ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Ορισμός Φανταστικών Αριθμών

- Ορίζουμε ως **φανταστικό** αριθμό και τον συμβολίζουμε με το γράμμα **i** έναν αριθμό για τον οποίο ισχύει:

$$\mathbf{i^2 = -1}$$

- Κάθε αριθμός της μορφής **β·i** με $\beta \in \mathbb{R}$ νοείται ως φανταστικός.
- Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{I}$.

Ορισμός Μιγαδικών Αριθμών

- Κάθε αριθμός που αποτελεί σύνθεση (άθροισμα) ενός πραγματικού κι ενός φανταστικού αριθμού ονομάζεται **μιγαδικός** και τον συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα **z** ή **w**:

$$\mathbf{z = x + yi} \quad \text{με } x, y \in \mathbb{R}.$$

- Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.
- Το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ συμβολίζεται ως **Re(z)**, ενώ το φανταστικό ως **Im(z)**.

Δηλαδή: $\mathbf{Re(z) = x}$ και $\mathbf{Im(z) = y}$

Παρατηρήσεις

- Οι πραγματικοί και οι φανταστικοί αριθμοί νοούνται ως υποσύνολα των μιγαδικών. Έτσι κάθε πραγματικός αριθμός δεν είναι παρά ένας μιγαδικός με $Im(z) = 0$ ενώ κάθε φανταστικός δεν είναι παρά ένας μιγαδικός με $Re(z) = 0$.

- Άρα, τελικά, για τα γνωστά μας αριθμητικά σύνολα ισχύει:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{N}$ Φυσικοί Αριθμοί
+ Αρνητικοί ακέραιοι
$\mathbb{Z}$ Ακέραιοι Αριθμοί
+ Όσοι αριθμοί γράφονται ως πηλίκο ακεραίων
$\mathbb{Q}$ Ρητοί Αριθμοί
+ Άρρητοι αριθμοί ($\mathbb{Q}'$)
$\mathbb{R}$ Πραγματικοί Αριθμοί
+ Φανταστικοί αριθμοί ($\mathbb{I}$)
$\mathbb{C}$ Μιγαδικοί Αριθμοί

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Έστω **z = α + βi** και **w = γ + δi** δύο μιγαδικοί με α, β, γ, δ $\in\mathbb{R}$.

- $z = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- $z = w \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$

Συζυγής Μιγαδικού Αριθμού

Ορίζουμε ως **συζυγή** ενός μιγαδικού αριθμού **z = x + yi** και τον συμβολίζουμε ως $\bar{z}$ το μιγαδικό αριθμό:

$$\bar{z} = x - yi$$

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$z + \bar{z} = 2x \quad \text{ή} \quad z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2yi \quad \text{ή} \quad z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)\cdot i$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

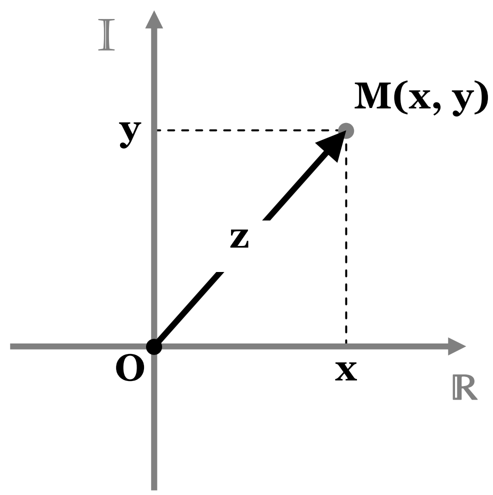
Πολύ χρήσιμες για τις ασκήσεις είναι οι παρακάτω ιδιότητες:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

- Ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο οριζόντιος άξονας θα αντιστοιχεί στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ ο κατακόρυφος άξονας στο σύνολο $\mathbb{I}$ των φανταστικών, ορίζει το **μιγαδικό επίπεδο**.
- Κάθε μιγαδικός **z = x + yi** αντιστοιχεί σε ένα σημείο **M(x, y)** του μιγαδικού επιπέδου. Αλλά και αντίστροφα κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μιγαδικό αριθμό.



- Το σημείο M(x, y) λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού z και συμβολίζεται επίσης με **M(z)**.
- Ο μιγαδικός z παριστάνεται από τη **διανυσματική ακτίνα** $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.
- Οι εικόνες των **z** και $\bar{\mathbf{z}}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

Πράξεις Μιγαδικών Αριθμών

Έστω $\mathbf{z = \alpha + \beta i}$ και $\mathbf{w = \gamma + \delta i}$ δύο μιγαδικοί με α, β, γ, δ∈ℝ.

Πρόσθεση Μιγαδικών

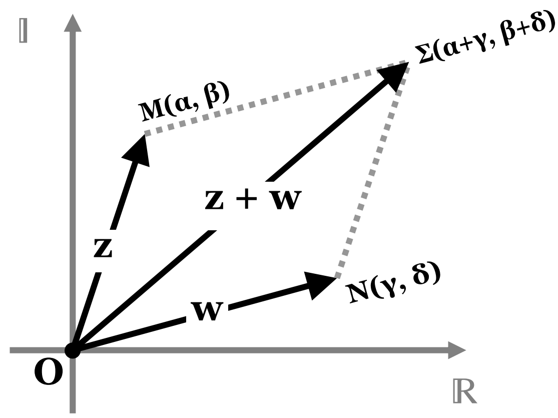
- $\mathbf{z + w} = (\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = \mathbf{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i}$

  Με απλά λόγια, για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους μιγαδικούς, προσθέτουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη, ξεχωριστά μεταξύ τους, σαν τη γνωστή μας αναγωγή ομοίων όρων.

- Γεωμετρικά, η πρόσθεση δύο μιγαδικών εκτελείται, κατά τα γνωστά από το διανυσματικό λογισμό, με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου.

  Ισχύει δηλαδή ότι:

  Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.



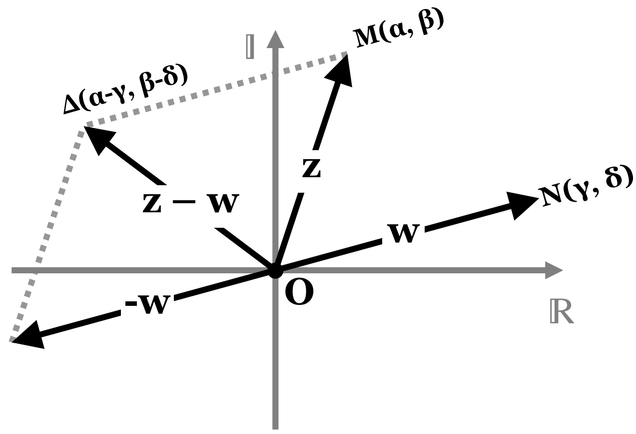
Αφαίρεση Μιγαδικών

- $\mathbf{z - w} = (\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = \mathbf{(\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i}$

- Γεωμετρικά, η αφαίρεση δύο μιγαδικών εκτελείται αναλόγως με τη βοήθεια του διανυσματικού λογισμού και τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ισχύει δηλαδή ότι:

Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.



- Είναι προφανές, από τα προηγούμενα, ότι για κάθε μιγαδικό $\mathbf{z = x + yi}$ ορίζεται ο **αντίθετος** ως $\mathbf{-z = -x - yi}$.
- Οι εικόνες των μιγαδικών $\mathbf{z}$ και $\mathbf{-z}$ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

Πολλαπλασιασμός Μιγαδικών

- $$\begin{aligned}\mathbf{z\cdot w} = (\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i) &= \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = \\ &= \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta(-1) = \\ &= \mathbf{(\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i}\end{aligned}$$

  Με απλά λόγια, για να πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς, εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα χωρίς καμία ιδιαιτερότητα. Πρέπει όμως πάντα, κατά την εκτέλεση των πράξεων, να θυμόμαστε πως: $i^2 = -1$.

Διαίρεση Μιγαδικών

- $$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} = \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2-\delta^2 i^2}$$

  $$= \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2-\delta^2(-1)} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2} = \boldsymbol{\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i}$$

  Εμείς, φυσικά, δε χρειάζεται να θυμόμαστε τον περίπλοκο αυτόν τύπο αλλά **τη διαδικασία**. Με απλά λόγια, για να διαιρέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον **συζυγή** του παρονομαστή. Δεν ξεχνάμε να χωρίσουμε την τελική μας παράσταση στα δύο ομώνυμα κλάσματα που θα αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού.

- Προφανώς, η διαίρεση ορίζεται για $\mathbf{w \neq 0}$.
- Είναι επίσης προφανές, από τα προηγούμενα, ότι για κάθε μιγαδικό $\mathbf{z = x + yi}$ με $\mathbf{z \neq 0}$ ορίζεται ο **αντίστροφος** , ως $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x + yi}}$.

Δυνάμεις Μιγαδικών

Στους φανταστικούς και στους μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων και οι γνωστές μας ταυτότητες, όπως ακριβώς και στους πραγματικούς.

Ειδικότερα, για το φανταστικό i ισχύει:

$$\mathbf{i^0 = 1} \quad \text{(ομοίως για υ = 0)}$$
$$\mathbf{i^1 = i} \quad \text{(ομοίως για υ = 1)}$$
$$\mathbf{i^2 = -1} \quad \text{(ομοίως για υ = 2)}$$
$$\mathbf{i^3 = -i} \quad \text{(ομοίως για υ = 3)}$$

Οποιαδήποτε άλλη δύναμη του i υπολογίζεται με τη βοήθεια των προηγούμενων, καθώς επαναλαμβάνονται περιοδικά οι ίδιες τιμές. Το μόνο που μας χρειάζεται είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αντίστοιχου εκθέτη με τον αριθμό 4, οπότε ο υπολογισμός της δύναμης ανάγεται σε μία από τις πιο πάνω περιπτώσεις. Με πιο "μαθηματική" έκφραση:

$$\mathbf{i^{4\pi+\upsilon} = i^{\upsilon}}$$

Ιδιότητες Συζυγών Μιγαδικών

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε:

1. $\overline{\mathbf{z_1 \pm z_2}} = \overline{\mathbf{z_1}} \pm \overline{\mathbf{z_2}}$

2. $\overline{\mathbf{z_1 \cdot z_2}} = \overline{\mathbf{z_1}} \cdot \overline{\mathbf{z_2}}$

3. $\overline{\left(\dfrac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}\right)} = \dfrac{\overline{\mathbf{z_1}}}{\overline{\mathbf{z_2}}}$

Οι ιδιότητες (1) και (3) ισχύουν και για περισσότερους όρους:

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_\nu}$$

$$\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_\nu}$$

Από την τελευταία, για ίσους παράγοντες, προκύπτει η επόμενη.

4. $\overline{\mathbf{z}^\nu}=\left(\overline{\mathbf{z}}\right)^\nu$

5. $\overline{(\overline{\mathbf{z}})}=\mathbf{z}$

6. $\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{z}}=\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=|\mathbf{z}|^2$ (όπου z = x + yi)

Επίλυση 2βάθμιας Εξίσωσης στο ℂ

Η γνωστή μας εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (α, β, γ ∈ ℝ και α≠0), η οποία για Δ < 0 ήταν αδύνατη στο σύνολο ℝ, παύει πια να είναι αδύνατη στο σύνολο ℂ. Με απλά λόγια, η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ έχει πάντα λύση στο ℂ. Ειδικότερα, για κάθε περίπτωση έχουμε:

Διακρίνουσα	Πλήθος ριζών	Μορφή ριζών
Δ > 0	2 ρίζες πραγματικές & άνισες	$z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Δ = 0	1 διπλή πραγματική ρίζα	$z_{1,2}=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
Δ < 0	2 ρίζες μιγαδικές & συζυγείς	$z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Παρατήρηση

- Τονίζουμε ότι οι μιγαδικές λύσεις μιας 2βάθμιας εξίσωσης είναι πάντα **συζυγείς** μεταξύ τους.
- Τονίζουμε, επίσης, ότι τα παραπάνω αφορούν τριώνυμα με **πραγματικούς** συντελεστές, δηλαδή μόνο αν α, β, γ ∈ ℝ.
- Εξακολουθούν να ισχύουν οι τύποι του **Vieta**. Με άλλα λόγια, για τις μιγαδικές λύσεις είναι:

$$z_1+z_2=\mathbf{S}=-\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\quad\text{και}\quad z_1\cdot z_2=\mathbf{P}=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

Μέτρο Μιγαδικών Αριθμών

Έστω ένας μιγαδικός $z = x + yi$ και Μ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z και το συμβολίζουμε **|z|** το μέτρο της αντίστοιχης διανυσματικής ακτίνας, δηλαδή με απλά λόγια, την απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων. Αλγεβρικά ισχύει:

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ιδιότητες Μέτρου Μιγαδικών

1. $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

2. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και συνεκδοχικά

$|z^\nu| = |z|^\nu$

4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

5. $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ **Τριγωνική ανισότητα**

6. Το μέτρο της διαφοράς 2 μιγαδικών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους. Δηλαδή, αν $M(z_1)$ και $N(z_2)$ είναι οι εικόνες δύο μιγαδικών z_1, z_2 τότε:

$$(MN) = |z_1 - z_2|$$

Γεωμετρικοί Τόποι

- **$|z| = \rho$** $(\rho > 0)$

  Κάθε σχέση της παραπάνω μορφής παριστάνει το σύνολο των μιγαδικών z των οποίων οι εικόνες ισαπέχουν απ' την αρχή των αξόνων σταθερή απόσταση ίση με ρ. Με άλλα λόγια, σχηματίζουν **κύκλο** με κέντρο **Ο(0, 0)** και ακτίνα **ρ**.

  Παρατήρηση

  Με βάση τα προηγούμενα, είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι η σχέση **|z| > ρ** παριστάνει το σύνολο των μιγαδικών, των οποίων οι εικόνες βρίσκονται **εκτός** του κύκλου (αντίστοιχα **εντός** του κύκλου, αν πρόκειται για τη σχέση $|z| < \rho$).

- $|z - z_0| = \rho$ ($\rho > 0$)

  Κάθε σχέση της παραπάνω μορφής παριστάνει το σύνολο των μιγαδικών z των οποίων οι εικόνες ισαπέχουν απ' την εικόνα του z_0 σταθερή απόσταση ίση με ρ. Με άλλα λόγια, σχηματίζουν **κύκλο** με κέντρο $M(z_0)$ και ακτίνα **ρ**.

  Παρατήρηση

  Για σχέσεις τις μορφής $|z - z_0| > \rho$ (ή $< \rho$) ισχύουν, αναλόγως, όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παρατήρηση.

- $|z - z_1| = |z - z_2|$

  Κάθε σχέση της παραπάνω μορφής παριστάνει το σύνολο των μιγαδικών z των οποίων οι εικόνες ισαπέχουν απ' τις εικόνες των z_1 και z_2 . Με άλλα λόγια, σχηματίζουν τη **μεσοκάθετο** του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $M(z_1)$ και $M(z_2)$.

  Παρατήρηση

  Με βάση τα προηγούμενα, είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι η σχέση $|z - z_1| > |z - z_2|$ παριστάνει το σύνολο των μιγαδικών, των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στο **ημιεπίπεδο** εκείνο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο και το $M(z_2)$ (ή το $M(z_1)$ αντίστοιχα, αν πρόκειται για τη σχέση $|z - z_1| < |z - z_2|$).

Μικρά & Χρήσιμα ...

1. Αν $|z| = 1$ τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι: $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ή $z = \frac{1}{\bar{z}}$.
2. **Στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει διάταξη!!!**

   Συνεπώς, μια σχέση της μορφής $\alpha < \beta$ υπονοεί ότι οι α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.
3. Από τις σχέσεις:

   $$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \text{ και } z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)\cdot i$$

   προκύπτει εύκολα ότι:

$$\mathbf{Re(z)} = \frac{\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}}{\mathbf{2}} \quad \text{και} \quad \mathbf{Im(z)} = \frac{\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}}{\mathbf{2i}}$$

4. Ένα πηλίκο της μορφής $\frac{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{i}}{\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{i}}$ με α, β, γ, δ $\in \mathbb{R}$ είναι πραγματικός αριθμός αν ισχύει:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\delta} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

5. Ο πολλαπλασιασμός ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού z με i , έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του z , στο μιγαδικό επίπεδο, 90^{o} κατά τη θετική φορά. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό, αν ρίξει κανείς μια ματιά στην (εκτός διδακτέας κι εξεταστέας ύλης) παράγραφο «Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού».