Μάθημα 14

Κυρτότητα
Σημεία καμπής συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

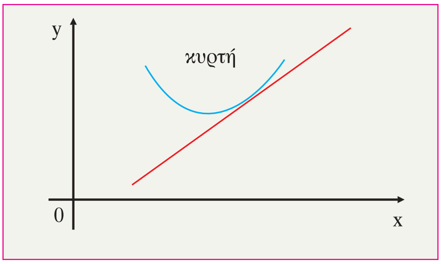
Ορισμοί

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Λέμε ότι :

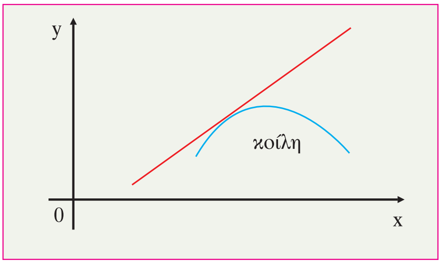
Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα πάνω** στο Δ ή ότι είναι **"κυρτή"** στο Δ αν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα κάτω** στο Δ ή ότι είναι "κοίλη" στο Δ αν η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Αν η f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται "κάτω" από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Αν η f είναι κοίλη τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται "πάνω" από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης αρκεί να εξετάσουμε τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου. Επειδή κριτήριο για τη μονοτονία της f΄είναι το πρόσημο της f΄΄διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα :

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν $f''(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

Αν $f''(x) < 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Προσοχή

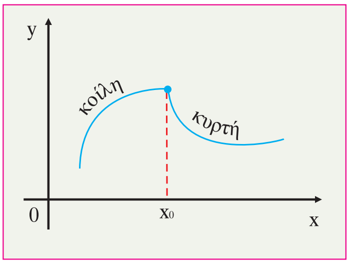
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν η f είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $f''(x) > 0$ ή ότι $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ,αντίστοιχα.

Πως ορίζεται το σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

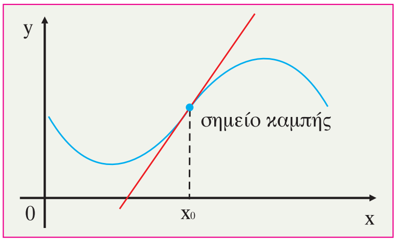
Μια συνάρτηση μπορεί να αλλάζει απο κυρτή σε κοίλη ή απο κοίλη σε κυρτή.

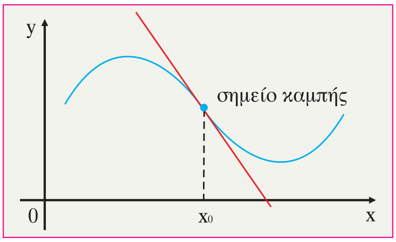
Αν αυτό συμβαίνει σε σημείο που η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη τότε το σημείο αυτό λέγεται **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

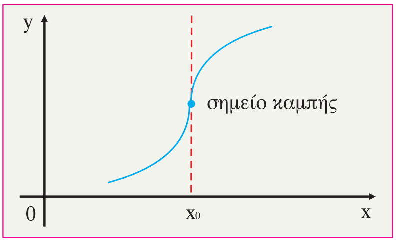
Προσοχή: Εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει η κυρτότητα της f, αλλά δεν είναι σημείο καμπής αφού δεν ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

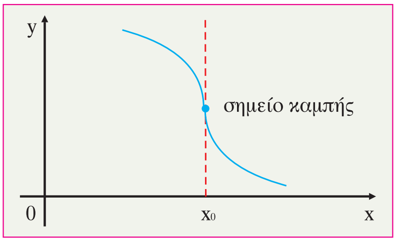


Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f.









Παρατηρούμε ότι στο σημείο καμπής της C_f η εφαπτομένη "διαπερνά" την C_f.

Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το $f''(x_0)=0$.

Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος, **πιθανά σημεία καμπής** είναι τα σημεία στα οποία **μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος.**

Επίσης απο τα προηγούμενα σχήματα είναι φανερό ότι σημεία καμπής έχουμε και σε σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού η εφαπτομένη στα σημεία αυτά είναι κατακόρυφη.

Έτσι **πιθανά σημεία καμπής** είναι και τα σημεία στα οποία **δεν υπάρχει η f ΄΄(x)** αλλά η C_f δέχεται εφαπτομένη.

Επομένως για να εντοπίσουμε τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f βρίσκουμε :

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f΄΄ μηδενίζεται και
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f΄΄(x).

Είναι σημείο καμπής κάποιο απο τα παραπάνω αναφερόμενα σημεία αν:

Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό και αν
αλλάζει πρόσημο η f΄΄ εκατέρωθεν του σημείου αυτού.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

i. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.

iii. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$.

iv. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της $f''(x)$.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\ln(x^2+1)$.

Λύση

Πρέπει $x^2+1>0$, που ισχύει για κάθε $x\in R$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

Είναι: $f'(x)=\left(\ln(x^2+1)\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$ και

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f''(x)=0$.

Έχουμε $\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(1-x^2\right)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow 1=x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Το πρόσημο της $f''(x)=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ εξαρτάται μόνο από το $1-x^2$, δηλ.

-∞		-1		1		+∞
	–		+		–	

και έχουμε:

x	-∞		-1		1		+∞
f ''(x)		–	0	+	0	–	
f			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$, κυρτή στο $[-1,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα : $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$ δηλαδή τα $(-1, \ell n2)$ και $(1, \ell n2)$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases} x^3+6x^2-2, & x\le 1 \\ x^3-9x^2+13, & x>1 \end{cases}$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση

Για $x<1$ είναι $f'(x)=3x^2+12x$

Για $x>1$ είναι $f'(x)=3x^2-18x$

Στη θέση $x_0=1$ έχουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+6x^2-2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+6x^2-7}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\left(x^2+7x+7\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+7x+7\right)=15 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-9x^2+13-5}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-9x^2+8}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(x^2-8x-8\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2-8x-8\right)=-15$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=1$ και η παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+12x, & x<1\\ 3x^2-18x & x>1\end{cases}$$

Για την $f''(x)$ έχουμε:

Για $x<1$ είναι $f''(x)=\left(3x^2+12x\right)'=6x+12$

Για $x>1$ είναι $f''(x)=\left(3x^2-18x\right)'=6x-18$

Άρα $f''(x)=\begin{cases}6x+12, & x<1\\ 6x-18, & x>1\end{cases}$.

Το πρόσημο της $f''(x)$

Για $x<1$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+12=0 \Leftrightarrow x=-2$. Άρα

x	-∞	-2	1
f ''(x)	–	0	+

Για $x>1$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Leftrightarrow x=3$. Άρα

x	1	3	+∞
f ''(x)	–	0	+

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών για την f΄΄.

x	-∞		-2		1		3		+∞
f ''(x)		–	0	+	‖	–	0	+	
f(x)		∩	Σ.Κ.	∪		∩	Σ.Κ.	∪	

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$, είναι κυρτή στο $[-2,1]$, είναι κοίλη στο $[1,3]$ και κυρτή στο $[3,+\infty)$. Σημεία καμπής έχει τα: $(-2,f(-2))$ ή $(-2,14)$ και στο $(3,f(3))$ ή $(3,-41)$.

Προσοχή!

Στο $x_0=1$ δεν έχει σημείο καμπής γιατί δεν υπάρχει η $f'(1)$ οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Κατηγορία – Μέθοδος 2
Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής αρκεί να αποδειξουμε ότι η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

Παράδειγμα 3

Έστω $\alpha \in R$ και η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Η $f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2$ επειδή είναι πολυωνυμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με :

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^3+2\alpha x^2+2\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x+\alpha^3+7 \text{ και}$$

$$f''(x)=4x^2+4\alpha x+2\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow f''(x)=4x^2+4\alpha x+2\alpha^2-4\alpha+5$$

Επειδή η $f''(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού το πρόσημό της εξαρτάται από την τιμή της διακρίνουσας είναι: $\Delta_x=(4\alpha)^2-16\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)\Leftrightarrow \Delta=16\alpha^2-16\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)=$

$$=-16\left(-\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha+5\right)\Leftrightarrow \Delta=-16\left(\alpha^2-4\alpha+5\right)$$

Το τριώνυμο $\alpha^2-4\alpha+5$ έχει $\Delta_\alpha=16-20=-4<0$ οπότε είναι πάντοτε θετικό δηλ. $\alpha^2-4\alpha+5>0$ (ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου). Άρα η $\Delta_x<0$ για κάθε $\alpha\in R$ που σημαίνει ότι είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

Κατηγορία – Μέθοδος 3
Για να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου α ώστε η f να είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα, τότε ΑΠΑΙΤΟΥΜΕ : $f''(x)\ge 0$ ή $f''(x)\le 0$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4

Έστω $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3(4\alpha-3)x^2+1$. Να βρεθεί ο πραγματικός α ώστε η f να στρέφει τα κοίλα άνω στο R.

Λύση

Η $f(x)$ ως πολυωνυμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με :

$f'(x)=8x^3+12\alpha x^2+6(4\alpha-3)x$ και

$f''(x)=24x^2+24\alpha x+6(4\alpha-3)\Leftrightarrow f''(x)=6(4x^2+4\alpha x+4\alpha-3)$.

Για να είναι η f κυρτή στο R πρέπει: $f''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in R$.

Δηλαδή $4x^2+4\alpha x+4\alpha-3\geq 0$ για κάθε $x\in R$

Επειδή είναι τριώνυμο αρκεί να έχει διακρίνουσα $\Delta_x\leq 0$ δηλ.

$16\alpha^2-16(4\alpha-3)\leq 0\Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+3\leq 0\Leftrightarrow 1\leq\alpha\leq 3$. Άρα πρέπει $\alpha\in[1,3]$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε μία συνάρτηση να έχει σημείο καμπής στο x_0.

Παράδειγμα 5

Έστω $f(x)=2x^2+\alpha\ln x+\beta$ με $x>0$. Υπολογίστε τα α, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το Α (1, 5).

Λύση

Είναι $f'(x)=4x+\dfrac{\alpha}{x}$ και $f''(x)=4-\dfrac{\alpha}{x^2}$.

Επειδή η f έχει σημείο καμπής στο $x_0=1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ θα ισχύει $f''(1)=0\Leftrightarrow 4-\dfrac{\alpha}{1}=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha=4}$.

Επίσης είναι $f(1)=5\Leftrightarrow 2+\beta=5\Leftrightarrow \beta=3$.

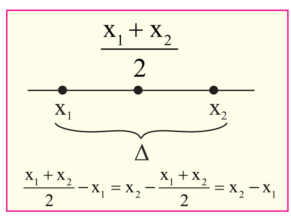
Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων που σχετίζονται με την κυρτότητα συνάρτησης πολλές φορές χρησιμοποιούμε το θεώρημα Μέσης Τιμής όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6

Έστω συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ η οποια στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$.

Λύση



Θεωρούμε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ και τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\left[x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$

• Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Όμοια εφαρμόζοντας για την f ορισμένη στο $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ το Θ.Μ.Τ. αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

Είναι $x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2$ και επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, οπότε $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ η οποία ανισότητα λόγω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται:

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$ ή (επειδή $x_2 - x_1 > 0$)

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$ ή $$f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $f(x) = x \cdot e^x$ **ii.** $f(x) = x^4(12\ln x - 7)$ **iii.** $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3, & \text{αν } x<0 \\ x^3-3x^2+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

(**Απ.: i.** Σ.Κ $(-2, -2e^{-2})$, **ii.** Σ.Κ δεν έχει, **iii.** Σ.Κ $(1,3)$)

2. Έστω $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$

i. Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

ii. Να αποδείξετε ότι τα προηγούμενα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(**Απ.: i.** Σ.Κ $\left(-3, -\frac{1}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(3, \frac{1}{4}\right)$)

3. Έστω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ να έχει κλίση 2 και το σημείο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{21}{4}\right)$ να είναι σημείο καμπής.

($\textbf{Απ.:}$ $\alpha=-1, \beta=3, \gamma=4$)

4. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$ και η g τέτοια ώστε ώστε $g(x)\cdot f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 δείξτε ότι η εφαπτομένη της g στο x_0 είναι παράλληλη στην ευθεία ψ - $2x+5=0$.

(**Απ.:** Είναι $g'(x_0)=2$)

5. α. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ με $f(x)>0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$, $x>0$ στρέφει τα κοίλα άνω όταν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x)>(f'(x))^2$, για κάθε $x>0$.

β. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

(**Απ.: β.** Είναι $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$)

6. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln^2 x+\alpha\ln x+\beta x$ με $x>0$. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x_1=e$ και καμπή για $x_2=e^3$.

($\textbf{Απ.:}$ $\alpha=-4, \beta=2e^{-1}$)

7. Δίνεται η $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $3\alpha^2>8\beta$.

i. Να βρείτε την $f''(x)$.

ii. Να δείξετε ότι η C_f παρουσιάζει δύο σημεία καμπής.

8. Έστω $f(x)=x^2(x-3)+4$.

i. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f.

ii. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της f.

iii. Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της f.

(**Απ.: i.** τ.μ. $A(0,4)$, τ.ελ. $B(2,0)$, **ii.** $\Gamma(1,2)$ σημείο καμπής)

9. Έστω $f(x)=\alpha x^3+3x^2+3\beta x+1$ με α, β αντίστροφους πραγματικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής της C_f είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x.

$\left(\textbf{Απ.:}\left(-\frac{1}{\alpha},-\frac{3}{\alpha}+3\beta\right) \text{Σ.Κ.},\ f'(-1/\alpha)=0\right)$

10. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

(**Απ.:** Χρησιμοποιείστε Θ. Rolle για την f και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$)

11. Αποδείξτε ότι ισχύει η ανσότητα: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{\alpha} > \frac{x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha}}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ και $\alpha \in (0,1)$.

12. Ισχύει $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \leq \alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

13. Δίνεται πραγματική συνάρτησ g, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in R$.

(Πανελλήνιες 1997)

14. Αποδείξτε ότι $e^{\alpha} + e^{\beta} \geq 2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

15. Αποδείξτε ότι ισχύει η ανίσωση $\ell n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \geq \ell n\alpha \cdot \ell n\beta$, με $\alpha, \beta > 0$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $f(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Ονομάζουμε C το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$ και της εφαπτομένης (ε) της f στο σημείο καμπής της.

Να αποδειχθεί ότι από ένα σημείο Α άγονται τρεις εφαπτομένες προς την καμπύλη $y = f(x)$ όταν και μόνο όταν το Α είναι εσωτερικό σημείο του C.