ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να γραφούν χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, οι παρακάτω συναρτησιακοί τύποι:

α. $f(x) = 4 - 3|2 - x^2|$ **β.** $g(x) = 2|x - 2| - |4 - x| - 8$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$. Ποια σχέση ικανοποιούν τα α, β, $γ \in \mathbb{R}$ αν:

α. το σημείο (1, 1) ανήκει στη C_f ;

β. το σημείο (1, 1) είναι η κορυφή της C_f ;

γ. η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο (0, 6) ;

δ. Να βρείτε τη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί και τις τρεις προηγούμενες συνθήκες.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left|\ln|x|\right|$ και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 10^{-6}$.

4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x\sqrt{x^2}$ **β.** $f(x) = συν\dfrac{x}{2}$

γ. $g(x) = \begin{cases} e^x & , x \le 0 \\ \ln x & , 0 < x \le e \\ (x-1)^2 & , x > e \end{cases}$

5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h όταν:

α. $f(x) = \ln(-x)$, $x < 0$ $g(x) = -\ln(-x)$, $x < 0$

β. $f(x) = \ln|x|$, $g(x) = -|\ln x|$ και $h(x) = -\ln|x|$

6. Ομοίως:

α. $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = -\sqrt{|x|} + 1$ και $h(x) = \sqrt{1 - x}$

β. $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ και $h(x)=\dfrac{1}{|x+1|}$

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

7. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ορίζεται καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}$ **β.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

γ. $f(x)=\dfrac{x+1}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{x-2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

ε. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$

8. Ομοίως:

α. $f(x)=\sqrt{(e^x-1)\ln(x-1)}$ **β.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x-x^2}}$

γ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x-2|}}{2x-4-|x-1|}$

9. Ομοίως:

α. $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{2\eta\mu x+1}$ **β.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[x]{4-x^2}}$

γ. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^{2x}-e^{-2x}}$ **δ.** $f(x)=\sqrt{\ln(1-x^2)}$

10. Ομοίως:

α. $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+1}$ **β.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{9^x-4\cdot 3^{x+1}+27}$

γ. $f(x)=\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+3}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{2\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x-\eta\mu 2x}$

ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ

11. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων, καθώς και τα διαστήματα στα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους βρίσκονται "πάνω" από τον άξονα $x'x$.

α. $f(x) = \ln(2x+1)^3$

β. $g(x) = \begin{cases} -x-1 & , x<0 \\ e^x - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = g(x) + x^2 - \kappa$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί ο κ, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων να τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$.

β. Για την τιμή του κ, που υπολογίσατε, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι "πάνω" από την C_g .

13. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = g(x) + x^2 - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f , C_g .

14. Να βρεθούν τα κοινά σημεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων, καθώς και τα διαστήματα όπου η C_f είναι "πάνω" από τη C_g , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)-1}{x-x_0} = 10$

β. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{αν } x \geq 0 \\ -1-2x & , \text{αν } x<0 \end{cases}$ και $g(x) = x + 2$

ΙΣΟΤΗΤΑ

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

α. Να εξετάσετε ποιες απο τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad$ $f_2(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

$f_3(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$ $\qquad$ $f_4(x) = x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

$f_5(x)=\ln e^{x+1}$ $\qquad$ $f_6(x)=e^{\ln(x+1)}$

β. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

16. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

β. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}-2\right)$ και $g(x)=\ln(1-2x)-\ln x$

17. Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{-\lambda x^3+3x-4}{x^2-\lambda x+4} \quad \text{και} \quad g(x)=-\lambda x-1$$

ΠΡΑΞΕΙΣ

18. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$ και f/g όταν:

α. $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ και $g(x)=2|x|+1$

β. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , x\le 2\\ \sqrt{x} & , x>2\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\ln x & , 0<x<3\\ -2x+3 & , x\ge 3\end{cases}$

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το $A\subseteq\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι:

$$(f+g)(x)\cdot[(f+g)(x)-6]=2\cdot[(f\cdot g)(x)-9]\text{ , για κάθε } x\in A .$$

Να αποδείξετε ότι $f=g$.

20. Έστω οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι:

$$g(x)=f^2(x)-2f(x)+3\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει το θετικό ημιάξονα Oy.

21. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)+1=2\cdot(\eta\mu x\cdot f(x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot g(x))\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

22. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f^2(x) - f(x) = x\cdot(x-1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ

23. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , x<0 \\ 3 & , x=0 \\ 2x-3 & , x>0 \end{cases}$$

24. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι περιττή και για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot(x^2+2) \le 2x$. Να αποδείξετε ότι $(x^2+2)\cdot f(x) = 2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

25. Δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$f^2(x) = f(x)\cdot f(-x) \quad \text{και} \quad g^2(x) = -g(x)\cdot g(-x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με $A_f = A_g \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν οι f, g είναι περιττές, τότε η $f + g$ είναι περιττή, ενώ οι $f\cdot g$ και f / g (με $g(x) \neq 0$) είναι άρτιες.

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

27. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x) = -2x + 3$, με $x\in[-1, 1]$

β. $f(x) = e^{1-x} + 3$, με $x\in[-1, 2]$

γ. $f(x) = -3\ln(1 - 2x) - 1$, με $x\in[-2, -1/2]$

28. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+1$, με $x\in[-3, -2]$

β. $f(x)=-\sqrt{1-x}+3$, με $x\in[-4, -2]$

29. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x)=2\sqrt{3-x^2}+3$, με $x\in[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

β. $f(x)=\sqrt{7+\sqrt{6-x}}$, με $x\in[2, 5]$

30. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, με $x\in[2, 5]$

β. $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2-4}+2}$, με $x\in(-\infty, -2]$

31. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ **β.** $f(x)=\log\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

γ. $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{5+e^x}{5-e^{x+1}}$

ε. $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & , \text{αν } 2\le x<3 \\ x-1 & , 3\le x<5 \end{cases}$

στ. $f(x) = 3 + 2|x - 1|$

ΣΥΝΘΕΣΗ

32. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων (μη ταυτοτικών) συναρτήσεων, αν:

α. $f(x) = συν\sqrt{1+x^2}$ **β.** $f(x) = ημ(συν(ημx))$

γ. $f(x) = ημ^4(3x + 5)$ **δ.** $f(x) = 3\cdot ημ^3(x^2 - 1) + 4$

ε. $f(x) = 2\cdot συν^4 x$ **στ.** $f(x) = (συν^2 x + 1)^{100} + 1$

ζ. $f(x) = (\ln(x + 1) - \ln x)^2$ **η.** $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 3)$

33. Να οριστεί η $g\circ f$ για τις παρακάτω συναρτήσεις :

α. $f(x) = ημx$, $g(x) = \ln(1 - 2x^2)$

β. $f(x) = συνx$, $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$

γ. $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x\in(0,\ 2) \\ x+1 & , x\in[2,\ 4) \end{cases}$, $g(x) = |x - 1|$

34. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν δίνεται ότι $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και $h(x) = f(2συνx - 1)$.

β. Αν δίνεται ότι $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ και $h(x) = f(1 + εφx)$.

γ. Αν δίνεται ότι $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ και $h(x) = f(x^2 - 4) + f(x + 1)$.

35. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $f(\ln(2x)) = x + 3$, για κάθε $x > e$.

β. $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = x + 1$.

γ. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ και $g(x) = -x^2$.

36. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε περίπτωση :

α. $(g \circ f)(x) = \dfrac{1+συν2x}{x}$ και $g(x) = x^2$.

β. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+2}$ και $g(x) = x^2 + 1$.

γ. $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + 4$ και $(f \circ f)(x) = 4x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

37. Έστω οι συναρτήσεις $f : A_f \to \mathbb{R}$, $g : A_g \to \mathbb{R}$ με $f(A_f) \subseteq A_g$. Να αποδειχτούν οι παρακάτω προτάσεις :

α. Αν η f είναι άρτια, τότε και η gof είναι άρτια .

β. Αν η f είναι περιοδική, τότε και η gof είναι περιοδική, με την ίδια περίοδο.

38. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε $f(x^2 + 2) + f(3x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία τουλάχιστον.

39. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(x/e) \le \ln x \le f(x) - 1$, για κάθε $x > 0$.

40. Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = 2x - 2004$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $f(2004)$.

41. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f \circ f \circ f)(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

42. Αν $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = x^2 - x + 2$, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση h με $A_h = \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$$

43. Να προσδιοριστεί ο τύπος της συνάρτησης f , σε κάθε μάι από τις περιπτώσεις:

α. Αν $f(x) - x\cdot f(2 - x) + x = 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R} - \{1\}$.

β. Αν $(1 - x)\cdot f(x - 1) + f(1 - x) + x = 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Αν $2\cdot f(x) + f(1/x) = x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

44. Αν $f(f(x)) = e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή 2007.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \dfrac{\alpha x + 3}{2 - x}$. Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \neq 2$.

46. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. $f(x) \geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Αν υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, ώστε $f(\xi) \neq 0$, τότε:

α. $f(x) > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. $f(0) = 1$

γ. $f(-x) = 1/f(x)$ και $f(x - y) = f(x)/f(y)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. $f(\nu x) = f^{\nu}(x)$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ και $x\in\mathbb{R}$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

47. Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 - x}}$

β. $f(x) = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

γ. $f(x) = (x - 1)^3 - 2$

δ. $f(x) = e^{\sqrt{4 - x}} - 3$

ε. $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & , \ x < 2 \\ 1 - 2x & , \ x \geq 2 \end{cases}$

στ. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

48. Για τις συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

α. Αν οι f και g είναι γνήσια αύξουσες στο $\mathbb{R}$, τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια αύξουσα.

β. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και η g γνήσια φθίνουσα, τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια φθίνουσα.

γ. Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \ln(\ln x)$.

δ. Αν οι f, g παίρνουν θετικές τιμές, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

49. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$$

α. Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι γνησίως μονότονες.

β. Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

50. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

51. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $\ln x > 1 - x$ **β.** $e^x > \frac{1-x}{1+x}$

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$.

53. Δίνονται συναρτήσεις f, g με κοινό σύνολο ορισμού το [α, β] , σύνολο τιμών το [α, β] και ισχύει ότι $g(x) > f(x)$, $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε να αποδείξετε ότι: $f(g(x)) < g(f(x))$, $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$.

54. Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$.

Α. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 \neq x_2$, ορίζουμε ως $\lambda = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Να αποδείξετε ότι:

α. η f είναι γνησίως αύξουσα, αν και μόνο αν, $\lambda > 0$.

β. η f είναι γνησίως φθίνουσα, αν και μόνο αν, $\lambda < 0$.

Β. Αν $A = \mathbb{R}$ και $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 \neq x_2$, ισχύει:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 2|x_1 - x_2|$$

να αποδείξετε ότι η $g(x) = f(x) - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και οτι η $h(x) = f(x) + 2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

55. Αν $f(x) + e^{f(x)} + 1 = x^3$ για $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

56. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f\left(\dfrac{2x + 3f(x)}{5}\right) = x$, να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

57. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία έχει την ιδιότητα: $f(x) - f(y) = f(x/y)$, για κάθε $x, y > 0$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 .

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$.

γ. Αν ακόμη είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

58. Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας, απο τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = 1 - \sqrt{2x + 3}$

β. $f(x) = 4 - |x - 2|$

γ. $f(x) = 4 - (x^3 - 4x)^4$

δ. $f: [-1, 4) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 1$

ε. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

στ. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \ x \leq 2 \\ 3x - 1 & , \ x > 2 \end{cases}$

59. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο, τότε να αποδειχτεί ότι:

α. η $-f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .

β. αν η f είναι άρτια, τότε παρουσιάζει ελάχιστο και στο $-x_0$.

γ. αν η f είναι περιττή, τότε παρουσιάζει μέγιστο στο $-x_0$.

1 – 1

60. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1–1:

α. $f(x) = 2\ln x - 3$ **β.** $f(x) = 3e^{x-1} + 2$

γ. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2004$

δ. $f(x) = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 2005$

61. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) + 3f(x) - x^{2003} = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 .

62. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $e^{x-1} + \ln x + x = 2$

β. $ημx + εφx - συνx + x + 1 = 0$, $x \in [0, π/2)$

γ. $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 7x = 18$

63. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, τότε:

α. να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β. να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ. να λύσετε την εξίσωση:

$$f(4x^2 + 2005) + f(4x^2 - 2005) = 2f(8x - 4)$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

64. Να βρείτε την f^{-1} αν:

α. $f(x) = x^3 + 1$ **β.** $f(x) = 2 + (x-3)^2$, $x < 3$

γ. $f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$ **δ.** $f(x) = \log\sqrt{3 - 10^x}$

ε. $f(x) = \dfrac{3+e^{3x}}{3-e^{3x}}$ **στ.** $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$

65. Να βρείτε την f^{-1} αν:

α. $f(x) = \ln\dfrac{x}{4-x}$ **β.** $f(x) = \log\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

γ. $f(x) = \ln(2 + e^x) - x$ **δ.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

ε. $f(x) = \begin{cases} x-1 & , \ x<0 \\ 9x^2 & , \ x \geq 0 \end{cases}$ **στ.** $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

66. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ αν:

α. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x\in[-1, 0]$ **β.** $f(x) = \sqrt{x-1}$

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.

α. Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12$, $f^{-1}(x) = -2$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και την ευθεία $y = x$.

δ. Να λυθεί η εξίσωση: $(2 - ημ^2x)^3 = ημ^3x + ημ^2x + ημx - 2$.

ε. Να λυθούν οι ανισώσεις: $f^{-1}(x) < 3$ και $f^{-1}(x + 1) \geq x + 5$.

68. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + x - 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(5x + 6) < 1$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.

70. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , \ x < 0 \\ x + \lambda - 8 & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

71. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:

$$2g(x) - 5f(x + 5) = (g \circ g)(x) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει η f^{-1} τότε υπάρχει και η g^{-1} .

72. Αν για τις συναρτήσεις f και g, ορισμένες στο $\mathbb{R}$, υπάρχουν οι συναρτήσεις $(f \circ g)^{-1}$ και $(g \circ f)^{-1}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν επίσης οι g^{-1} και f^{-1} .

73. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + 3f(x) - x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

74. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - xf(x) + 3 \text{ , } \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(3) = 3$ και ότι η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

75. Να αποδειχτεί ότι δεν αντιστρέφεται η συνάρτηση f, αν ισχύει ότι:

$$6f(x^2) - f^2(x) \geq 9 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΓΕΝΙΚΕΣ

76. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\underbrace{f(f(f(...(x)...))) = 2x - 1}_{\nu \text{ όροι}}$$

να βρείτε το f(1) .

77. Θεωρούμε τις αντιστρέψιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες είναι $f \circ g = g \circ f$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f$ **β.** $f^{-1} \circ g = g \circ f^{-1}$

γ. $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

78. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο A_f τότε και η αντίστροφή της είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο f(A).

79. Δίνεται η 1–1 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, για την οποία ισχύει ότι: $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \text{, για κάθε } x, y \in f(\mathbb{R})$$

80. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + x = 0 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. η f είναι 1–1 .

β. η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. η f είναι περιττή.

81. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $B \subseteq f(A)$ και η $g \circ f$ είναι 1–1 τότε και η g είναι 1–1 .

82. Να αποδείξετε ότι η C_f της $f(x) = \dfrac{5x+2}{2x-5}$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$.

83. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι και η f + g είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Στη συνέχεια:

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \log x + x^4$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(\lambda^2 + 1) - \log|5\lambda - 5| = (5\lambda - 5)^4 - (\lambda^2 + 1)^4$$

84. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία Α (5, 9) και Β (2, 3) τότε:

α. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. να λύσετε την εξίσωση: $f(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$.

85. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και:

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 2 \text{, για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι: $f(x) = x + 2$.

86. Δίνεται η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι συνάρτηση 1–1, να αποδείξετε ότι:

α. η f είναι 1–1 και ότι **β.** $f(x) = x$

γ. Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί. Αν $f(\mathrm{Re}(z \cdot w)) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w)$, να αποδείξετε ότι ο z ή ο w είναι πραγματικός αριθμός.

87. Έστω ένα ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 2 και έστω ότι $B\hat{A}\Gamma = \theta$ (σε rad).

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ΑΒΓ, συναρτήσει της θ, είναι $E(\theta) = 4(1 + \text{συν}\theta) \cdot \text{ημ}\theta$, με $0 < \theta < \pi/2$.

β. Αν η γωνία θ μεταβάλλεται στο χρόνο, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta = f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}$, με $0 < t < 2\pi$, τότε να εκφράσετε το εμβαδόν Ε σε συνάρτηση με το χρόνο, να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, καθώς και το εμβαδόν του, τη στιγμή εκείνη.

88. **Α.** Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$f(f(x_0)) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^3 - 1}{3}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

89. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = f(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α. η f είναι αντιστρέψιμη.

β. είναι $f(0) = 0$.

γ. $f^{-1}(x) = f(x) - x$, για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.