ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Πραγματική Συνάρτηση

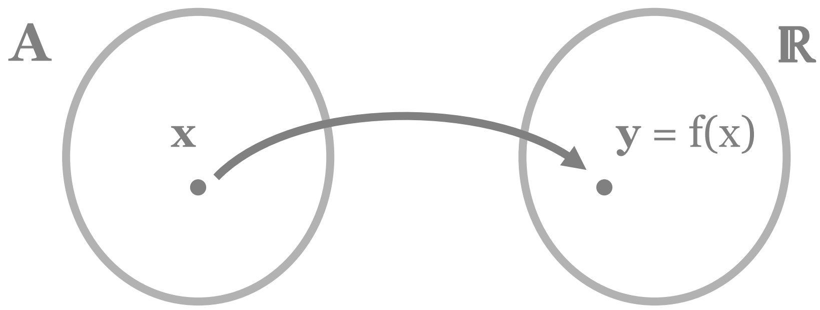
Ορισμός

Έστω Α ένα υποσύνολο του ℝ. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού** το **Α** μια διαδικασία (κανόνα) **f**, με την οποία κάθε στοιχείο x του Α αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό **y**. Το y καλείται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με **f(x)**.

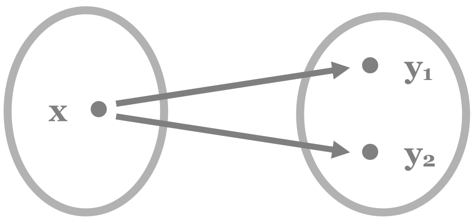
- Προφανώς, απ' την τελευταία πρόταση ισχύει: $\mathbf{f(x) = y}$.
- Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή ή **πρότυπο**.
- Η μεταβλητή y ονομάζεται **εξαρτημένη** μεταβλητή ή **εικόνα του x**.
- Μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α εκφράζεται συμβολικά ως:

$$\mathbf{f: A \to \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad x \to f(x)}$$

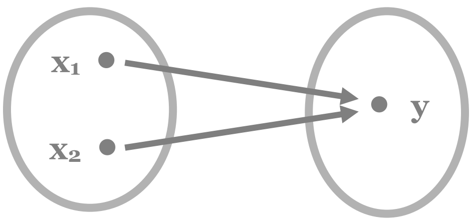
- Σχηματικά, μπορούμε να γράψουμε:



Δεν είναι συνάρτηση αν:



Είναι συνάρτηση αν:



Πεδίο (ή Σύνολο) Ορισμού

Έστω μια συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$. Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συνήθως συμβολίζεται είτε ως $\mathbf{A_f}$, είτε ως $\mathbf{D_f}$.

- Όταν θα λέμε ότι **"η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο B"** θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της ($B \subseteq A$).
- Με άλλα λόγια, πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των τιμών τις οποίες επιτρέπεται να δεχτεί η ανεξάρτητη μεταβλητή x, έτσι ώστε η συνάρτηση να εξακολουθεί να έχει νόημα, ως μαθηματική έκφραση. Άρα, καταλαβαίνουμε ότι πολύ συχνά υπάρχουν αυστηροί περιορισμοί ως προς αυτό. Ακολουθούν οι βασικότεροι περιορισμοί που, κυρίως, θα μας απασχολήσουν…

Περιορισμοί

1. Παρονομαστές (≠ 0)

Αν $\mathbf{f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}}$ τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{h(x) \neq 0}}$

2. Υπόρριζα (≥ 0)

Αν $\mathbf{f(x) = \sqrt[\nu]{g(x)}}$, με $\nu \in N^* - \{1\}$, τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{g(x) \geq 0}}$

3. Ορίσματα Λογαρίθμων (> 0)

Αν $\mathbf{f(x) = \ln[g(x)]}$ τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{g(x) > 0}}$

4. Βάσεις Εκθετικών Συναρτήσεων (> 0)

Αν $\mathbf{f(x) = [g(x)]^{h(x)}}$ τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{g(x) > 0}}$

5. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

- Αν **f(x) = εφx** τότε, εφόσον **εφx** = $\dfrac{\textbf{ημx}}{\textbf{συνx}}$, θα πρέπει:

$$\textbf{συνx} \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq κπ + \frac{π}{2}\ ,\ κ \in \mathbb{Z}}$$

- Αν **f(x) = σφx** τότε, επειδή **σφx** = $\dfrac{\textbf{συνx}}{\textbf{ημx}}$, θα πρέπει:

$$\textbf{ημx} \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq κπ\ ,\ κ \in \mathbb{Z}}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, λύνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις ή ανισώσεις που προκύπτουν από τους περιορισμούς που προαναφέραμε. Αν έχουμε περισσότερους του ενός περιορισμούς, τότε πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των **κοινών λύσεων**. Αυτό που προκύπτει, τελικά, είναι ένα **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

Σύνολο (ή Πεδίο) Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές y της συνάρτησης f για κάθε $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με f(A).

- Είναι δηλαδή: $\mathbf{f(A) = \{ y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}}$
- Όταν η f θα είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Β του πεδίου ορισμού της, τότε το σύνολο τιμών της f για κάθε $x \in B$ θα αναφέρεται, αναλόγως, ως f(B).

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης:

- Λύνουμε την εξίσωση **f(x) = y**, **ως προς x** .
- Κατά την επίλυση, προσδιορίζουμε όλους τους απαραίτητους **περιορισμούς**, που προκύπτουν για το y .
- Απαιτούμε η λύση να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.
- **Συναληθεύουμε** τους περιορισμούς που προέκυψαν με τις λύσεις που βρήκαμε.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει y = f(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x, f(x)), $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται με C_f.

- Εξαιτίας του ορισμού μιας συνάρτησης, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τετμημένη. Συνεπώς, κάθε **κατακόρυφη** ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση **το πολύ σε ένα** σημείο.
- Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f εκφράζεται στη γραφική της παράσταση, ως το σύνολο A όλων των **τετμημένων** των σημείων της. Το σύνολο τιμών f(A), αντίστοιχα, εκφράζεται ως το σύνολο όλων των **τεταγμένων**.
- Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της C_f και της ευθείας $x = x_0$.

Συμμετρία **Άρτια Συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **άρτια**, αν για κάθε $x \in A$:

- είναι και $-x \in A$ και
- $f(-x) = f(x)$

Κάθε άρτια συνάρτηση έχει **άξονα συμμετρίας** τον **y΄y** .

Συμμετρία **Περιττή Συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιττή**, αν για κάθε $x \in A$:

- είναι και $-x \in A$ και
- $f(-x) = -f(x)$

Κάθε περιττή συνάρτηση έχει **κέντρο συμμετρίας** το **O (0, 0)** .

Περιοδική Συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιοδική** με **περίοδο T**, αν για κάθε $x \in A$:

- είναι και $\mathbf{x + T \in A}$ και $\mathbf{x - T \in A}$
- $\mathbf{f(x + T) = f(x - T) = f(x)}$

Μεθοδολογία 1 - Έλεγχος σημείου

Ένα σημείο $A(x_o, y_o)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή:

$$\mathbf{x_o \in A_f} \quad \text{και} \quad \mathbf{f(x_o) = y_o}$$

Μεθοδολογία 2 - Οικογένεια συναρτήσεων

Όταν μας δίνεται μια **οικογένεια** συναρτήσεων $\mathbf{f_\nu}$ - δηλαδή μια ομάδα συναρτήσεων που ο τύπος τους διαφέρει μόνο ως προς μια **παράμετρο** «ν» - και μας ζητείται να αποδείξουμε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις διέρχονται από **σταθερό σημείο**, τότε:

- Θέτουμε στην παράμετρο «ν» δύο οποιεσδήποτε αριθμητικές τιμές, παράγοντας έτσι δύο αντιπροσώπους C_1 και C_2 της οικογένειας.
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής των C_1 και C_2 (Σύστημα).
- Δείχνουμε ότι τα σημεία αυτά επαληθεύουν την γενική εξίσωση της οικογένειας f_ν , για κάθε τιμή της παραμέτρου.

Μεθοδολογία 3 - Σημεία τομής με άξονες

Για να υπολογίσουμε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα **x΄x** θέτουμε στην εξίσωση της συνάρτησης, όπου $\mathbf{y = 0}$. Με άλλα λόγια, λύνουμε την $\mathbf{f(x) = 0}$.

Αντίστοιχα, για τα σημεία τομής με τον άξονα **y΄y** θέτουμε στην εξίσωση της συνάρτησης, όπου $\mathbf{x = 0}$ και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Μεθοδολογία 4 - Σχετική θέση ως προς x΄x

Για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης βρίσκεται **πάνω** (ή **κάτω**) από τον άξονα **x΄x** λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f(x) > 0}$ (αντίστοιχα την $\mathbf{f(x) < 0}$).

Μεθοδολογία 5 - Σημεία τομής γραφικών παραστάσεων

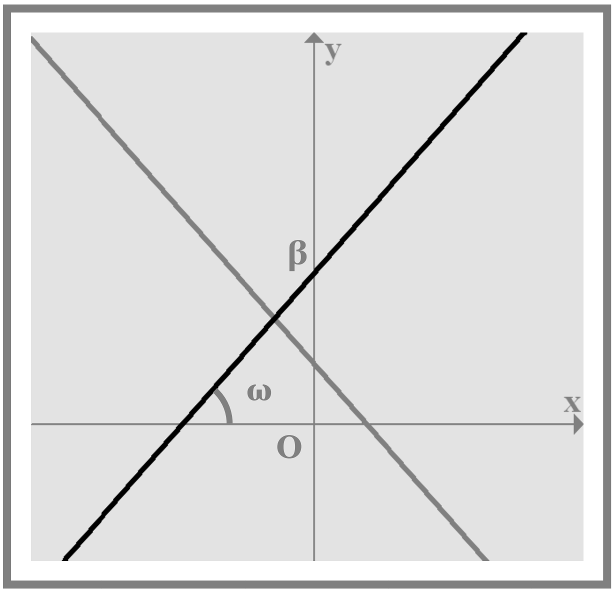
Για να υπολογίσουμε τα σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων C_f και C_g , λύνουμε το σύστημα των αντίστοιχων εξισώσεων των συναρτήσεων f(x) και g(x), για κάθε $\mathbf{x \in A_f \cap A_g}$.

Μεθοδολογία 6 - Σχετική θέση γραφικών παραστάσεων

Για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω** (ή **κάτω**) από τη γραφική παράσταση μιας άλλη συνάρτησης g, τότε λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f(x) > g(x)}$ (ή αντίστοιχα την $\mathbf{f(x) < g(x)}$), για κάθε $\mathbf{x \in A_f \cap A_g}$.

Γραφικές Παραστασεις Βασικών Συναρτήσεων

$f(x) = \alpha x + \beta$ — Πολυωνυμική



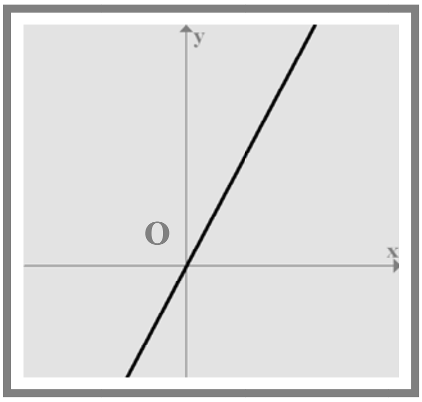
Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$
Σύνολο Τιμών: $f(A) = \mathbb{R}$

α = Συντελεστής Διεύθυνσης
α = εφω
α > 0 γνησίως αύξουσα
α < 0 γνησίως φθίνουσα

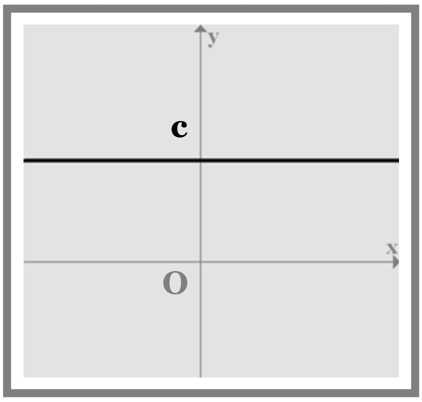
β = Σημείο τομής με τον άξονα y΄y

Συνθήκη παραλληλίας: $\alpha_1 = \alpha_2$
Συνθήκη καθετότητας: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$

Ειδικές περιπτώσεις

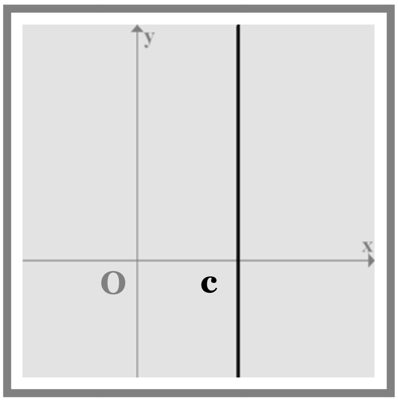


$f(x) = \alpha x$



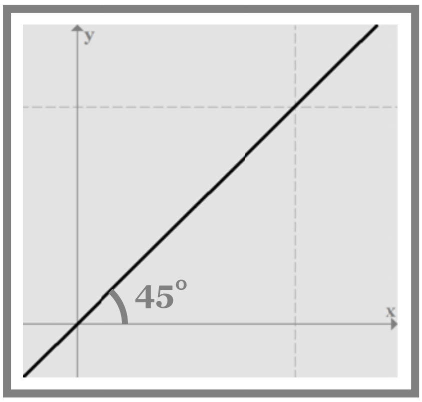
$f(x) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

Σταθερή Συνάρτηση



$x = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

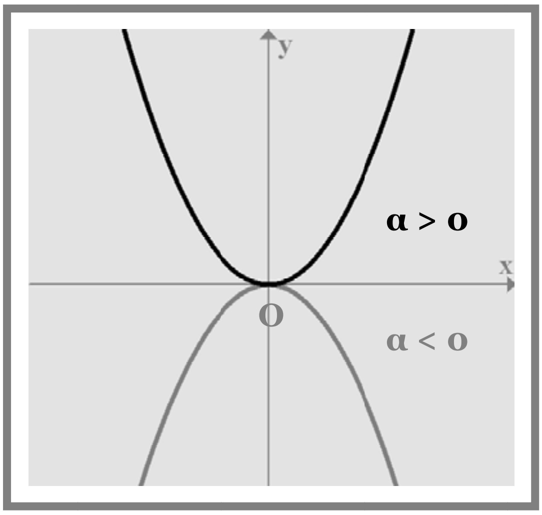
ΠΡΟΣΟΧΗ! Η εξίσωση x = c **ΔΕΝ** παριστάνει συνάρτηση.



$f(x) = x$

Ταυτοτική Συνάρτηση

$f(x) = \alpha x^2 \quad (\alpha \neq 0)$ **Πολυωνυμική**



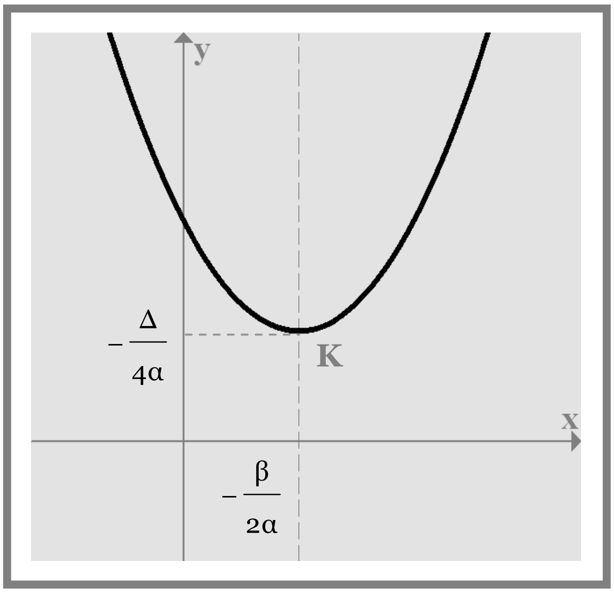
Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σύνολο Τιμών:
Αν $\alpha > 0$ τότε $f(A) = [0, +\infty)$
Αν $\alpha < 0$ τότε $f(A) = (-\infty, 0]$

Κορυφή: O (0, 0)

Άξονας συμμετρίας: y΄y

Άρτια Συνάρτηση



$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\alpha \neq 0)$

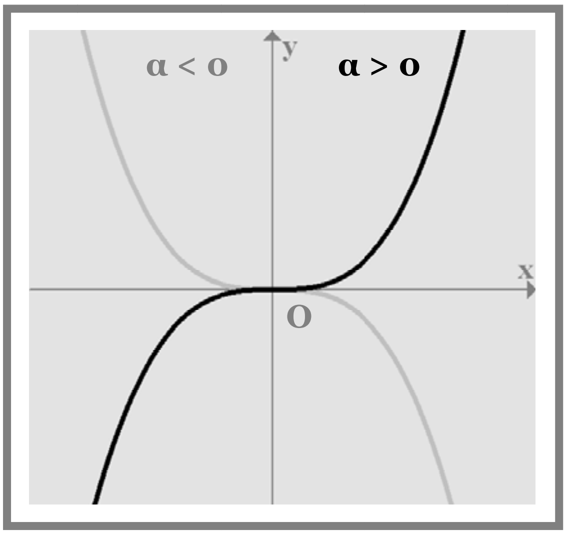
Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σύνολο Τιμών:
Αν $\alpha > 0$ τότε $f(A) = [0, +\infty)$
Αν $\alpha < 0$ τότε $f(A) = (-\infty, 0]$

Κορυφή: $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Άξονας συμμετρίας: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

$f(x) = \alpha x^3 \quad (\alpha \neq 0)$ **Πολυωνυμική**



Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

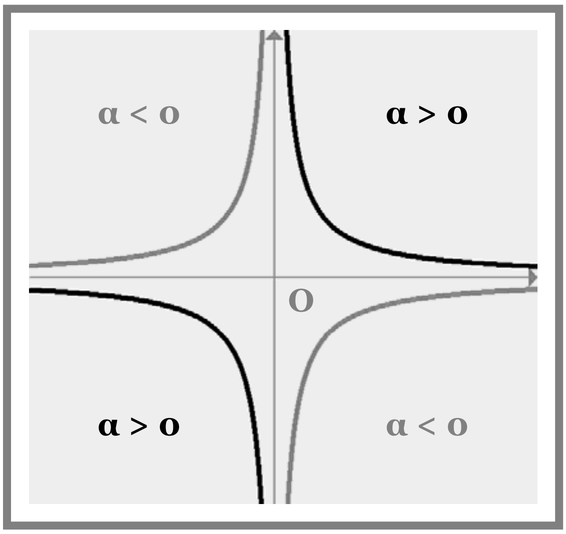
Σύνολο Τιμών: $f(A) = \mathbb{R}$

α > 0 1^o & 3^o τεταρτημόριο
α < 0 2^o & 4^o τεταρτημόριο

Κέντρο Συμμετρίας: O (0, 0)

Περιττή Συνάρτηση

$f(x) = \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \neq 0)$ Ρητή



Πεδίο Ορισμού:
$A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

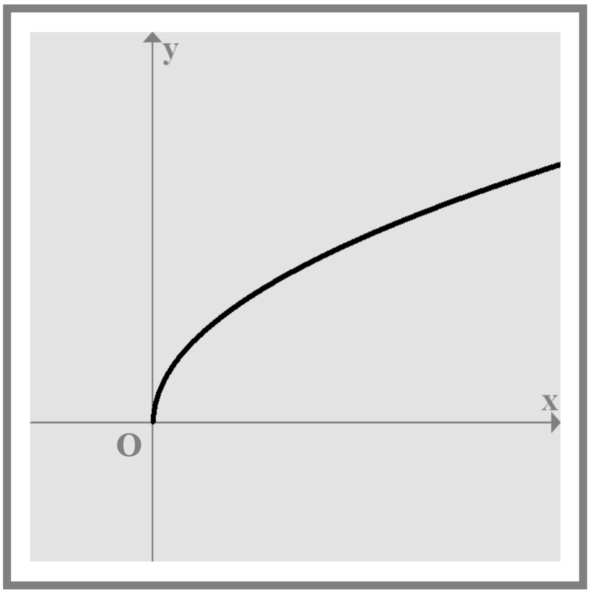
Σύνολο Τιμών:
$f(A) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

α > 0 1ο & 3ο τεταρτημόριο
α < 0 2ο & 4ο τεταρτημόριο

Κέντρο Συμμετρίας: O (0, 0)

Περιττή Συνάρτηση

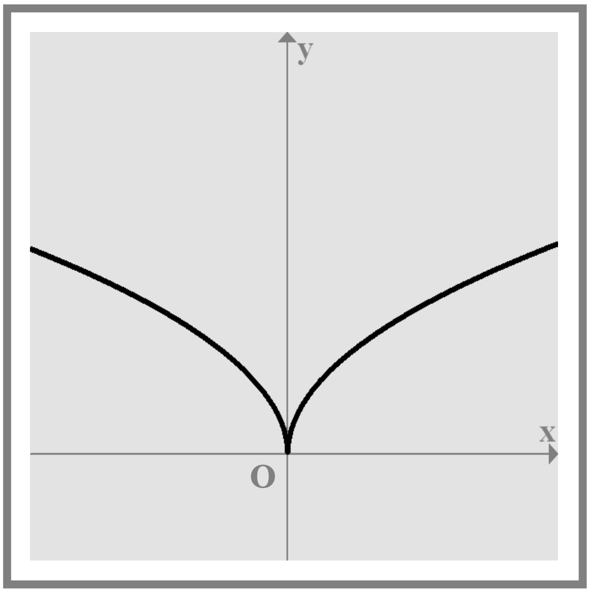
$f(x) = \sqrt{x}$ Άρρητη



Πεδίο Ορισμού: $A_f = [0, +\infty)$

Σύνολο Τιμών: $f(A) = [0, +\infty)$

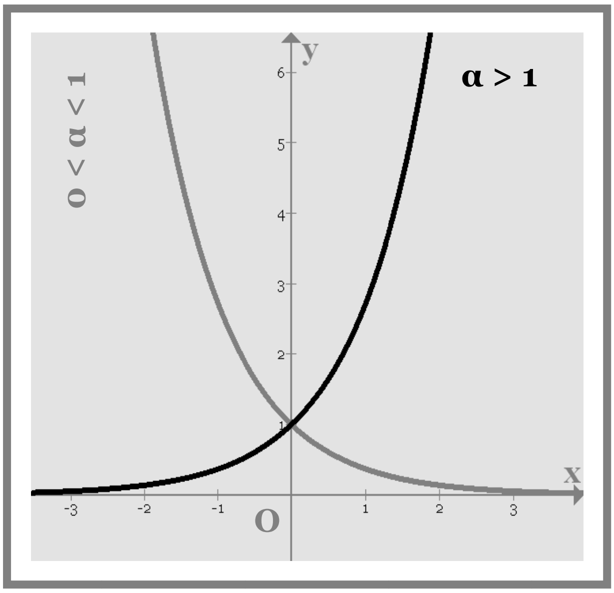
$f(x) = \sqrt{|x|}$ Άρρητη



Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σύνολο Τιμών: $f(A) = [0, +\infty)$

$f(x) = \alpha^x$ $(0 < \alpha \neq 1)$ **Εκθετική**



Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$
Σύνολο Τιμών: $f(A) = (0, +\infty)$

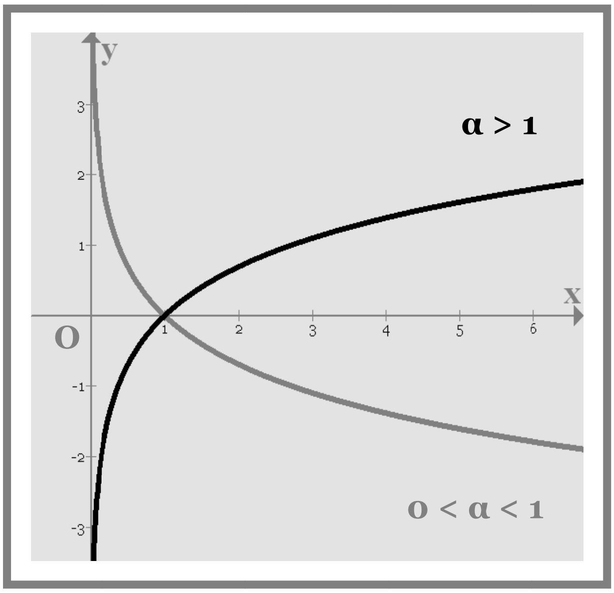
α > 1

$\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

0 < α < 1

$\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

$f(x) = \log_\alpha x$ $(0 < \alpha \neq 1)$ **Λογαριθμική**



f(x) = lnx (α = e) **f(x) = logx** (α = 10)

Πεδίο Ορισμού: $A_f = (0, +\infty)$
Σύνολο Τιμών: $f(A) = P$

α > 1

$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

0 < α < 1

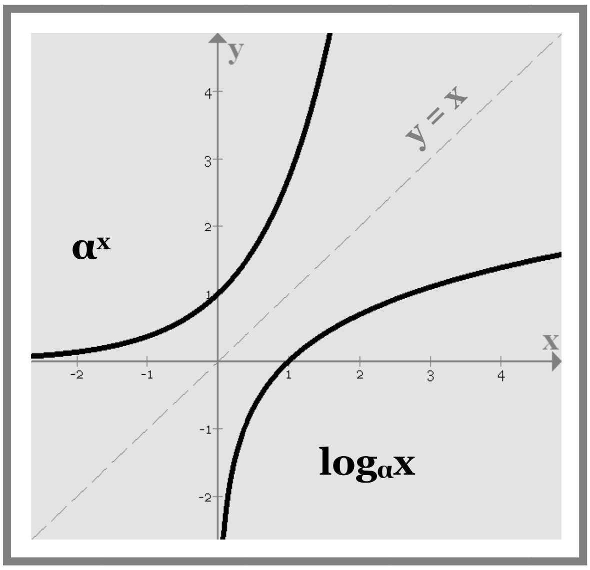
$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

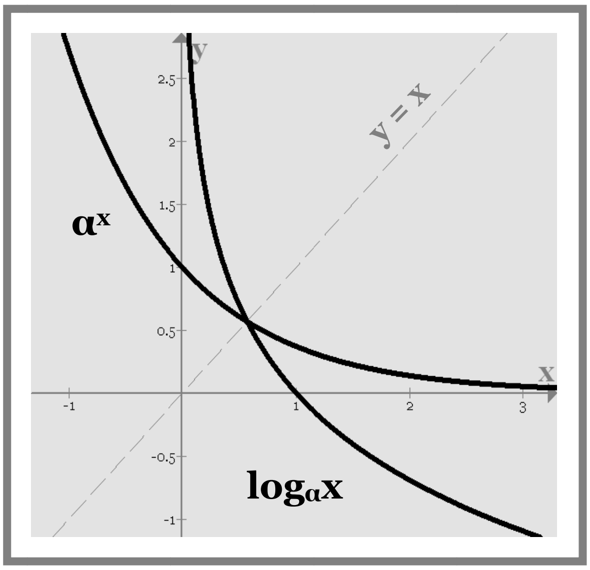
Ιδιότητες Λογαρίθμων

1. $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$
2. $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$
3. $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$
4. $\log_\alpha (x_1 \cdot x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$
5. $\log_\alpha (x_1 / x_2) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$
6. $\log_\alpha x^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha x$
7. $\alpha^x = e^{x \cdot \ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$

Σύγκριση Εκθετικής - Λογαριθμικής

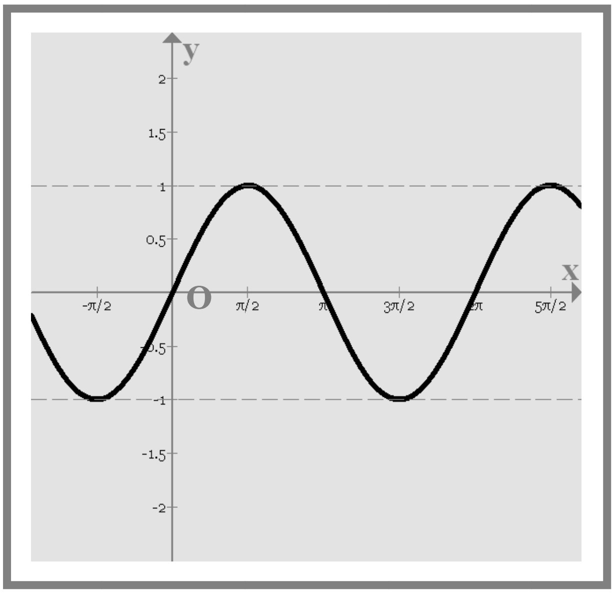
Συμμετρικές ως προς την ευθεία **y = x** (διχοτόμος του 1 - 3^{ου} τεταρτημορίου)

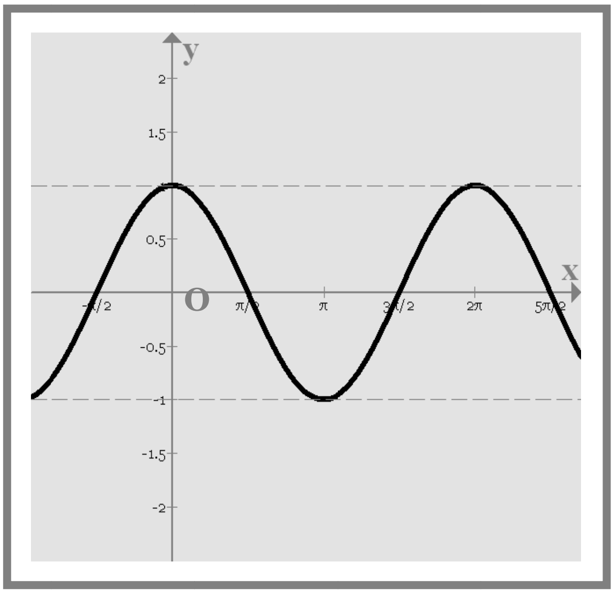




Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

f(x) = ημx	**f(x) = συνx**





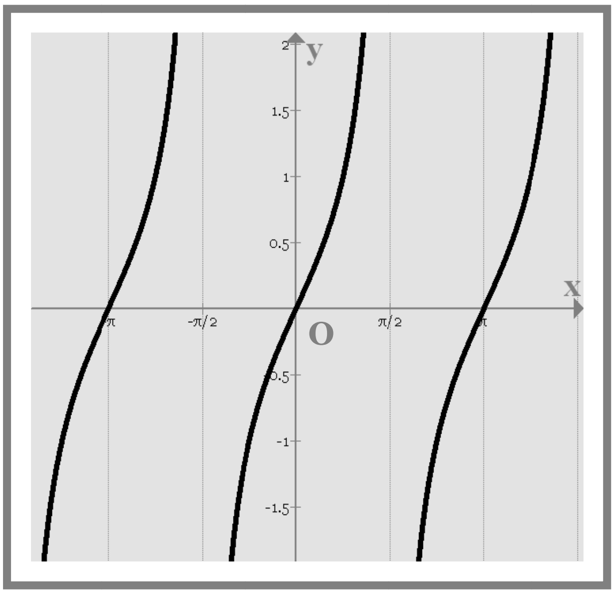
Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σύνολο Τιμών: $f(A) = [-1, +1]$

Πεδίο Ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$

Σύνολο Τιμών: $f(A) = [-1, +1]$

f(x) = εφx

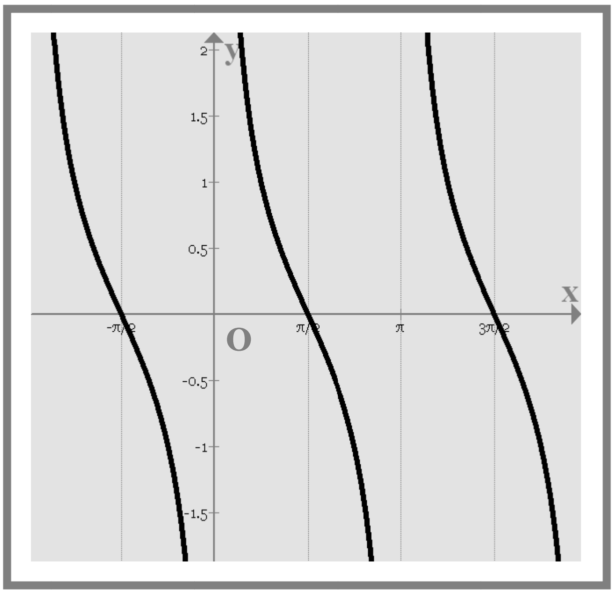


Πεδίο Ορισμού:

$A_f = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2} , \kappa \in \mathbb{Z} \}$

Σύνολο Τιμών: $f(A) = \mathbb{R}$

f(x) = σφx



Πεδίο Ορισμού:

$A_f = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi , \kappa \in \mathbb{Z} \}$

Σύνολο Τιμών: $f(A) = \mathbb{R}$

Μετατοπίσεις Γραφικής Παράστασης

Γραφική Παράσταση της $f(x) + κ$

Η γραφικής παράσταση της συνάρτησης $f(x) + κ$ προκύπτει από την **κατακόρυφη** μετατόπιση της $f(x)$ κατά κ μονάδες προς τα πάνω αν $κ > 0$ ή προς τα κάτω αν $κ < 0$.

Γραφική Παράσταση της $f(x + κ)$

Η γραφικής παράσταση της συνάρτησης $f(x) + κ$ προκύπτει από την **οριζόντια** μετατόπιση της $f(x)$ κατά κ μονάδες προς τα αριστερά αν $κ > 0$ ή προς τα δέξια αν $κ < 0$.

Γραφική Παράσταση της $-f(x)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι **συμμετρική** της γραφικής παράστασης της f, ως προς τον άξονα **x΄x** .

Γραφική Παράσταση της $f(-x)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(-x)$ είναι **συμμετρική** της γραφικής παράστασης της f, ως προς τον άξονα **y΄y** .

Γραφική Παράσταση της $|f(x)|$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα εκείνα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, καθώς και από τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω απ' τον x΄x.

Ισότητα Συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες και γράφουμε **f = g** , όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Ισότητα σε σύνολο Γ

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α και Β. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι **ίσες στο σύνολο Γ**.

Μεθοδολογία

Ακολουθούμε πιστά τον ορισμό, δηλαδή:

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων κι αν δεν ταυτίζονται, αναζητούμε τουλάχιστον κάποιο κοινό τους υποσύνολο. Αν αποτύχουμε και σ' αυτό οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.
- Αν επιτύχουμε στο πρώτο σκέλος, τότε μετασχηματίζουμε ένα από τους δύο ή και τους δύο τύπους των συναρτήσεων μέχρι να διαπιστώσουμε την ισότητά τους.

Πράξεις Συναρτήσεων

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως. Ορίζουμε ως **άθροισμα f + g**, **διαφορά f – g**, **γινόμενο f · g** και **πηλίκο $\frac{f}{g}$** των συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και Π.Ο. $A \cap B$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ και Π.Ο. $A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ και Π.Ο. $A \cap B$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και Π.Ο. $\{x \mid x \in A \cap B \text{ και } g(x) \neq 0\}$

(*) Π.Ο. = Πεδίο Ορισμού

Μεθοδολογία

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων και κατόπιν υπολογίζουμε την τομή τους. Αν η τομή είναι το κενό σύνολο τότε δεν έχει νόημα να προχωρήσουμε σε πράξεις μεταξύ τους.
- Αν η τομή τους δεν είναι κενή, τότε σημειώνουμε τη ζητούμενη πράξη ανάμεσα στους τύπους των δύο συναρτήσεων και κατόπιν απλοποιούμε την παράσταση που προκύπτει.

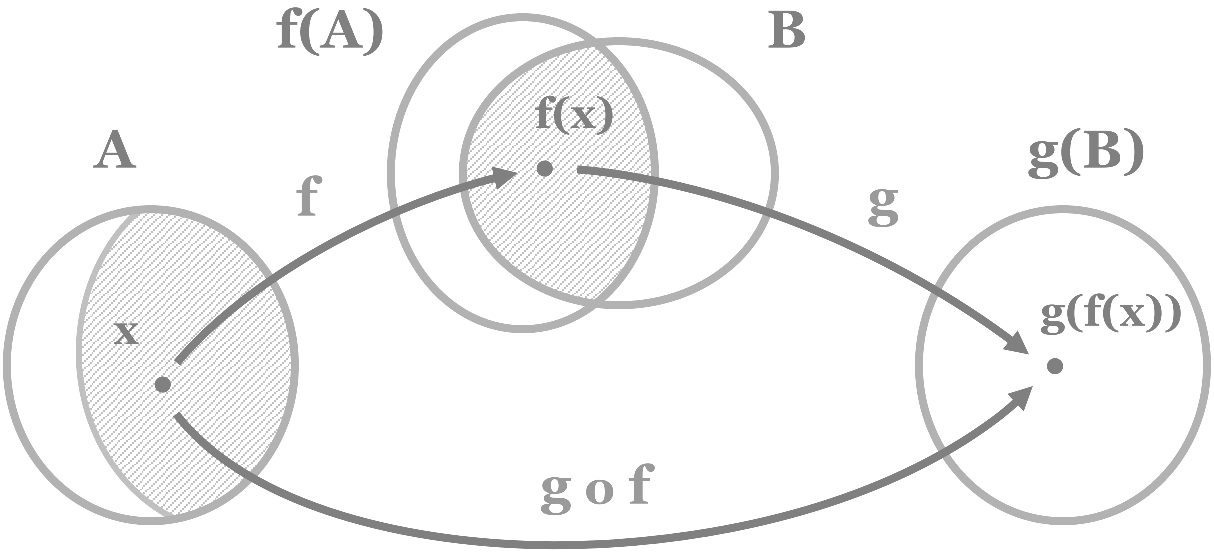
Σύνθεση Συναρτήσεων

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** και τη συμβολίζουμε με $\mathbf{g \circ f}$, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(\,f(x)\,)$$

και πεδίο ορισμού:

$$D_{gof} = \{\, x \in A \text{ και } f(x) \in B \}$$



- Αναλόγως, ορίζεται και η σύνθεση της g με την f, ως η συνάρτηση με τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(\,g(x)\,)$$

 και πεδίο ορισμού.

$$D_{fog} = \{\, x \in B \text{ και } g(x) \in A \}$$

- Εφόσον ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δύο συναρτήσεων, τότε **δεν είναι υποχρεωτικά ίσες**.
- Η σύνθεση ορίζεται και για περισσότερες των δύο συναρτήσεις. Για παράδειγμα, δοθέντων τριών συναρτήσεων και υπό την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα οι παρακάτω εκφράσεις, ισχύει:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Μεθοδολογία 1 - Εύρεση σύνθετης συνάρτησης

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη σύνθεση $g \circ f$ δύο συναρτήσεων f, g εκτελούμε τα εξής:

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού A και B των f, g αντίστοιχα.
- Βρίσκουμε (αν ορίζεται) το πεδίο ορισμού της $g \circ f$. Για το σκοπό αυτό, λύνουμε το παρακάτω σύστημα σχέσεων:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{A} \\ \mathbf{f(x)} \in \mathbf{B} \end{cases}$$

- Εφόσον $\mathbf{D_{gof}} \neq \varnothing$ τότε βρίσκουμε την εξίσωση της σύνθετης συνάρτησης, αντικαθιστώντας στον τύπο της g(x), όπου x τον τύπο της f(x).

Μεθοδολογία 2 - Εύρεση της f από $f \circ g$ και g

Αν γνωρίζουμε τον τύπο της f(g(x)) καθώς κι εκείνον της g, τότε:

- θέτουμε όπου g(x) = u ,
- λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς x ,
- αντικαθιστούμε το x στον τύπο της f(g(x)) .

Μεθοδολογία 3 - Εύρεση της g από $f \circ g$ και f

Αν γνωρίζουμε τον τύπο της f(g(x)) καθώς κι εκείνον της f, τότε:

- αντικαθιστούμε το x με g(x) στον τύπο της f ,
- εξισώνουμε τη σχέση που προκύπτει με την f(g(x)) ,
- λύνουμε ως προς g(x) .

Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

- Συμβολικά για τη γνησίως αύξουσα γράφουμε $f \nearrow$. Αντίστοιχα για τη γνησίως φθίνουσα γράφουμε $f \searrow$.
- Κάθε συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα, είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ**.
- Αντίστοιχα, εκφράζονται και οι ορισμοί της (απλής) **αύξουσας** ή **φθίνουσας**, με τη διαφορά να ισχύουν αντίστοιχα:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2)} \quad \text{και} \quad \mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)}$$

Μεθοδολογία 1 - Εύρεση μονοτονίας

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, έστω A,
- θεωρούμε δύο τιμές $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και προσπαθούμε, σε κάθε μέλος, να "κατασκευάσουμε" τον τύπο της συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων,
- τελικά, καταλήγουμε σε μια από τις σχέσεις: $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$.

Μεθοδολογία 2 - Εύρεση μονοτονίας

Στην περίπτωση μιας συνάρτησης με κλάδους, βρίσκουμε τη μονοτονία ξεχωριστά σε κάθε κλάδο.

- Αν η μονοτονία διαφέρει τότε η συνάρτηση είναι μονότονη μόνο κατά διαστήματα.
- Αν η μονοτονία είναι ίδια σε κάθε κλάδο, τότε επιλέγω δύο τιμές x_1 και x_2 από διαφορετικά διαστήματα και συγκρίνω τις αντίστοιχες τιμές $f(x_1)$ και $f(x_2)$ της συνάρτησης. Αν και πάλι η μονοτονία ταυτίζεται με τις επιμέρους, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Μεθοδολογία 3 - Απόδειξη ανισότητας

Σε κάποιες ασκήσεις, μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση η οποία βασίζεται στον τύπο ή τις τιμές μιας συνάρτησης, της μορφής $f(\alpha) < f(\beta)$ (ή >). Στις περιπτώσεις αυτές, υπολογίζουμε:

- τη μονοτονία της συνάρτησης και
- την ανισοτική σχέση μεταξύ των α, β.

Συνεπώς, αναλόγως του τι ζητείται να αποδείξουμε:

- αν $\alpha < \beta$ και $f \nearrow$ τότε $f(\alpha) < f(\beta)$
- αν $\alpha < \beta$ και $f \searrow$ τότε $f(\alpha) > f(\beta)$

Μεθοδολογία 4 - Επίλυση ανίσωσης

Σκεπτόμενοι αντιστρόφως από την προηγούμενη μεθοδολογία, έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε μιαν ανίσωση, αν είμαστε σε θέση να τη φέρουμε στη μορφή $f(A) < f(B)$ (ή >), οπότε:

- αν $f \nearrow$ τότε $A < B$
- αν $f \searrow$ τότε $A > B$

Μεθοδολογία 5 - Επίλυση εξίσωσης

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εξίσωση $\mathbf{f(x) = 0}$ ή γενικότερα η $\mathbf{f(x) = \lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) έχει **το πολύ** μια ρίζα στο διάστημα Δ.

Ακρότατα Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο**, όταν ισχύει:

$$\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}\ ,\ \text{για κάθε } x \in A$$

Το $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** ή (απλούστερα) **μέγιστο** της συνάρτησης f, στο A.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο**, όταν ισχύει:

$$\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}\ ,\ \text{για κάθε } x \in A$$

Το $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστη τιμή** ή (απλούστερα) **ελάχιστο** της συνάρτησης f, στο A.

- Όταν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ, τότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει **ακρότατο** στο σημείο αυτό.

Μεθοδολογία 1 - Εύρεση ακρότατου

Συνήθως, "πιανόμαστε" από κάποιο μέρος του τύπου της συνάρτησης, για το πρόσημο του οποίου είμαστε βέβαιοι (≥ 0 ή ≤ 0) και στη συνέχεια προσπαθούμε να "κατασκευάσουμε" τον τύπο της συνάρτησης, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ανισοτήτων.

Μεθοδολογία 2 - Εύρεση ακρότατου

"Ανασκευάζουμε" τον τύπο της συνάρτησης με προσθαφαιρέσεις ή διασπάσεις όρων, παραγοντοποιήσεις ή άλλους "έξυπνους" τρόπους, προκειμένου να προκύψει μια μορφή, που να οδηγεί σε προφανή ανισοτική σχέση.

Συνάρτηση 1 – 1

Μια συνάρτηση f: A $\to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1 – 1** (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$\mathbf{x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Ισοδύναμο είναι και το παρακάτω θεώρημα:

Μια συνάρτηση f: A $\to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1 – 1** (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η πρόταση:

$$\textbf{αν} \quad \mathbf{f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2}$$

- Εξαιτίας του ορισμού της συνάρτησης 1 – 1, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Συνεπώς, κάθε **οριζόντια** ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.

ΘΕΩΡΗΜΑ - Συνάρτηση 1–1 και μονοτονία

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι 1–1.

- Το αντίστροφο δεν ισχύει: μία συνάρτηση 1–1 δεν είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη.

Αντίστροφη Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f: A $\rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι 1–1, τότε ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **αντίστροφη** συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

- Είναι προφανές ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το f(A).
- Αναλόγως, το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το A.
- Ισχύει η ισοδυναμία: $\mathbf{f(x) = y \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(y) = x}$
- Επίσης ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{f^{-1}(\,f(x)\,) = x}\ ,\ \text{για κάθε } x \in A$$

$$\mathbf{f(\,f^{-1}(y)\,) = y}\ ,\ \text{για κάθε } y \in f(A)$$

Για τις Cf και Cf^{-1} συμπεραίνουμε εύκολα ότι:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μεθοδολογία 1 - Απόδειξη συνάρτησης 1 – 1

Για ν' αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1–1, χρησιμοποιούμε κυρίως το ισοδύναμο θεώρημα και όχι το αρχικό. Με άλλα λόγια, ξεκινάμε από τη σχέση $f(x_1) = f(x_2)$ και προσπαθούμε, εκτελώντας όσες πράξεις είναι δυνατές κι εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες των ισοτήτων και της διαγραφής, να φτάσουμε στη σχέση $x_1 = x_2$.

Παρατήρηση: Πιθανότατα, κάποιες φορές, να καταλήγουμε σε δύο σχέσεις, μόνο μία εκ των οποίων να είναι η $x_1 = x_2$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση **δεν** είναι 1–1, καθώς θα πρέπει να καταλήγουμε αυστηρά σε μία μοναδική ισότητα $x_1 = x_2$.

Μεθοδολογία 2 - Απόδειξη συνάρτησης 1 – 1

Για ν' αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1–1, μπορούμε επίσης ν' αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα σύμφωνα με το αντίστοιχο θεώρημα θα είναι 1–1.

Μεθοδολογία 3 - Απόδειξη συνάρτησης που δεν είναι 1 – 1

Για ν' αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1–1, αρκεί να βρούμε δύο στοιχεία x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της f με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία να ισχύει τελικά: $f(x_1) = f(x_2)$.

Μεθοδολογία 4 - Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης f :

- βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f ,
- εξετάζουμε αν η f είναι 1–1 ,
- θέτουμε όπου $f(x) = y$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς x .

Λύνοντας την εξίσωση του τελευταίου βήματος, προσέχουμε να προσδιορίζουμε για το y τους απαραίτητους περιορισμούς που, τυχόν, προκύπτουν κατά την επίλυση.