Μάθημα 12

Θεωρήματα Rolle – Μέσης Τιμής Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης τιμής

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Θεωρήματα Rolle - Μέσης τιμής

Θεώρημα Rolle

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$

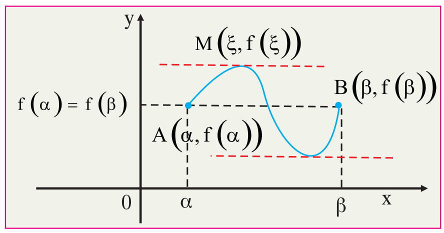
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και

$f(\alpha) = f(\beta)$

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου στο διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία

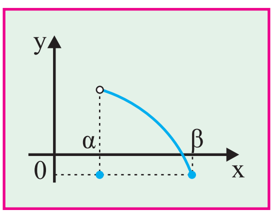
"Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη (στην χορδή ΑΒ) στον άξονα $x'x$ ".



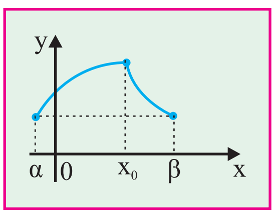
Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

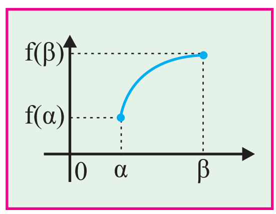
2. Πρέπει να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλιώς δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$



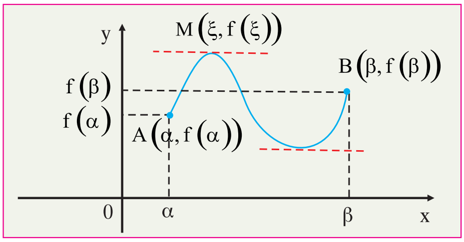
Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$

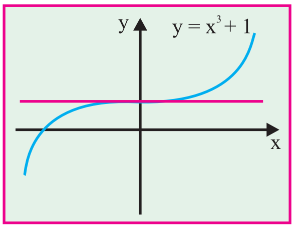


$f(\alpha) \neq f(\beta)$

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα, πληρουμένων και των υπολοίπων προϋποθέσεων φυσικά.

4. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει ρίζα της παραγώγου χωρίς να ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου δεν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$.





5. Το θεώρημα του Rolle εξασφαλίζει ότι μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'. Δηλαδή αν $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

Γενίκευση: Εάν η f είναι ν-φορές παραγωγίσιμη και έχει κ διακεκριμένες ρίζες τότε η f' έχει $\kappa-1$ διακεκριμένες ρίζες, η f'' έχει $\kappa-2$ διακεκριμένες ρίζες κ.λ.π. .

6. Επειδή στις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle αναφέρεται ότι "η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)" τότε η f θα είναι και συνεχής στο (α, β). Άρα η προϋπόθεση "η f συνεχής στο [α, β] " μπορεί να αντικατασταθεί από το: " $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$ ".

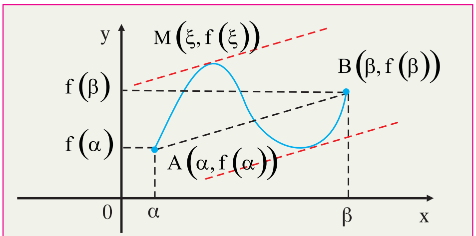
Από αυτά προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$ οπότε η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία



Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

"Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία (χορδή) ΑΒ".

- Κλασσική φυσική ερμηνεία: "Ύπαρξη χρονικής στιγμής t_0 όπου η στιγμιαία ταχύτητα $s'(t_0)=\upsilon(t_0)$ γίνεται ίση με την μέση ταχύτητα υ του κινητού".

Παράδειγμα: Το κινητό διήνυσε 200km σε 2,5 ώρες οπότε η συνάρτηση θέσης $s(t)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 2{,}5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2{,}5)$ οπότε υπάρχει $t_0\in(0,\ 2{,}5)$:

$$S'(t_0)=\frac{S(2{,}5)-S(0)}{2{,}5-0}=\frac{200-0}{2{,}5}=80\,km/h$$

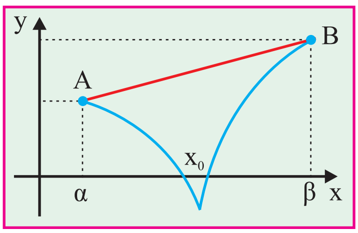
Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Στην ειδική περίπτωση που εκτός από τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. ισχύει επιπλέον ότι

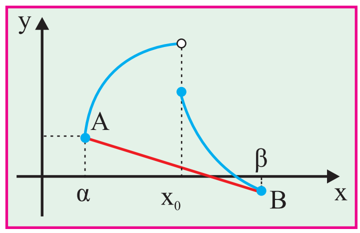
$f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$

(το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.)

2. Αν κάποια από τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. δεν ισχύει, τότε το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

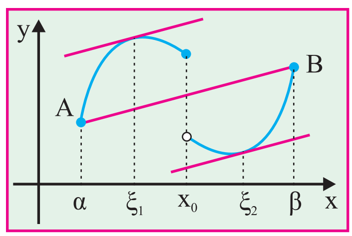


Δεν είναι παραγωγίσιμη
η f στο (α,β)



Δεν είναι συνεχής
στο [α,β]

3. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να μην ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλά να υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην AB.



4. Το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\quad \text{ή}\quad f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)\cdot(\beta-\alpha)$$

5. Επειδή $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\xi)$ δεν μας περιορίζει η διάταξη των α και β αρκεί βέβαια $\alpha\neq\beta$.

6. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε θα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα το θεώρημα πάλι εφαρμόζεται.

ΙΙ. Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμης

Πρόταση 1

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ δηλαδή $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Σχόλια

1. Το αντίστροφο της πρότασης προφανώς ισχύει οπότε έχουμε πλέον την ισοδυναμία: $f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=c$, $c\in R$ και $x\in\Delta$.

2. Η πρόταση δεν ισχύει όταν η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα: αν $f(x)=\begin{cases} 3, & x>0 \\ -5, & x<0 \end{cases}$ όπου f συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, έχουμε $f'(x)=0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. Εάν $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ τότε $f(x)=c\cdot e^x$, $c\in R$.

Πρόταση 2

Αν οι f, g είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)=g'(x)$ τότε: $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Σχόλιο

Από την πρόταση 2 προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο, για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- Διαφέρουν μεταξύ τους κατά c, δηλαδή $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=c$, $c\in R$.
- Έχουν παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία με ίδια τετμημένη $\xi\in\Delta$, $\lambda=f'(\xi)=g'(\xi)$.
- Έχουν τον ίδιο ρυθμό μεταβολής.

Για τον προσδιορισμό μιας από αυτές απαιτείται μία επιπλέον συνθήκη.

Παρατήρηση

Το διάστημα Δ στις προτάσεις 1 και 2 μπορεί να είναι:
$[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, (α,β), $(-\infty,\beta]$, $(-\infty,\beta)$, $[\alpha,+\infty)$, $(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)=R$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Σε ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε διάστημα (α,β):

α. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν).
β. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος.
γ. Θεωρούμε το α΄ μέλος ίσο με μια συνάρτηση f. Εάν ο έλεγχος των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano στην f δεν αποδόσει, **τότε** θεωρούμε μια συνάρτηση F η οποία έχει παράγωγο την f και σε αυτήν εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle. (Την F τη λέμε αρχική ή παράγουσα της f).

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^4+4\alpha x^3-1=\alpha$, $\alpha\in R$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Λύση

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $\left[x^5+\alpha x^4-(\alpha+1)x\right]'=0$, οπότε:

θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=x^5+\alpha x^4-(\alpha+1)\ \ x$, με $\alpha, x\in$ IR. Η f είναι συνεχής στο [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f'(x)=5x^4+4\alpha x^3-(\alpha+1)$ και $f(0)=f(1)$. Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ ώστε , $f'(\xi)=0$ δηλαδή $5\xi^4+4\alpha\xi^3-1=\alpha$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται το πολύ μια ρίζα σε διάστημα Δ

Δύο βασικές επιλογές

1η: Απαγωγή σε άτοπο από το Θ. Rolle

Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες και είναι παραγωγίσιμη από το Θ. Rolle θα έχει η $f'(x)$ τουλάχιστον μία ρίζα που αποδεικνύεται άτοπο από τα δεδομένα

- είτε επειδή η $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο R,
- είτε επειδή η ρίζα της $f'(x)=0$ δεν ανήκει στο (α,β).

2η: Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη ή 1-1 οπότε θα έχει το πολύ μία ρίζα.

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η $2x^3-3x^2-36x+\text{συν}\theta=0$, $\theta\in$ R έχει μια το πολύ ρίζα στο (0, 1).

Λύση

Έστω ότι έχει δύο ρίζες $0<\rho_1<\rho_2<1$. Στο $[\rho_1,\rho_2]$ εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2-36x+\text{συν}\theta$ η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$. Άρα εχουμε ότι η $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho\in(\rho_1,\rho_2)\subset(0,1)$.

Όμως $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6x-36=0\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ \text{ή}\\ x=3\end{cases}$ άτοπο διότι δεν ανήκουν στο $(0,1)$. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$.

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x$ με $0<\alpha<\beta<\gamma$, έχει το πολύ μια πραγματική λύση.

Λύση

Είναι $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x-1=0$. Θεωρούμε την $f(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x+(-1)$, ορισμένη στο R της οποίας η παράγωγος είναι $f'(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x\ell n\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x\ell n\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)<0$ για $x\in$ R (αφού $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x > 0$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x > 0$, $\ell n\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) < 0$, $\ell n\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) < 0$). Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική λύση.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει ν το πολύ ρίζες.
Δείχνουμε ότι αποκλείεται να έχει $\nu + 1$ ρίζες. Αυτό γίνεται με τους εξής τρόπους:

i. Με το θεώρημα του Rolle στα ν διαστήματα
- **α.** Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μια παραπάνω ρίζα
- **β.** Θεωρούμε συνάρτηση αφού μεταφέρουμε τους όρους της εξίσωσης σε ένα μέλος .
- **γ.** Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στα διαστήματα που δημιουργούν οι ρίζες που υποθέσαμε και οδηγούμαστε σε άτοπο.

ii. Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα.

iii. Με τον βαθμό της συνάρτησης αν βέβαια προκειται για πολυωνυμική.

Αν το άτοπο δεν "φαίνεται" εύκολα, εφαρμόζουμε ξανά το Θ. Rolle στα ν - 1 διαστήματα ή ακόμη και στα ν - 2, ν - 3, έως ότου καταλήξουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} = \alpha x$, $\alpha \in$ IR έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Λύση

Έστω ότι η δοσμένη εξίσωση, δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \alpha x$, έχει τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in$ IR με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \alpha x$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ με $f'(x) = -e^{-x} - \alpha$.

Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και $f(x_2) = f(x_3) = 0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και έτσι υπάρχουν , $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$,αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $f'(x) = -e^{-x} - \alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ με $f''(x) = e^{-x}$ και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$, δηλαδή $e^{-x_0} = 0$ άτοπο. Άρα η δοσμένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες οπότε θα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Σχόλιο: Όταν ζητείται μια ακριβώς ρίζα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστο (Θ. Bolzano ή Rolle) και στη συνέχεια το πολύ μια με την προηγούμενη μέθοδο.

Παράδειγμα 5

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3^x = \frac{1}{x}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

Η εξίσωση $3^x = \frac{1}{x}$ ισοδυναμεί με την $x \cdot 3^x - 1 = 0$ στο διάστημα $(0,1)$ οπότε για την $f(x) = x \cdot 3^x - 1$ ισχύει το Θ. Bolzano στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$. Αν υποθέσουμε ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3^\xi + \xi 3^\xi = 0 \Leftrightarrow 3^\xi(1+\xi) = 0 \Leftrightarrow$ $\xi = -1$ (άτοπο) άρα η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f.

α. Οριζόντιας εφαπτομένης της f σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β. Εφαπτομένης που πληροί ορισμένες (γεωμετρικές) προϋποθέσεις.

Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{ημ(\pi x)}{x^2+1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

Λύση

Έστω $\kappa \in Z$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa, \kappa+1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\kappa, \kappa+1)$. Ισχύει $f(\kappa) = 0 = f(\kappa+1)$ οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (\kappa, \kappa+1)$ ώστε $f'(\kappa) = 0$. Αφού $\kappa \in Z$, τα διαστήματα είναι άπειρα δηλαδή υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της με συντελεστή διεύθυνσης $f'(\kappa) = 0$ και επομένως είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

Παράδειγμα 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = ημ(\pi x) + \alpha x^2 + \beta x$, όπου $\alpha, \beta \in R$, $x \in R$ με $\alpha + \beta = 1$ (1). Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1: y + x = 3$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1). Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε: $f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \alpha + \beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x_0) = 1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$. Ισχύει $f'(x_0) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Δηλαδή υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία ε σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στην ε_1.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη $x_0 \in (\alpha,\beta)$ που πληρεί μια συνθήκη $h(x_0)=0$

Επιλέγουμε μια συνάρτηση $H(x)$ για την οποία ισχύει $H'(x)=h(x)$ και αποδεικνύουμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

Τότε θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta):\ H'(x_0)=0 \Leftrightarrow h(x_0)=0$.

Η συνάρτηση H ονομάζεται "αρχική" η "παράγουσα" της h.

Ενδεικτικά αναφέρουμε τον παρακάτω πίνακα:

Δίνεται ότι: **η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$** **παραγωγίσιμη στο (α,β)** **Ζητείται η ύπαρξη ξ που ικανοποιεί τη σχέση**	**Βοηθητική συνάρτηση h στην οποία εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle**
$f'(\xi)=c$	$h(x)=f(x)-cx$
$f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$	$h(x)=f(x)-x^{\nu}$
$f'(\xi)\cdot(c-\xi)=f(\xi)$	$h(x)=(x-c)f(x)$
$f'(\xi)\cdot(\xi-c)=f(\xi)$	$h(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$
$\xi\cdot f'(\xi)=\nu\cdot f(\xi)$	$h(x)=\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$
$f'(\xi)=cf(\xi)$	$h(x)=e^{-cx}f(x)$

Σχόλιο

Αποκλείεται το Θεώρημα Bolzano όταν δεν τονίζεται ότι $f'(x)$ είναι συνεχής.

Δύο ειδικές περιπτώσεις

1. Αν $g(x)\neq 0$ και ζητείται η ύπαρξη ενός x_0 ώστε $f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)=0$

θεωρούμε την συνάρτηση $T(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ως βοηθητική.

2. Αν ζητείται η ύπαρξη ενός x_0 ώστε $g'(x_0)f(x_0)+f'(x_0)=0$.

θεωρούμε την συνάρτηση $S(x)=e^{g(x)}f(x)$ ως βοηθητική.

Σχόλιο

Για την επιλογή της βοηθητικής συνάρτησης σε κάποιες ασκήσεις δίνουν σημαντική πληροφορία οι σχέσεις στα άκρα του διαστήματος που δίνονται από την υπόθεση.

Παράδειγμα 8

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

i. Για την συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, $c\notin[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):F'(x_0)=0$

ii. Αν $c\notin[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c,0)$.

Λύση

i. Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

$F(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-c}=0$ και $F(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-c}=0$ άρα $F(\alpha)=F(\beta)=0$.

Συνεπώς από το Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):F'(x_0)=0$

ii. Έχουμε: $F'(x)=\dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)(x-c)'}{(x-c)^2}=\dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$.

Αφού $F'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0-c)-f(x_0)=0$ (1)

Η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Εξετάζουμε αν το σημείο $(c,0)$ την επαληθεύει. Πράγματι λόγω της (1) ισχύει:

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(c-x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0-c)-f(x_0)=0.$$

Παράδειγμα 9

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(\kappa)=\lambda^2$ και $f(\lambda)=\kappa^2$ και $\kappa>\lambda$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\lambda,\kappa)$ με $f'(\xi)=-2\xi$.

Λύση

Είναι $f'(\xi)+2\xi=0$ οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^2$, $x\in[\lambda,\kappa]$ με $g'(x)=f'(x)+2x$.

Η g είναι συνεχής στο $[\lambda,\kappa]$, παραγωγίσιμη στο (λ,κ) και $g(\lambda)=g(\kappa)=\kappa^2+\lambda^2$. Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\lambda,\kappa)$ ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+2\xi=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-2\xi$.

Παράδειγμα 10

Έστω f παραγωγίσιμη στο (e,e^2) συνεχής στο $[e,e^2]$ για την οποία ισχύει: $f(e^2)=2f(e)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(e,e^2)$ ώστε $f'(\xi)\cdot \ell n\xi^{\xi}=f(\xi)$.

Λύση

Αρκεί η $f'(x)\ell nx^x=f(x)$ να έχει λύση στο (e,e^2).

Ισχύει $f'(x)\ell nx^x=f(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot x\cdot \ell nx=f(x)\Leftrightarrow f'(x)\ell nx=\dfrac{1}{x}f(x)\Leftrightarrow$

$f'(x)\ell nx=(\ell nx)'f(x)\Leftrightarrow f'(x)\ell nx-(\ell nx)'f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)\ell nx-(\ell nx)'f(x)=0\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{\ell nx}\right)'=0$.

Θεωρούμε την $G(x)=\dfrac{f(x)}{\ell nx}$ για την οποία ισχύει το Θ. Rolle στο $[e,e^2]$ (είναι εύκολη η απόδειξη). Άρα υπάρχει $\xi\in(e,e^2)$ ώστε $G'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\ell n\xi^{\xi}=f(\xi)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

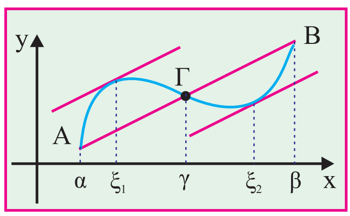
Στις ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη $\xi\in(\alpha,\beta):f''(\xi)=0$.

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Τα ξ_1, ξ_2 προκύπτουν εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλα διαστήματα $[\alpha,\kappa]$, $[\kappa,\beta]$.

Στη συνέχεια αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f' θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f''(\xi)=0$.

Παράδειγμα 11

Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f. Αν γνωρίζεται ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την χορδή ΑΒ στο $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ με $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ και $\alpha<\gamma<\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f''(\xi)=0$.



Λύση

Στο (α,γ) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_1:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\lambda_{A\Gamma}$ (συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ).

Στο (γ,β) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_2:

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\lambda_{\Gamma B}$. Όμως $\lambda_{A\Gamma}=\lambda_{\Gamma B}$ οπότε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$: $f''(\xi)=0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη ύπαρξης $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu \in (\alpha, \beta)$ που πληρούν μια συγκεκριμένη σχέση.

Εδώ πρόκειται για εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα που προκύπτουν από κατάλληλη διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ η οποία διαμέριση υπαγορεύεται από τα δεδομένα του προβλήματος.

Στην ειδική περίπτωση που ζητείται ύπαρξη $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ και το επιτρέπει το πρόβλημα προχωρούμε στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left(\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$,

(το πλάτος $c = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$)

Διαφορετικά από την σχέση των ξ_1, ξ_2 και από τα δεδομένα του προβλήματος θα προχωρήσουμε στην επιλογή του κ για την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \kappa]$, $[\kappa, \beta]$.

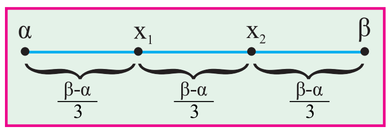
(Το κ δεν είναι πάντα το μέσο του (α, β))

Παράδειγμα 12

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = 1$ και $f(\beta) = 2004$. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \dfrac{6009}{\beta - \alpha}$.

Λύση

Διαμερίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα πλάτους $\dfrac{\beta-\alpha}{3}$.



Προφανώς ισχύει: $x_1 = \alpha + \dfrac{\beta-\alpha}{3} = \dfrac{2\alpha+\beta}{3}$,

$$x_2 = \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{3} = \frac{\alpha+2\beta}{3}$$

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, \beta]$. Επομένως υπάρχουν: $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{f\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{2\alpha+\beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\dfrac{\beta-\alpha}{3}} \quad (1) \text{ και}$$

$\xi_2 \in (x_1, x_2)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\dfrac{\alpha+2\beta}{3} - \dfrac{2\alpha+\beta}{3}} = \frac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{3}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\xi_3 \in (x_2,\beta) \text{ με } f'(\xi_3)=\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta-\frac{\alpha+2\beta}{3}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) και έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}+\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}+\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}=$$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}=\frac{3[f(\beta)-f(\alpha)]}{\beta-\alpha}\overset{\text{υπόθεση}}{=}\frac{3[2004-1]}{\beta-\alpha}=\frac{6009}{\beta-\alpha}.$$

Παράδειγμα 13

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με $f(\alpha)=e$ και $f(\beta)=-e$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε : $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{\beta-\alpha}{e}$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=0$.

ii. Θεωρούμε τα διαστήματα $[\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta]$ σε καθένα από τα οποία για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ.

οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\xi)$ με $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{0-e}{\xi-\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(\xi_1)}=\dfrac{\alpha-\xi}{e}$ (1)

Ομοίως υπάρχει $\xi_2\in(\xi,\beta)$ με $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\dfrac{-e-0}{\beta-\xi}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{\xi-\beta}{e}$

οπότε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{\alpha-\xi}{e}+\dfrac{\xi-\beta}{e}=\dfrac{\alpha-\beta}{e}$.

Παράδειγμα 14

Για τη συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [2002, 2006] ισχύει $2f(2004)=f(2002)+f(2006)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(2002,2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα [2002, 2004] και [2004, 2006].

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν : $\xi_1 \in (2002, \ 2004)$ και $\xi_2 \in (2004, \ 2006)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2004) - f(2002)}{2004 - 2002} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2006) - f(2004)}{2006 - 2004}$$

$$\text{ή} \ \ f'(\xi_1) = \frac{f(2004) - f(2002)}{2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2006) - f(2004)}{2}$$

Ισχύει : $2f(2004) = f(2002) + f(2006) \Leftrightarrow f(2004) - f(2002) = f(2006) - f(2004)$.

Επομένως είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, επομένως από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ δηλαδή $\xi \in (2002, 2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Απόδειξη ανισοτικών σχέσων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

i. Διπλή ανισοτική σχέση

α. Μετατρέπουμε την ανισότητα σε $K < \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \Lambda$

β. Αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση f και το διάστημα [α, β]

γ. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$ οδηγούμαστε στην ύπαρξη κάποιου $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $K < f'(\xi) < \Lambda$.

Η ισχύς της τελευταίας ανίσωσης προκύπτει είτε από απλές πράξεις είτε με χρήση της μονοτονίας της f' .

Παράδειγμα 15

Δείξτε ότι $\mathbf{1 + \dfrac{1}{e+1} < \ell n(1+e) < 1 + \dfrac{1}{e}}$ **.**

Λύση

Είναι $1 + \dfrac{1}{e+1} < \ell n(1+e) < 1 + \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e+1} < \ell n(1+e) - 1 < \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e+1} < \dfrac{\ell n(1+e) - \ell n e}{(1+e) - e} < \dfrac{1}{e}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ell n x$ με $x \in [e, 1+e]$. Για την f ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ. .

Οπότε υπάρχει $\xi \in (e, 1+e)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(1+e) - f(e)}{1+e-e} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\ell n(1+e) - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ell n(1+e) - 1$$

Επειδή $\xi \in (e, 1+e)$ είναι $0 < e < \xi < 1+e \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{1+e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+e} < \ell n(1+e) - 1 < \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow$

$1+\dfrac{1}{1+e}<\ell n(1+e)<1+\dfrac{1}{1+e}$.

Παράδειγμα 16

Αν $0<\alpha<\beta$ να δειχθεί ότι: $(\alpha e)^{\beta-\alpha}<\dfrac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta e)^{\beta-\alpha}$ **.**

Λύση

Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γίνεται: $(\beta-\alpha)\ell n(\alpha e)<\ell n\dfrac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta-\alpha)\ell n(\beta e)\Leftrightarrow$

$(\beta-\alpha)\ell n(\alpha e)<\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha<(\beta-\alpha)\ell n(\beta e)\Leftrightarrow\ \ell n(\alpha e)<\dfrac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}<\ell n(\beta e)$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ell nx$, $x\in[\alpha,\beta]$, με $f'(x)=\ell nx+1$.
Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow 1+\ell n\xi=\dfrac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\ell n(\xi e)=\dfrac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}$

Αλλά $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow\alpha e<e\xi<\beta e\overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow}\ell n(\alpha e)<\ell n(\xi e)<\ell n(\beta e)\Leftrightarrow$

$\ell n(\alpha e)<\dfrac{\beta\ell n\beta-\alpha\ell n\alpha}{\beta-\alpha}<\ell n(\beta e)\Leftrightarrow(\alpha e)^{\beta-\alpha}<\dfrac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta e)^{\beta-\alpha}$ (1)

Παράδειγμα 17

Για κάθε $\kappa>0$ δείξτε ότι ισχύει η ανισότητα : $\dfrac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}+\sqrt[5]{\kappa}>\sqrt[5]{4\kappa}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι :

$\dfrac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}+\sqrt[5]{\kappa}>\sqrt[5]{4\kappa}\Leftrightarrow\dfrac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\dfrac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{3\kappa}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\dfrac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}$.

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[5]{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\kappa,4\kappa]$ με $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\kappa,4\kappa)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f(4\kappa)-f(\kappa)}{4\kappa-\kappa}$, δηλαδή :

$\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}=\dfrac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}$ (1). Όμως αφού $0<\kappa<\xi$ θα έχουμε :

$\kappa^4<\xi^4\Leftrightarrow\sqrt[5]{\kappa^4}<\sqrt[5]{\xi^4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}$ και από (1) είναι : $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\dfrac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}$

Κατηγορία – Μέθοδος 9
Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, σ’ ένα διάστημα Δ. Δείχνουμε ότι είναι συνεχής σε διάστημα και για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος η παράγωγος υπάρχει και είναι μηδέν.

Παράδειγμα 18

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(x)(x+10)=f(x)$, $x>0$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x+10}$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.

β. Βρείτε την συνάρτηση f εάν $f(1)=1$.

Λύση

α. Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{(x+10)f'(x)-f(x)}{(x+10)^2}\overset{\text{υποθ.}}{=}0$. Άρα $g(x)=c$, $c\in R$.

β. Είναι $g(x)=c\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x+10}=c\Leftrightarrow f(x)=c(x+10)$ με $f(1)=1$ προκύπτει ότι $c=\dfrac{1}{11}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{1}{11}(x+10)$, $x>0$.

Σχόλιο: Εδώ φαίνεται ότι με τη βοήθεια μιας σταθερής συνάρτησης υπολογίζεται ο τύπος μιας άλλης συνάρτησης.

Κατηγορία – Μέθοδος 10
Εύρεση του τύπου συνάρτησης $f(x)$ με την επίλυση εξίσωσης στην οποία υπάρχουν και η $f(x)$ αλλά και η $f'(x)$.
Εκμεταλλευόμενοι κατάλληλα τα συμπεράσματα των παρακάτω προτάσεων
1. Αν $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c$, $c\in R$ και $x\in\Delta$ (Δ διάστημα)
2. Αν $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+c$, $c\in R$ και $x\in\Delta$ (Δ διάστημα)
3. Αν $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x$, $x\in\Delta$, $c\in R$.

Παράδειγμα 19

Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)(\kappa-x)=f(x)$, $x\neq\kappa$.

Λύση

Είναι: $f'(x)(\kappa-x)-f(x)=0$ ή $f'(x)(\kappa-x)+(\kappa-x)'f(x)=0$ ή $[f(x)(\kappa-x)]'=0$

Άρα η $g(x)=f(x)(\kappa-x)=c\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{c}{\kappa-x}$ για κάθε $x\neq\kappa$, $c\in R$.

Δίνουμε ένα πίνακα ενδεικτικών παραδειγμάτων

Ζητάμε συνάρτηση f για την οποία ισχύει	**Θεωρούμε συνάρτηση g που από την συνθήκη θα είναι $g'(x)=0$**	**Βρίσκουμε τον τύπο της f**
$f'(x)=cf(x)$ **ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:** $f'(x)=h'(x)\cdot f(x)$	$g(x)=e^{-cx}\cdot f(x)$ $g(x)=e^{-h(x)}\cdot f(x)$	$f(x)=k\cdot e^{cx}$ $f(x)=k\cdot e^{h(x)}$
$f'(x)\cdot(x-c)=f(x)$	$g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$	$f(x)=k\cdot(x-c)$
$f'(x)\cdot(c-x)=f(x)$	$g(x)=(x-c)f(x)$	$f(x)=\dfrac{k}{x-c}$
$xf'(x)=v\cdot f(x)$	$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^{v}}$	$f(x)=k\cdot x^{v}$

Παρατηρήσεις

α. Στον παραπάνω πίνακα, η k είναι σταθερά η οποία μπορεί να υπολογιστεί αν μας δίνουν επιπλέον πληροφορίες για την f.

β. Το c στις ασκήσεις, μπορεί να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Παράδειγμα 20

Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R με συνεχή παράγωγο και $xf'(x)=3f'(x)+f(x)$ για $x\neq 3$ και $f'(3)=2$. Να βρεθεί η f.

Λύση

Είναι για $x\neq 3$:

$$xf'(x)=3f'(x)+f(x)\Leftrightarrow (x-3)f'(x)=f(x)\Leftrightarrow (x-3)f'(x)-(x-3)'f(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)f'(x)-(x-3)'f(x)}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x-3}\right)'=0\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-3}=c\Leftrightarrow f(x)=c(x-3)\,,\ c\in R\,,$$

$x\neq 3$ (1). Όμως η f είναι συνεχής στο 3 άρα $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$. Επομένως $f(x)=c(x-3)$, $x\in R$. Από (1) έχουμε: $f'(x)=c$ και $f'(3)=2$ οπότε $c=2$. Τότε $f(x)=2(x-3)$, $x\in R$.

Παράδειγμα 21

Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g(0)=100$ (1) και $g'(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx$ (2)

Λύση

Είναι συνx $\neq 0$ αφού $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και από την (2) έχουμε:

$$\frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x + g(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{g(x)\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \text{ή} \quad \frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι αν $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, $x \in R$, $c \in R$.

Έτσι $\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = ce^x \Leftrightarrow g(x) = ce^x \sigma\upsilon\nu x$. Όμως $g(0) = 100 \Leftrightarrow c \cdot e^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 100 \Leftrightarrow c = 100$.

Άρα $g(x) = 100e^x \sigma\upsilon\nu x$, $x \in R$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma, & -2 \le x < 0 \\ \alpha x^2 + 3x + 3, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$.

Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε να εφαρμόζεται για την f του Θ. Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-2,0) \cup (0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $[-2,0) \cup (0,2]$.

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle η f πρέπει να είναι συνεχής και στο 0

Δηλαδή $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \gamma = 3$ και παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ δηλαδή

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Είναι $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \beta x + \gamma - 3}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \beta x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x + \beta)}{x} = \beta$

και $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x^2 + 3x + 3 - 3}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(\alpha x + 3)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (\gamma x + 3) = 3$ οπότε $\beta = 3$.

Ακόμη $f(-2) = (-2)^2 + \beta(-2) + \gamma = 4 - 2\beta + \gamma = 4 - 2 \cdot 3 + 3 = 4 - 6 + 3 = 1$ και

$f(2) = \alpha \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 4\alpha + 6 + 3 = 4\alpha + 9$

Πρέπει $f(-2) = f(2) \Leftrightarrow 1 = 4\alpha + 9 \Leftrightarrow \alpha = -2$. Άρα $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 3, 1)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+4x^2-5x+2$, $x\in R$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$. Να βρείτε το ξ.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης είναι $f(0)=2$ και $f(1)=2$ από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=0$.

Έχουμε $f'(x)=3x^2+8x-5$, $x\in R$. Άρα:

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2+8\xi-5=0\Leftrightarrow \xi_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{124}}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1=\dfrac{-8-\sqrt{124}}{6}<0, & (\text{απορρίπτεται})\\ \xi_2=\dfrac{-8+\sqrt{124}}{6}, & (\text{δεκτή})\end{cases}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\frac{16}{3}x^3-10x^2+8x+2003$, $x\in R$.

Δείξτε ότι $\xi\in(0,1)$ με $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+16x^2-20x+8$. Για την συνάρτηση f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$, διότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και στο $[0,1]$ και $f'(0)=8$ και $f'(1)=8$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f''(\xi)=0$.

Άσκηση 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,e]$ με $f(1)=0$ και $f(e)=-1$ και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x)=\ell nx+f(x)$, $x\in[1,e]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ με $g'(\xi)=0$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, ℓnx είναι παραγωγίσιμες στο $[1,e]$ άρα και συνεχείς σ' αυτό.

Επίσης $g(1)=\ell n1+f(1)=0+0=0$ και $g(e)=\ell ne+f(e)=1-1=0$.

Ισχύουν για την g οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[1,e]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\alpha+1]$ για την οποία ισχύει $2002\le f'(x)\le 2003$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+1)$. Εάν $f(\alpha)=1$ δείξτε ότι $2003\le f(\alpha+1)\le 2004$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\alpha+1)$ εφ'όσον $2002\le f'(x)\le 2003$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ με

$f'(\xi)(\alpha+1-\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha)\Leftrightarrow f'(\xi)=f(\alpha+1)-1$. Όμως $2002\le f'(x)\le 2003$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+1)$ οπότε $2002\le f'(\xi)\le 2003\Leftrightarrow 2002\le f(\alpha+1)-1\le 2003\Leftrightarrow$ $2003\le f(\alpha+1)\le 2004$.

Άσκηση 6

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με $f(0)=-\frac{1}{e}$ και η συνάρτηση $F(x)=f(x)+e^{-x}$, $x\in[0,1]$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

α. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=0$.

β. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=\frac{1}{e^{\xi}}$.

Λύση

α. Αφού για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle είναι:

$$F(0)=F(1)\Leftrightarrow f(0)+e^{-0}=f(1)+e^{-1}\Leftrightarrow -\frac{1}{e}+1=f(1)+\frac{1}{e}\Leftrightarrow -\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=f(1)\Leftrightarrow$$

$$f(1)=\frac{e-2}{e}>0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και $f(0)f(1)<0$

Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

β. Για την F ισχύει το Θ. Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με:

$$F'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-e^{-\xi}=0\Leftrightarrow f'(\xi)=e^{-\xi}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{e^{\xi}}.$$

Άσκηση 7

Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x-x^2-x+13=0$ έχει τρεις το πολύ πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x^2-x+13$ οπότε $f'(x)=e^x-2x-1$, $f''(x)=e^x-2$ και $f'''(x)=e^x$. Θεωρούμε ότι η f έχει τέσσερις ρίζες, έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$, οπότε από το Θ. Rolle στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$, $[\rho_3,\rho_4]$ υπάρχουν $\xi_1<\xi_2<\xi_3$ με $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$.

Επίσης από το Θ. Rolle στα $[\xi_1,\xi_2]$, $[\xi_2,\xi_3]$ για την f' υπάρχουν $\kappa_1<\kappa_2$ με $f''(\kappa_1)=f''(\kappa_2)=0$.

Ομοίως από Θ. Rolle για την f'' υπάρχει λ στο $[\kappa_1,\kappa_2]$ με $f'''(\lambda)=0\Leftrightarrow e^{\lambda}=0$ (άτοπο).

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 8

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει $f'(x)+2xf(x)=e^{x-x^2}$ για κάθε $x\in R$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}f(x)-e^x$ είναι σταθερή για κάθε $x\in R$.

β. Βρείτε την συνάρτηση g εάν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}=-1$.

γ. Να βρείτε την συνάρτηση f.

δ. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ε. Δείξτε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι μοναδική.

Λύση

α. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$g'(x)=2xe^{x^2}f(x)+e^{x^2}f'(x)-e^x=e^{x^2}(2xf(x)+f'(x))-e^x=$$

$$=e^{x^2}e^{x-x^2}-e^x=e^{x^2+x-x^2}-e^x=e^x-e^x=0$$

Οπότε $g'(x)=0$ άρα $g(x)=c$ για κάθε $x\in R$ με $c\in R$.

β. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}$, $x\neq 0$. Οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-1$.

Για $x\neq 0$ είναι $h(x)=\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}\Leftrightarrow xg(x)-\eta\mu x=xh(x)\Leftrightarrow$

$$xg(x)=xh(x)+\eta\mu x\Leftrightarrow g(x)=h(x)+\frac{\eta\mu x}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(h(x)+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}h(x)+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=-1+1=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ οπότε $c=0$. Άρα η συνάρτηση $g(x)=0$.

γ. Έχουμε $g(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}f(x)-e^x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{e^{x^2}}\Leftrightarrow f(x)=e^{x-x^2}$, $x\in R$.

δ. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ άρα και συνεχής με $f(0)=f(1)=1$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=0$. Στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ε. Έχουμε $f'(x)=(1-2x)e^{x-x^2}$ οπότε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow(1-2\xi)e^{\xi-\xi^2}=0\Leftrightarrow 1-2\xi=0\Leftrightarrow\xi=\dfrac{1}{2}$.

Το ξ είναι μοναδικό άρα και η παραπάνω εφαπτόμενη μοναδική.

Άσκηση 9

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Επίσης $f(2)=2f(1)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ ώστε να ισχύει $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$ (1).

Λύση

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow \frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'_{x=x_0}=0$$

Θεωρούμε την $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $[1,2]$. Η F παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και συνεχής στο $[1,2]$.

επίσης $F(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$, $F(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{2f(1)}{2}=f(1)$. Άρα $F(1)=F(2)$ και επομένως αυτή πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ ώστε $F'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

Μοναδικότητα

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα την x_0 με άτοπο.

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες στο $(1,2)$ τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Η (1) γίνεται $xf'(x)-f(x)=0$. Θέτουμε $\Phi(x)=xf'(x)-f(x)$ (2).

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ (διότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και συνεχής στο $[1,2]$. Επίσης $\Phi(\rho_1)=\Phi(\rho_2)=0$ (διότι ρ_1,ρ_2, ρίζες της Φ).

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ με $\Phi'(\xi)=0$.

Από (2) έχουμε: $\Phi'(x)=(x)'f'(x)+xf''(x)-f'(x)$.

Άρα $\Phi'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+\xi f''(\xi)-f'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi f''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=0$ (διότι $\xi\neq 0$)

άτοπο από υπόθεση διότι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Άσκηση 10

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[2,10]$ παραγωγίσιμη στο (2,10) και η f΄ γνησίως αύξουσα στο (2,10). Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(4)+f(8)$ και $f(2)+f(10)$.

Λύση

Στα διαστήματα $[2,4]$, $[8,10]$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχουν ξ_1,ξ_2 με

$2<\xi_1<4<8<\xi_2<10$ ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(10)-f(8)}{10-8}$.

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ ή

$\dfrac{f(4)-f(2)}{2}<\dfrac{f(10)-f(8)}{2} \Leftrightarrow f(4)+f(8)<f(2)+f(10)$.

Άσκηση 11

Εάν $f'(e^x)=2xe^{x^2-x}$ για $x>0$ και $f(1)=2$ να βρεθεί το $f(e)$ και ο τύπος της f για $x\in(0,+\infty)$.

Λύση

Είναι: $f'(e^x)=2xe^{x^2-x} \Leftrightarrow f'(e^x)=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^x} \Leftrightarrow e^xf'(e^x)=2xe^{x^2} \Leftrightarrow (f(e^x))'=(e^{x^2})' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(e^x)=e^{x^2}+c$

Για $x=0$ έχουμε $f(e^0)=e^{o^2}+c$ οπότε $f(1)=1+c \Leftrightarrow 2=1+c \Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(e^x)=e^{x^2}+1$, $x>0$. Για $x=1$ είναι $f(e)=e^{1^2}+1=e+1$. Θέτουμε $y=e^x \Leftrightarrow \ell ny=x$ με $y>0$. Έτσι έχουμε $f(y)=e^{(\ell ny)^2}+1=(e^{(\ell ny)})^{\ell ny}+1=y^{\ell ny}+1$. Άρα $f(x)=x^{\ell nx}+1$, $x>0$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=f'(1)=1$.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=2[f(x)]^2+[f'(x)]^2+2000$ είναι σταθερή.

ii. Δείξτε ότι $g(x)=2003$, $x\in R$.

2. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) η οποία μηδενίζεται στα σημεία α και β και μόνο σε αυτά. Αποδείξτε ότι για κάθε $c\in R$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=c$.

3. Έστω $f:[0,\pi]\to R$ μια συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f(x)\neq 0$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\sigma\varphi\xi$.

4. Σε αγώνα κολύμβησης 200m “ελεύθερο”, δύο αθλητές τερματίζουν ταυτόχρονα. Δείξτε ότι υπάρχει μια τουλάχιστο χρονική στιγμή t_0 που οι δύο αθλητές έχουν την ίδια ταχύτητα κατά τη διάρκεια του αγώνα.

5. Αν $\alpha>\beta>\gamma>3$ δείξτε ότι $\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ όπου $f(x)=-x^3+9x^2-x+1$.

6. Έστω $f,g:[0,1]\to R$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0)=g(1)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$.

7. Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ με $f(0)=f(2)=0$ και $g(x)=f(1)(2x-x^2)$.

i. Να δειχτεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία ξ_1,ξ_2 $(\xi_1\neq\xi_2)$ του $(0,2)$ ώστε $g'(\xi_1)=f'(\xi_1)$ και $g'(\xi_2)=f'(\xi_2)$.

ii. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(1)=-\dfrac{1}{2}f''(\xi)$.

8. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to R$ (με $\alpha>0$) που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$, με $f(0)=\dfrac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, ώστε $f''(\xi)=0$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R^*\to R$ που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $xf'(x)=(x+1)f(x)$, για κάθε $x\in R^*$ και $f(1)=e$, $f(-1)=\dfrac{1}{e}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

10. Δείξτε ότι: $|\alpha\eta\mu\alpha-\beta\eta\mu\beta|\leq 2|\alpha-\beta|$ με $0<\alpha<\beta<1$.

11. Έστω η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Αν ισχύει $\alpha^2<3\beta$ να δείξετε ότι έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

(**Υπ.:** Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano και Θ. Rolle για το άτοπο.)

12. Εάν $\kappa+\lambda=-1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2\kappa x+\lambda=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

(**Υπ.:** Στην $F(x)=x^3+\kappa x^2+\lambda x$ εφαρμόζουμε Θ. Rolle στο [0,1])

13. Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R ισχύει για κάθε $x\in R$, $f''(x)\neq 0$, να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης τα οποία είναι συνευθειακά.

(**Υπ.:** Αν υπήρχαν τρια συνευθειακά σημεία Κ, Λ, Μ τότε οι συντελεστές $\lambda_{K\Lambda}=\lambda_{\Lambda M}$. Από τα θεωρήματα Μέσης Τιμής και Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.)

14. Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^2 + 3ημx + 4 = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες στο R.

(**Απ.:** Άτοπο με Θεώρημα Rolle.)

15. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ έχει τρεις το πολύ ρίζες πραγματικές.

(**Υπ.:** Πρέπει να δείξουμε ότι $f^{(3)}(x) \neq 0$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α.α. Να δείξετε ότι σε κάθε διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις f, g, f΄, g΄ είναι συνεχείς και $f'g - fg' \neq 0$ οι ρίζες των f, g διατάσσονται εναλλάξ.

β. Μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη, είναι τέτοια ώστε $f(α) = f(β) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (α, β)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή ξ μεταξύ των α, β για την οποία $f''(ξ) < 0$.

Β. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο (0, 2) και για κάθε $x \in [0,1]$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(x+2) - f(x+1) = \ell n4$.
Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ \in (1, 2)$ στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της f είναι ίση με $\ell nξ + 1$.

Περισσότερες ασκήσεις στο μάθημα αυτό θα βρείτε στο στο τέλος του βιβλίου μετά από τα επαναληπτικά και συνδυαστικά θέματα.