Μάθημα 15

Κανόνες De l’ Hospital

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Πολλές φορές στον υπολογισμό ορίων της μορφής : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ καταλήγουμε σε μια από τις απροσδιόριστες μορφές : $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Η άρση της απροσδιοριστίας γίνεται με τη βοήθεια των δύο επόμενων θεωρημάτων που είναι γνωστά ως **κανόνες de L’ Hospital.**

Θεώρημα 1^0 $\left(\textbf{Μορφή } \dfrac{0}{0}\right)$

Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0 χωρίς να είναι αναγκαία παραγωγίσιμες και στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 2^0 $\left(\textbf{Μορφή } \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και f, g είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Τα δύο παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια.
- Αν κατά την εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων καταλήξουμε επίσης σε απροσδιόριστη μορφή μπορούμε να τα εφαρμόσουμε όσες φορές απαιτείται αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Απροσδιοριστία της μορφής ($\frac{0}{0}$)

Διαπιστώνουμε ότι το όριο του αριθμητή και παρανομαστή είναι μηδέν.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hospital στην περίπτωση που υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρονομαστή.
Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}$, **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

i. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$. Με εφαρμογή του κανόνα (Θεώρημα Hospital) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(3x^2)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x^2}-1\right)=1-1=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=1-1=0$.

$$\text{Άρα }\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-1\right)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(2xe^{x^2}\right)'}{(\eta\mu x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2+4\cdot 0}{1}=2$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Διαπιστώνουμε ότι το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή είναι $\pm\infty$, οπότε έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hospital στην περίπτωση που υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρανομαστή.
Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$**.**

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)=+\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^x}{x^2+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+e^x\right)'}{\left(x^2+e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{2x+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(2x+e^x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(2+e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Απροσδιοριστία της μορφής ($0\cdot(\pm\infty)$)

Η παραπάνω μορφή έχει προκύψει απο το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$.

Γράφουμε $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ και προκύπτει μια απο τις προηγούμενες μορφές.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(2-x^2\right)$**.**

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x\to-\infty}e^x\left(2-x^2\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{\frac{1}{e^x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2-x^2\right)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-2x)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-2e^x\right)=0$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty-\infty)$

Προκύπτει απο το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ τότε :

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]\overset{(\infty-\infty)}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]\\ \text{ή}\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right]\end{cases}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-e^x\right)$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-e^x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x}-1\right)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$ το όριο (1) είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x}-1\right)$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell nx}{e^x}-1\right)=0-1=-1<0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Οι απροσδιόριστες μορφές $\left((0^+)^0,(+\infty)^0,1^{\pm\infty}\right)$

Προκύπτουν κατά τον υπολογισμό ορίων της μορφής: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$ και βρίσκουμε το όριο του εκθέτη δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln(f(x))$.

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

Λύση

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x\overset{(0^0)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}$. Το όριο του εκθέτη είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x\overset{0(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

Σχόλιο

Ο κανόνας de l' Hospital κάποιες φορές δεν λύνει το πρόβλημα ! Για παράδειγμα:

Είναι $\ell\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \ell\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)'}{\left(e^x-e^{-x}\right)'} = \ell\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \ell\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)'} = \ell\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Δηλαδή ξαναβρήκαμε την αρχική συνάρτηση οπότε ο κανόνας δεν εφαρμόζεται.
Με την κλασική μέθοδο του κοινού παράγοντα προκύπτει:

$$\ell\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \ell\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-e^{-2x}\right)} = \ell\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Παράδειγμα 6

Έστω η f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε: $f''(0)=\dfrac{3}{2}$, $f(0)=f'(0)=0$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση

Εφόσον οι $f(x)$ και $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμες είναι και συνεχείς οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(-x) = 0$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(f(x)+f(-x)\right)'}{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{\eta\mu x}$.

Επειδή υπάρχει ο αριθμός $f''(0)$ η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο μηδέν ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0} f'(-x) = f'(0) = 0$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{\eta\mu x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ αλλά δεν εφαρμόζεται κανόνας L' Hospital ,διότι δεν ξέρουμε αν υπάρχει η $f''(x)$ σε μια περιοχή του μηδενός. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f'(x)}{x}-\dfrac{f'(-x)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}$.

Επειδή $f''(0)=\dfrac{3}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = f''(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x} = \dfrac{3}{2}$

Για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(-x)}{x}$, θέτουμε όπου $-x=\omega$ οπότε $x=-\omega$ και όταν $x\to 0$ και $\omega\to 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(-x)}{x}=\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{f'(\omega)}{-\omega}=-\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{f'(\omega)}{\omega}=-\frac{3}{2}$.

Τελικά έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f'(x)}{x}-\frac{f'(-x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{1}=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{1}=\dfrac{\frac{6}{2}}{1}=3$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x^2-x}{x^3-x^2}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x+\ln(1+x)}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$ **v.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$

(**Απ.: i.** 1, **ii.** 0, **iii.** 0, **iv.** $\frac{1}{2}$, **v.** Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας γιατί στη παράγωγο του αριθμητή δεν υπάρχει το όριο του $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και διαιρούμε με x)

2. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6x+\ln x}{3x+\ln x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{e^x}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\ln x}$

v. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$

(**Απ.: i.** 2, **ii.** $+\infty$, **iii.** 0, **iv.** 2, **v.** 1)

3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{-x}-\ln x^2\right)$ **v.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)$ **vi.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$

(**Απ.: i.** 0, **ii.** $-\frac{2}{\pi}$, **iii.** 0, **iv.** $+\infty$, **v.** $+\infty$, **vi.** 1)

4. Έστω $f(x)=\begin{cases} e^x-e^{-x}-x, & x\le 0 \\ \dfrac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}, & x>0 \end{cases}$. Να εξεταστεί η συνέχειά της.

(**Απ.:** Είναι συνεχής)

5. Έστω $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2, & x\le 1 \\ x-\ln x, & x>1 \end{cases}$. Να βρεθεί η $f'(x)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ f'(x)=\begin{cases} 2-2x, & x<1 \\ 1-\dfrac{1}{x}, & x>1 \\ 0, & x=1 \end{cases}\right)$

6. Έστω $f(x)=\begin{cases} 2\alpha\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x, & x\le 0 \\ \eta\mu 2x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x>0 \end{cases}$.

Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$(\textbf{Απ.:}\ \alpha=1,\ \beta=-1)$

7. Αν υπάρχει η f'' και είναι και συνεχής να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x).$$

(**Υπ.:** Παραγωγίζουμε με μεταβλητή το h και το x σταθερά στον κανόνα de l' Hospital)

8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=f'(0)=0$ και το $f''(0)=2$ να βρεθεί το

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+f(x)}{f(x)+\ln(x+1)}.$$

(**Απ.:** 0)

9. Έστω $f(x)=\begin{cases} \alpha^x-\beta^x, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha x+\sigma\upsilon\nu\beta x, & x>0 \end{cases}$ και $\alpha,\beta>0$.

Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η C_f να διέρχεται από το σημείο $A\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ \alpha=2,\ \beta=\dfrac{1}{2}\ \text{ή}\ \alpha=\dfrac{1}{2},\ \beta=2\right)$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή παράγωγο στο 0 και $f(0)=f'(0)=0$ καθώς και $f''(0)=2003$.

α. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

β. Να βρείτε την $g'(x)$ και να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$.

(**Απ.:** $\ell im_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $\ell im_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{2003}{2}$, $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{2003}{2}, & x=0\end{cases}$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$)