)}}$ **με** $\mathbf{c\neq 0}$ **η οποία δεν τέμνει την καμπύλη** $\mathbf{y=h(x)}$**.**