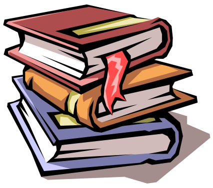
Μιγαδικοί Αριθμοί

Μαθηματικά Γ! Λυκείου
Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση

- **Θεωρία - Μέθοδοι**
- **Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις**
- **Ασκήσεις προς λύση**
- **Επιλεγμένα θέματα**

« Σας εύχομαι,
καλό κουράγιο και μεγάλη δύναμη ψυχής,
ώστε στο τέλος να έχετε
την μεγαλύτερη δυνατή επιτυχία! »

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης



Μάθημα 1ον

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ℂ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν έχει λύση στο σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την «αδυναμία» αυτή, διευρύνουμε το σύνολο ℝ σε ένα σύνολο ℂ, το οποίο θα έχει τις ίδιες πράξεις αλλά και τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών με το ℝ, και στο οποίο θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$, δηλαδή ένα στοιχείο i, τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$.

☛ Στο σύνολο ℂ, δεχόμαστε ότι η εξίσωση $x^2 = -1$ επιλύεται ως εξής:

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x & = & i \\ & ή & \\ x & = & -i \end{matrix}\right\}$$

Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο ℂ θα έχει ως στοιχεία:

● Όλους τους πραγματικούς αριθμούς

● Όλα τα στοιχεία της μορφής βi, δηλαδή όλους τους αριθμούς που είναι που είναι γινόμενα των στοιχείων β του ℝ με το i και τα οποία καλούνται φανταστικοί αριθμοί. Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με 𝕀, δηλαδή 𝕀=$\{\beta i$, όπου $\beta \in$ℝ και $i^2 = -1\}$.

● Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha + \beta i$, με α και β πραγματικούς αριθμούς. Τα στοιχεία του ℂ λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το ℂ **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

☛ Το σύνολο ℂ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου ℝ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

● Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο ℝ, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,

● Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$,

● Κάθε στοιχείο z του ℂ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in$ℝ.

Μάθε καλά τα επόμενα

Κάθε μιγάδας έχει την μορφή $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Είναι λοιπόν αλγεβρικό άθροισμα δυο αριθμών, του πραγματικού α και του φανταστικού αριθμού βi.

- Ο α λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathrm{Re}(z)$.
- **Ο** β λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathrm{Im}(z)$.
- Στο σύνολο στο $\mathbb{C}$, κάθε πραγματικός αριθμός α εκφράζεται ως $\alpha+0i$, ενώ κάθε φανταστικός αριθμός βi εκφράζεται ως $0+\beta i$.
- Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$, εννοούμε ότι οι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.
- **Καθαρός** μιγαδικός λέγεται ο $z=\alpha+\beta i$, όταν $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$. Το σύνολο των καθαρών μιγαδικών το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$.

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha+\beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.}$$

Επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$$\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0.}$$

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί.

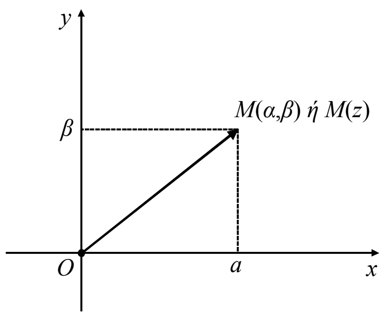
Γνωρίζουμε ότι, κατά την επέκταση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$, οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών οι οποίες ισχύουν στο $\mathbb{N}$, μεταφέρονται και στο $\mathbb{Z}$. Τα ίδια συμβαίνουν και για τις επεκτάσεις από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$ και από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$. Στην επέκταση, όμως, από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο $\mathbb{R}$ εξακολουθούν να ισχύουν και στο $\mathbb{C}$, εν τούτοις **η διάταξη και οι ιδιότητές της δεν μεταφέρονται**, δηλαδή οι έννοιες $>,\geq,<,\leq$ μεταξύ δυο μιγαδικών ή δυο φανταστικών, ή μεταξύ ενός μιγαδικού και ενός φανταστικού δεν έχουν νόημα.

- **Πρόσεξε** λοιπόν ότι αν ισχύει η σχέση $\alpha+\beta i \geq \gamma+\delta i$, αυτό θα σημαίνει ότι βρίσκεσαι στους πραγματικούς αριθμούς, οπότε: $\beta=\delta=0$ και $\alpha \geq \gamma$.
- Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και στις σχέσεις $\alpha+\beta i > \gamma+\delta i$, $\alpha+\beta i \leq \gamma+\delta i$, $\alpha+\beta i < \gamma+\delta i$.

Επίσης δεν υπάρχουν θετικοί ή αρνητικοί μιγαδικοί ή φανταστικοί αριθμοί.

- **Πρόσεξε** λοιπόν ότι αν ισχύει η σχέση $\alpha+\beta i \geq 0$, αυτό θα σημαίνει ότι βρίσκεσαι στους πραγματικούς αριθμούς, οπότε: $\beta=0$ και $\alpha \geq 0$.
- Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και στις σχέσεις $\alpha+\beta i > 0$, $\alpha+\beta i \leq 0$, $\alpha+\beta i < 0$.

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών



Κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha+\beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα, κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha+\beta i$. Το σημείο Μ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $\alpha+\beta i$. Αν θέσουμε $z=\alpha+\beta i$, τότε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$.

Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha,0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha=\alpha+0i$, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός** άξονας, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0,\beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i=0+\beta i$.

Ένας μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha,\beta)$.

Οι πράξεις στο σύνολο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών

Σύμφωνα με τον ορισμό του $\mathbb{C}$, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha+\beta x$ στο $\mathbb{R}$, όπου βέβαια αντί για x έχουμε το i. Έτσι:

● Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i.$$

Για παράδειγμα, $(3+4i)+(5-6i)=(3+5)+(4-6)i=8-2i$.

Για την πρόσθεση ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες:

1. Αντιμεταθετική, δηλαδή $z_1+z_2=z_2+z_1$, για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

2. Προσεταιριστική, δηλαδή $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, για κάθε $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$.

3. Έχει ουδέτερο στοιχείο το 0, δηλαδή $z+0=0+z=z$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

4. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός z' τέτοιος ώστε να ισχύει: $z+z'=z'+z=0$. Ο z' καλείται αντίθετος του z και συμβολίζεται με $-z$. Ισχύει λοιπόν ότι $z+(-z)=(-z)+z=0$.

   Αν $z=\alpha+\beta i$, τότε $-z=-\alpha-\beta i$, δηλαδή $\mathrm{Re}(-z)=-\mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(-z)=-\mathrm{Im}(z)$.

● Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i.$$

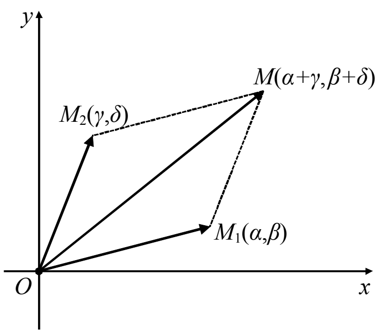
Δηλαδή $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$.

Για παράδειγμα $(3+4i)-(5-6i)=(3-5)+(4+6)i=-2+10i$.

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

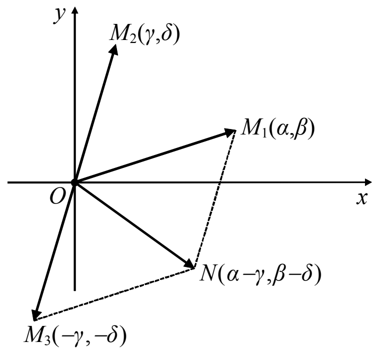
$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.



Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

"Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους".



Επίσης, η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

"Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους".

● Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=$$

$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i.$$

Δηλαδή, $\quad (\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$.

Για παράδειγμα,

$$(3+4i)\cdot(5-6i)=15-18i+20i-24i^2=(15+24)+(20-18)i=39+2i.$$

● Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή, $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$.

Για παράδειγμα: $\dfrac{2+i}{1-3i}=\dfrac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{2+6i+i+3i^2}{1+9}=\dfrac{-1+7i}{10}=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$.

Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή ορίζουμε:

$$z^1=z,\ z^2=z\cdot z,...,\ \text{και γενικά}\ z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z,$$

για κάθε θετικό ακέραιο ν, με $\nu>1$. Επίσης, αν $z\neq 0$, ορίζουμε

$$z^0=1,\qquad z^{-\nu}=\frac{1}{z^\nu}\qquad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } \nu.$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4 = i^2 i^2 = 1,\ i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i,\ i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1,\ i^7 = i^4 i^3 = 1 \cdot i^3 = -i,$$

δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^ν επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu = 4\rho + \upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^\upsilon = (i^4)^\rho i^\upsilon = 1^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } \upsilon = 0 \\ i & , \text{ αν } \upsilon = 1 \\ -1 & , \text{ αν } \upsilon = 2 \\ -i & , \text{ αν } \upsilon = 3 \end{cases}$$

Για παράδειγμα: $i^{14} = i^{3 \cdot 4+2} = i^2 = -1$, $\quad i^{19} = i^{4 \cdot 4+3} = i^3 = -i$

$$i^{16} = i^{4 \cdot 4+0} = i^0 = 1 \quad , \quad i^{21} = i^{4 \cdot 5+1} = i^1 = i.$$

Ο συζυγής ενός μιγάδα

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$. Τον μιγαδικό με το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό, δηλαδή τον $\alpha - \beta i$ τον λέμε **συζυγή** του $\alpha + \beta i$ και τον συμβολίζουμε $\bar{z} = \overline{\alpha + \beta i} = \alpha + \beta i$.

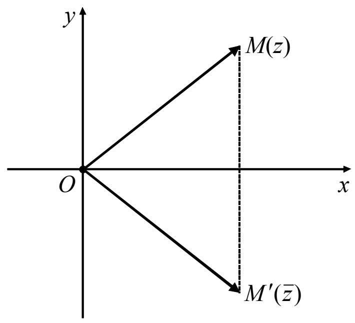
Ιδιότητες Συζυγών

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως σε αυτούς.

Ειδικότερα, έχουμε: $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$, δηλαδή $z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$.

Επειδή είναι και $\overline{\alpha - \beta i} = \alpha + \beta i$, οι $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

☛ **Πρόσεξε** ότι ισχύει η σχέση $z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$, $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$.
Επίσης ισχύει $\overline{\overline{z}} = z$



- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

- Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$z+\overline{z}=2\alpha=2\mathrm{Re}(z) \text{ και } z-\overline{z}=2\beta i=2\mathrm{Im}(z).$$

- Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1.	$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$
2.	$\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$
3.	$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$
4.	$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε: $\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}=$

$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\overline{z}_1+\overline{z}_2.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\cdots+\overline{z}_\nu \text{ και } \overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\cdot\ldots\cdot\overline{z}_\nu.$$

Αν είναι $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται: $\overline{(z^\nu)}=(\overline{z})^\nu$

Για παράδειγμα, $\overline{\left[\left(\dfrac{2-3i}{4+5i}\right)^3\right]}=\left[\overline{\left(\dfrac{2-3i}{4+5i}\right)}\right]^3=\left(\dfrac{2+3i}{4-5i}\right)^3.$

Μέθοδος

- **Να ξέρεις ότι** αν $z=\overline{z}$ τότε $z\in\mathbb{R}$ και αντίστροφα.
- **Να ξέρεις ότι** αν $z=-\overline{z}$ τότε $z\in\mathbb{I}$ και αντίστροφα

Απόδειξη

Έστω $z=\alpha+\beta i$, οπότε $\overline{z}=\alpha-\beta i$.

Αν $z=\bar{z} \Leftrightarrow \alpha+\beta i=\alpha-\beta i \Leftrightarrow 2\beta i=0 \Leftrightarrow \beta=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Αν $z=-\bar{z} \Leftrightarrow \alpha+\beta i=-(\alpha-\beta i) \Leftrightarrow \alpha+\beta i=-\alpha+\beta i \Leftrightarrow 2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{I}$.

Επίλυση της Εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$

Επειδή $i^2=-1$ και $(-i)^2=i^2=-1$, η εξίσωση $x^2=-1$ έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1=i$ και $x_2=-i$. Ομοίως, η εξίσωση $x^2=-4$ έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $x_1=2i$ και $x_2=-2i$, αφού $z^2=-4 \Leftrightarrow z^2=i^2\cdot 4 \Leftrightarrow z^2=(2i)^2 \Leftrightarrow z=2i$ ή $z=-2i$.
Εύκολα, όμως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο **C**. Πράγματι, έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.
Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή: $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης.

Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\frac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=\frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται: $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$. Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $z^2-5z+6=0$ έχει $\Delta=25-24=1>0$ και οι λύσεις της είναι: $z_1=\frac{5+1}{2}=3$, $z_2=\frac{5-1}{2}=2$. Όμως, η εξίσωση $z^2-2z+2=0$ έχει $\Delta=4-8=-4<0$ και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί: $z_1=\frac{2+i\sqrt{4}}{2}=1+i$, $z_2=\frac{2-i\sqrt{4}}{2}=1-i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις: (Τύποι του Vietta)

$$z_1+z_2=\frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1z_2=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου ν να υπολογιστεί το άθροισμα $S = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^\nu$.

ΛΥΣΗ

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος ν και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο i και λόγο επίσης i. Επομένως, $S = i\dfrac{i^\nu - 1}{i-1}$, οπότε, λόγω της ισότητας $\nu = 4\rho + \upsilon$ της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\upsilon = 0$. Τότε $\nu = 4\rho$, οπότε $S = i\dfrac{1-1}{i-1} = 0$
- $\upsilon = 1$. Τότε $\nu = 4\rho + 1$, οπότε $S = i\dfrac{i-1}{i-1} = i$
- $\upsilon = 2$. Τότε $\nu = 4\rho + 2$, οπότε $S = i\dfrac{-i-1}{i-1} = \dfrac{-2i}{i-1} = \dfrac{-2i(i+1)}{-2} = i - 1$
- $\upsilon = 3$. Τότε $\nu = 4\rho + 3$, οπότε $S = i\dfrac{-i-1}{i-1} = \dfrac{1-i}{i-1} = -1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

ΛΥΣΗ

Αν $z = x + yi$, τότε: $\dfrac{z-1}{z-2i} = \dfrac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i} = \dfrac{(x^2 - x + y^2 - 2y) + i(2x + y - 2)}{x^2 + (y-2)^2}$

$$= \frac{x^2 - x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{2x + y - 2}{x^2 + (y-2)^2} i.$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $\dfrac{x^2 - x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $x^2 - x + y^2 - 2y = 0$ και $x^2 + (y-2)^2 \neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{και} \quad (x, y) \neq (0,2).$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $(0,2)$.

β) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}=0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $2x+y-2=0$ και $x^2+(y-2)^2\neq 0$.
Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $2x+y-2=0$, με εξαίρεση το σημείο $(0,2)$.

$2^{ος}$ Τρόπος
Για να ορίζεται το κλάσμα αρκεί $z-2i\neq 0 \Leftrightarrow z\neq 2i \Leftrightarrow x+yi\neq 0+2i$. Για να ισχύει αυτό αρκεί να μην ισχύει ταυτόχρονα ότι $x=0$ και $y=2$.

α) Για να είναι ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ φανταστικός αρκεί και πρέπει

$$\frac{z-1}{z-2i}=-\left(\overline{\frac{z-1}{z-2i}}\right)\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i}=-\left(\frac{\bar{z}-\bar{1}}{\bar{z}-\overline{2i}}\right)\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i}=-\left(\frac{\bar{z}-\bar{1}}{\bar{z}-\overline{2i}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{z-1}{z-2i}=-\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2i}\right)\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i}=\frac{-\bar{z}+1}{\bar{z}+2i}\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+2i)=(z-2i)(-\bar{z}+1)\Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+2zi-\bar{z}-2i=-z\bar{z}+z+2\bar{z}i-2i \Leftrightarrow 2z\bar{z}-z-\bar{z}+2zi-2\bar{z}i=0\Leftrightarrow$$
$$2z\bar{z}-(z+\bar{z})+2i(z-\bar{z})=0\,(1).$$

Ξέρουμε ότι αν $z=x+yi$ τότε $z\bar{z}=x^2+y^2$, $z+\bar{z}=2x$ και $z-\bar{z}=2yi$, οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$2(x^2+y^2)-2x+2i2yi=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2x-4y=0$ και διαιρώντας και τα δυο μέλη δια του 2, έχουμε $x^2+y^2-x-2y=0$ που είναι εξίσωση του κύκλου $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Όμως το σημείο (0,2) επαληθεύει την εξίσωσή του διότι $\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+(2-1)^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$, οπότε πρέπει να το εξαιρέσουμε.

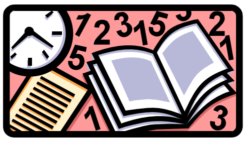
β) Για να είναι ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ πραγματικός αρκεί και πρέπει

$$\frac{z-1}{z-2i}=\left(\overline{\frac{z-1}{z-2i}}\right)\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i}=\left(\frac{\bar{z}-\bar{1}}{\bar{z}-\overline{2i}}\right)\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i}=\left(\frac{\bar{z}-\bar{1}}{\bar{z}-\overline{2i}}\right)\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2i}=\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2i}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{z-1}{z-2i}=\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2i}\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+2i)=(z-2i)(\bar{z}-1)\Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+2zi-\bar{z}-2i=z\bar{z}-z-2\bar{z}i+2i\Leftrightarrow z-\bar{z}+2zi+2\bar{z}i-4i=0\Leftrightarrow$$
$$(z-\bar{z})+2i(z+\bar{z})-4i=0\ (2).$$

Ξέρουμε ότι αν $z=x+yi$ τότε $z\bar{z}=x^2+y^2$, $z+\bar{z}=2x$ και $z-\bar{z}=2yi$, οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $2yi+2i2x-4i=0\Leftrightarrow 2i(y+2x-2)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0$. Όμως το σημείο (0,2) επαληθεύει την εξίσωση γιατί $2.0+2-2=0$, οπότε πρέπει να το εξαιρέσουμε.



Υποδειγματικά Λυμένες Ασκήσεις
Άλυτες Ασκήσεις

ΛΑ1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι:
α) πραγματικός αριθμός β) φανταστικός αριθμός.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Θα φέρουμε τον μιγαδικό αριθμό στην μορφή $z = \alpha + \beta i$, οπότε:
> για να είναι πραγματικός αρκεί $\beta = 0$ και για να είναι φανταστικός αρκεί $\alpha = 0$.

Έχουμε $z = 2\lambda - \lambda i + 6i - 3i^2 = 2\lambda + 6i - \lambda i + 3 = (2\lambda + 3) + (6 - \lambda)i$, οπότε:
α) πραγματικός αν και μόνο αν $6 - \lambda = 0$, δηλαδή $\lambda = 6$
β) φανταστικός αν και μόνο αν $2\lambda + 3 = 0$, δηλαδή $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

ΛΑ2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:
α) $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$
β) $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$
γ) $9 - 27i = (3x + 2y) - yi$.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι ίσοι τότε και μόνον τότε όταν α=γ και β=δ, οπότε θα εξισώσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη και θα επιλύσουμε το σύστημα που θα προκύψει.
> Πρόσεξε ότι η ισότητα δυο μιγαδικών αριθμών καταλήγει πάντα σε δυο ισότητες πραγματικών!

α) Είναι: $(x + y) + (x - y)i = 3 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1,2)$

β) Είναι: $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x - 6 \geq 0 & (1) \\ \sqrt{3x^2 + x - 6} = 2 & (2) \\ x^2 - 3 = 1 & (3) \end{cases}$

Όμως η (3) $\Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$.

Άρα $x = -2$, αφού μόνο αυτή επαληθεύει τις (1) και (2).

γ) Είναι: $9-27i=(3x+2y)-yi \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=9\\27=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{9-2y}{3}\\y=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{9-54}{3}\\y=27\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-45}{3}=-15\\y=27\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-15,27)$$

Ασκήσεις προς λύση

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $x - 2 + 2yi = - 2i + 2 - yi$ β) $y + 2i = 3 - (2 + i)\,x$

γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$ δ) $(x^2 + 1)\,i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2i$, $x, y \in R$.

α) Να βρείτε τους x, y ώστε z = w, β) Να βρείτε τον z.

3. Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)\,x - 3yi - (3i - 2)\,x + (4 - 2yi)$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή α + βi.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) Re (z) = 0 ii) Im (z) = 0

iii) Re (z) = Im (z) iv) z = 0

4. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)\,x + (y - 1)\,i - 5$, $x, y \in R$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή α + βi.

β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x, αν Im (z) = 0.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Re (z) = Im (z).

5. Η ισότητα $x + (y - 1)\,i = 3 + 4i$ ισχύει αν και μόνο αν

Α. x = 3 ή y = 5 **Β.** x = 3 και y = 4

Γ. x = 3 ή y = 4 **Δ.** x = 3 και y = 5 **Ε.** x + y = 7

6. Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = (x + 1) + (y - 1)\,i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + yi$ ισούται με

Α. 1 - i **Β.** 1 + i **Γ.** - 1 - i **Δ.** - 1 + i **Ε.** 2 + 2i

ΛΑ3. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.

β) Το φανταστικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.

γ) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.

Λύση

Υπόδειξη

Μάθε τους πρώτους απλούς γεωμετρικούς τόπους!

Κάνε επανάληψη και μάθε τις εξισώσεις: ευθείας, κύκλου, έλλειψης, παραβολής, υπερβολής γιατί θα σου χρειασθούν στη συνέχεια!

α) Αν $z = x + yi$, τότε $x = 0$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $x = 0$, δηλαδή τα σημεία $M(0, y)$, οπότε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z με πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν είναι τα σημεία του άξονα $y'y$.
β) Αν $z = x + yi$, τότε $y = 0$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = 0$, δηλαδή τα σημεία $M(x,0)$, οπότε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z με φανταστικό μέρος ίσο με το μηδέν είναι τα σημεία του άξονα x''.

Είναι $z = x + 0i$. Άρα, οι εικόνες του είναι τα σημεία $M(x,0)$, δηλαδή τα σημεία του άξονα $x'x$.

γ) Αν $z = x + yi$, τότε $x = y$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = x$, δηλαδή τα σημεία $M(x, x)$, οπότε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z με πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό είναι τα σημεία της ευθείας που είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Ασκήσεις προς λύση

1. Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

Α. y = x **Β.** y = - x **Γ.** y = 0

Δ. x = 0 **Ε.** σε καμία από τις προηγούμενες.

2. Οι εικόνες των μιγαδικών 2 + 3i και 3 + 2i στο μιγαδικό επίπεδο έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία

Α. x = 2 **Β.** y = 3 **Γ.** y = x **Δ.** y = - x **Ε.** x = 0

3. Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο έχει φορέα τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο z μπορεί να είναι ο

Α. 2 + i **Β.** - 2 + 2i **Γ.** 2 + 2i **Δ.** - 2 - 2i **Ε.** - 2 - i

4. Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας 2x + 3y - 1 = 0, τότε ο z **δεν** μπορεί να είναι ο

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $1 - \frac{1}{3}i$ **Γ.** 5 - 3i **Δ.** $\frac{1}{3}i$ **Ε.** 1 + 2i

ΛΑ4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha + \beta i$

α) $(-4 + 6i) + (7 - 2i)$ β) $(3 - 2i) - (6 + 4i)$

γ) $(3 + 4i) + (-8 - 7i) + (5 + 3i)$ δ) $(3 + 2i)(4 + 5i)$

ε) $3i(6 + i)$ στ) $(4 + 3i)(4 - 3i)$

ζ) $i(3 + i)(2 - i)$.

Λύση

Υπόδειξη
Ας μάθουμε να κάνουμε απλές πράξεις με μιγαδικούς!

α) $(-4+6i)+(7-2i)=(-4+7)+(6-2)i=3+4i$

β) $(3-2i)-(6+4i)=(3-6)+(-2-4)i=-3-6i$

γ) $(3+4i)+(-8-7i)+(5+3i)=(3-8+5)+(4-7+3)i=0+0i=0$

δ) $(3+2i)(4+5i)=3\cdot 4+3\cdot 5i+4\cdot 2i+2\cdot 5i^2=12-10+15i+8i=2+23i$

ε) $3i(6+i)=3\cdot 6i+3i^2=-3+18i$

στ) $(4+3i)(4-3i)=4^2-(3i)^2=16-9\cdot i^2=16-9(-1)=16+9=25$

ζ) $i(3+i)(2-i)=i(6-3i+2i-i^2)=i(6+1-i)=7i-i^2=1+7i$.

ΛΑ5. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $\alpha+\beta i$:

α) $\frac{1}{1-i}$ β) i^6 γ) $(i+1)^2$ δ) $(1+i\sqrt{3})^2$ ε) $\frac{3+i}{2-i}$ στ) $\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$.

Λύση

Υπόδειξη
Ας κάνουμε και άλλες πράξεις!

α) $\frac{1}{1-i}=\frac{1(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

β) $i^6=i^4\cdot i^2=1(-1)=-1=-1+0i$

γ) $(i+1)^2=i^2+2i+1=-1+2i+1=0+2i$

δ) $(1+i\sqrt{3})^2=1+2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3=1-3+2\sqrt{3}i=-2+2\sqrt{3}i$

ε) $\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)\cdot(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+i^2+5i}{2^2-i^2}=\frac{5+5i}{4+1}=\frac{5(1+i)}{5}=1+i$

στ) $\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}=\frac{(6-i\sqrt{2})\cdot(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})\cdot(1-i\sqrt{2})}=\frac{6+2i^2-7\sqrt{2}i}{1-2i^2}=\frac{6-2-7\sqrt{2}i}{1+2}=\frac{4}{3}-\frac{7}{3}\sqrt{2}i$.

ΛΑ6. Αν $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{1}{z^2-z}$.

Λύση

Υπόδειξη
Και άλλες πράξεις!

Έχουμε $z^2 = \dfrac{1+3-2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{2-i\sqrt{3}}{2}$, οπότε:

$z^2 - z = \dfrac{2-i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$. Άρα: $\dfrac{1}{z^2-z} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

ΛΑ7. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta i)^{10} + (\beta-\alpha i)^{10} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

Λύση

Υπόδειξη

Ας κάνουμε κάτι πιο δύσκολο!

Πρέπει να ξέρεις ότι:

- $\beta - \alpha i = -(-1)\beta - \alpha i = -i^2\beta - \alpha i = -i(\alpha+\beta i)$

Είναι $\beta - \alpha i = -i(\alpha+\beta i)$. Επομένως:

$(\alpha+\beta i)^{10} + (\beta-\alpha i)^{10} = (\alpha+\beta i)^{10} + i^{10}(\alpha+\beta i)^{10} = (\alpha+\beta i)^{10} - (\alpha+\beta i)^{10} = 0$.

Ασκήσεις προς λύση

1. Δίνονται οι μιγαδικοί

$z_1 = 1 + i$, $\quad z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}i$, $\quad z_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9}i$,

$z_4 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27}i$, $\quad z_5 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{54}i$, $+ \dots$

Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων $w = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + \dots$

2. Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $z_1 = \dfrac{5-2i}{1-2i}$ $\quad$ β) $z_2 = \dfrac{i-1}{i} - \dfrac{2}{(1-i)^2}$

3. Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i(-5i)$ $\quad$ β) $(2+i)(-i+3)$ $\quad$ γ) $\dfrac{3}{4i}$

δ) $\dfrac{1}{1-i}$ $\quad$ ε) $\dfrac{1-i}{-i+1}$ $\quad$ ζ) $\dfrac{(2+3i)(-i+1)}{1-2i}$

4. Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) (2 - 3i) (4 - 5i) + 7i - 1 β) $\frac{1-2i}{i+3}\cdot\frac{2i+1}{3i+1}$ γ) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

δ) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}$ ε) $(1-i)^{-3}$

ΛΑ8. Να βρείτε τους $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει:

α) $(3-2i)^2-(x+iy)=x-yi$, β) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+iy}=1+i$

γ) $(3-2i)(2x-iy)=2(2x-iy)+2i-1$.

Λύση

Υπόδειξη

Οι μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι ίσοι τότε και μόνον τότε όταν α=γ και β=δ, οπότε θα εξισώσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη και θα επιλύσουμε το σύστημα που θα προκύψει.
Πρόσεξε ότι η ισότητα δυο μιγαδικών αριθμών καταλήγει πάντα σε δυο ισότητες πραγματικών!

α) Είναι: $(3-2i)^2-(x+iy)=x-yi \Leftrightarrow 9-12i+4i^2-x-yi=x-yi$

$\Leftrightarrow 9-4-x-12i=x \Leftrightarrow (5-2x)-12i=0$.

Αυτή όμως είναι αδύνατη, αφού το $-12\neq 0$.

β) Είναι: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{1-1+2i}{1-1-2i}=-1$. Άρα η σχέση γράφεται:

$-1+\frac{1}{x+iy}=1+i \Leftrightarrow \frac{1}{x+iy}=2+i \Leftrightarrow x+yi=\frac{1}{2+i} \Leftrightarrow x+yi=\frac{2-i}{5} \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ και $y=\frac{-1}{5}$.

γ) Είναι: $(3-2i)(2x-iy)=2(2x-iy)+2i-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3-2i)(2x-iy)-2(2x-iy)=-1+2i \Leftrightarrow (1-2i)(2x-iy)=-(1-2i)$

$\Leftrightarrow 2x-iy=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ και $y=0$.

Ασκήσεις προς λύση

1. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\frac{12+8i}{2-3i}+\frac{52+13i}{13i}$ να είναι ίσοι.

2. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει: $(\alpha + \beta i)^2 = \dfrac{12+5i}{i}$.

3. Να υπολογιστεί το $x \in R$ ώστε να ισχύει: $1 + 2\sqrt{2}\, i = 3\,\dfrac{1+xi}{1-xi}$.

ΛΑ9. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$ β) $\dfrac{1}{i^{11}} - \dfrac{1}{i^{41}} + \dfrac{1}{i^{75}} - \dfrac{1}{i^{1023}}$.

Λύση

> **Υπόδειξη**
>
> Ας θυμηθούμε τις δυνάμεις του i.
>
> $$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & & i^4 = 1 \\ i^1 = i & & i^5 = i \\ i^2 = -1 & , & i^6 = -1 \\ i^3 = -i & & i^7 = -i \end{array}$$
>
> και γενικά $i^n = i^\upsilon$, όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του φυσικού αριθμού n δια του 4, οπότε $\upsilon = 0,1,2,3$.
>
> Επίσης $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = -i$, και γενικά $i^{-n} = \dfrac{1}{i^n} = \dfrac{1}{i^\upsilon}$.

α) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56} = i^2 + i^0 + i^2 + i^0 + i^2 + i^0 = 0$.

β) $\dfrac{1}{i^{11}} - \dfrac{1}{i^{41}} + \dfrac{1}{i^{75}} - \dfrac{1}{i^{1023}} = \dfrac{1}{i^3} - \dfrac{1}{i^1} + \dfrac{1}{i^3} - \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} - \dfrac{1}{i} = \dfrac{2}{-i} = 2i$.

ΛΑ10. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$.

Λύση

> **Υπόδειξη**
>
> Πρέπει να ξέρεις ότι:
>
> - $(1+i)^2 = 2i$, διότι $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.
> - $(1-i)^2 = -2i$, διότι $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$.

Είναι $(1+i)^{20} = \left((1+i)^2\right)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} i^{10} = 2^{10} i^2 = -2^{10}$,

$(1-i)^{20} = \left((1-i)^2\right)^{10} = (-2i)^{10} = (-2)^{10} i^{10} = 2^{10} i^2 = -2^{10}$.

Άρα $\quad (1+i)^{20}-(1-i)^{20}=-2^{10}-(-2^{10})=-2^{10}+2^{10}=0$.

ΛΑ11. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^{\nu}+i^{-\nu}$;

Λύση

Υπόδειξη

Θα διακρίνουμε σε τέτοιες ασκήσεις 4 περιπτώσεις για το φυσικό ν.

- 1^{η} περίπτωση να είναι της μορφής $\nu=4\kappa+0$, οπότε $i^{\nu}=i^{0}=1$.
- 2^{η} περίπτωση να είναι της μορφής $\nu=4\kappa+1$, οπότε $i^{\nu}=i^{1}=i$.
- 3^{η} περίπτωση να είναι της μορφής $\nu=4\kappa+2$, οπότε $i^{\nu}=i^{2}=-1$.
- 4^{η} περίπτωση να είναι της μορφής $\nu=4\kappa+3$, οπότε $i^{\nu}=i^{3}=-i$.

Έχουμε $\quad A=i^{\nu}+i^{-\nu}=i^{\nu}+\dfrac{1}{i^{\nu}}$. Επομένως:

- Αν $\nu=4\kappa$, τότε $i^{\nu}=1$, οπότε $A=1+1=2$
- Αν $\nu=4\kappa+1$, τότε $i^{\nu}=i$, οπότε $A=i+\dfrac{1}{i}=i-i=0$
- Αν $\nu=4\kappa+2$, τότε $i^{\nu}=-1$, οπότε $A=-1-1=-2$
- Αν $\nu=4\kappa+3$, τότε $i^{\nu}=-i$, οπότε $A=-i+\dfrac{1}{-i}=-i+i=0$.

Ασκήσεις προς λύση

1. Αν $i^2 = -1$ και $\left[(i^2)^3\right]^{\kappa} = 1$, τότε η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ είναι

Α. 1 **Β.** 3 **Γ.** 6 **Δ.** 2 **Ε.** 5

2. Αν $\nu \in N$, από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι σωστή η

Α. $i^{4\nu} = 1$ **Β.** $i^{4\nu+1} = -i$ **Γ.** $i^{4\nu+2} = -1$ **Δ.** $i^{\nu+4} = i^{\nu}$ **Ε.** $i^{4\nu+3} = -i$

3. Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$f(\nu)=\frac{1-i^{\nu+1}}{1-i}.$$

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει $(1+i)^{20\nu}=(1-i)^{20\nu}$.

ΛΑ12. Ποιος είναι ο $\bar{z}$, όταν:

α) $z=-5+7i$, β) $z=-4-9i$,
γ) $z=4i$, δ) $z=11$,
ε) $z=-i$, στ) $z=0$.

Λύση

Υπόδειξη

Ας θυμηθούμε ότι

- Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ είναι ο $\bar{z}=\alpha-\beta i$.
- $\bar{\bar{z}}=z$.
- Αν $z\in\mathbb{R}$ τότε $\bar{z}=z$ και αντίστροφα.
- Αν $z\in\mathbb{I}$ τότε $\bar{z}=-z$ και αντίστροφα.
- Οι εικόνες δυο συζυγών μιγάδων στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των $x'x$.

α) Για $z=-5+7i$ είναι $\bar{z}=-5-7i$, β) Για $z=-4-9i$ είναι $\bar{z}=-4+9i$

γ) Για $z=4i$ είναι $\bar{z}=-4i$, δ) Για $z=11$ είναι $\bar{z}=11$

ε) Για $z=-i$ είναι $\bar{z}=i$, στ) Για $z=0$ είναι $\bar{z}=0$.

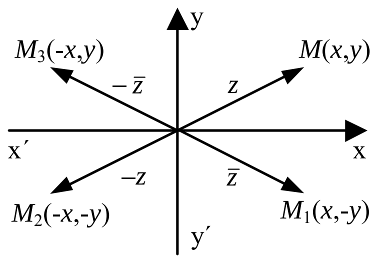
ΛΑ13. Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ οι εικόνες των μιγαδικών $\bar{z},\ -z$ και $-\bar{z}$;

Λύση

Υπόδειξη

Μάθε τις συμμετρίες που έχουν οι εικόνες των $z,\ -z,\ \bar{z},\ -\bar{z}$.

Αν $M(x,y)$ είναι η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του μιγαδικού $z=x+yi$, τότε η εικόνα του $\bar{z}=x-yi$ είναι το σημείο $M_1(x,-y)$, του $-z=-x-yi$ είναι το σημείο $M_2(-x,-y)$ και, τέλος, του $-\bar{z}=-x+yi$ είναι το σημείο $M_3(-x,y)$. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι:



Ο $\bar{z}$ προκύπτει από τον z με συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$.

Ο $-z$ προκύπτει από τον z με συμμετρία ως προς κέντρο το $O(0,0)$ και τέλος:

Ο $-\bar{z}$ προκύπτει από τον z με συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.

ΛΑ14. Αν $z_1=\dfrac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2=\dfrac{5+9i}{7-4i}$, να δείξετε ότι ο z_1+z_2 είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο z_1-z_2 φανταστικός αριθμός.

Λύση

Υπόδειξη

Ας θυμηθούμε ότι
- Αν $\overline{z} = z$ τότε $z \in \mathbb{R}$.
- Αν $\overline{z} = -z$ τότε $z \in \mathbb{I}$.

Είναι $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \frac{5+9i}{7-4i} + \frac{5-9i}{7+4i} = z_2 + z_1$, άρα $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός αριθμός .
Ομοίως $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{5+9i}{7-4i} - \frac{5-9i}{7+4i} = z_2 - z_1 = -(z_1 - z_2)$, άρα ο $z_1 - z_2$ είναι φανταστικός.

ΛΑ15. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

α) $z - \overline{z} = 6i$ β) $z^2 = \overline{z}^2$ γ) $\overline{z}^2 = -z^2$ δ) $\overline{z} = 2 - z$

Λύση

Υπόδειξη

Να ξέρουμε ότι στους απλούς γεωμετρικούς τόπους θέτουμε $z = x + yi$ και αναζητούμε τη σχέση (συνήθως σχέση ισότητας) που συνδέει το x με το y.

Αν $z = x + yi$ τότε:

α) $z - \overline{z} = 6i \Leftrightarrow x + yi - x + yi = 6i \Leftrightarrow 2yi = 6i \Leftrightarrow yi = 3i \Leftrightarrow y = 3$.

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία της οριζόντιας ευθείας με εξίσωση $y = 3$.

β) $z^2 = \overline{z}^2 \Leftrightarrow (x + yi)^2 = (x - yi)^2 \Leftrightarrow (x + yi)^2 - (x - yi)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + yi + x - yi)(x + yi - x + yi) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot 2yi = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = 0$.

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία των δύο αξόνων $y'y$ και $x'x$.

γ) $\overline{z}^2 = -z^2 \Leftrightarrow (x - yi)^2 = -(x + yi)^2 \Leftrightarrow x^2 + (yi)^2 - 2xyi = -(x^2 + y^2 i^2 + 2xyi)$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -x^2 + y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία των διχοτόμων των τεσσάρων τεταρτημορίων.

δ) $z = 2 - \overline{z} \Leftrightarrow x + yi = 2 - (x - yi) \Leftrightarrow x + yi = (2 - x) + yi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x \\ y = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1, \quad y \in R \Leftrightarrow z = 1 + yi$.

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία της κατακόρυφης ευθείας $x = 1$.

ΛΑ16. Αν α, β, γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Ας θυμηθούμε ότι
> - Αν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\bar{z} = z$.

Αφού θέλουμε το $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ να είναι πραγματικός αριθμός θα είναι και

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \overline{\left(\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}\right)} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{\alpha-\beta i}{\gamma-\delta i} \Leftrightarrow \alpha\gamma - \alpha\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta i^2 = \alpha\gamma + \alpha\delta i - \beta\gamma i - \beta\delta i^2 \Leftrightarrow$$

$$2\beta\gamma i = 2\alpha\delta i \Leftrightarrow \beta\gamma = \alpha\delta$$

$2^{ος}$ Τρόπος

Έχουμε: $z = \dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \dfrac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \dfrac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$.

Άρα: $z \in R \Leftrightarrow \beta\gamma - \alpha\delta = 0 \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$.

ΛΑ17. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Ας θυμηθούμε ότι αν $\bar{z} = z$ τότε $z \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα.

$\overline{\left(\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{\bar{z}}} + \dfrac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{z} + \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}$, οπότε ο $\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός αφού ισούται με τον συζυγή του.

Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ότι $-2 \leq \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \dfrac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}} \leq 2.$

Αν $z = x + yi$, τότε θέλουμε να δείξουμε ότι

$$-2 \leq \frac{x^2 + (yi)^2 + 2xyi + x^2 + (yi)^2 - 2xyi}{x^2+y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \leq 2 \Leftrightarrow .$$

$$-1 \le \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \le 1 \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) \le x^2 - y^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} -x^2 - y^2 \le x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 \le x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 2x^2 \\ 0 \le 2y^2 \end{cases}$ που ισχύουν και οι δύο. Άρα ισχύει και η αρχική διπλή ανισότητα.

ΛΑ18. Αν $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 \cdot z_2 \ne -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι φανταστικός.

Λύση

Υπόδειξη
Ας θυμηθούμε για μια ακόμη φορά ότι αν $\overline{z} = z$ τότε $z \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{u} = u$ και $\overline{v} = -v$. Επειδή $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ θα είναι:

- $$\overline{u} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = u.$$

- $$\overline{v} = \frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{-(z_1 - z_2)}{1 + z_1 z_2} = -v.$$

Ασκήσεις προς λύση

1. Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha\beta \ne 0$ και $\overline{z}$ ο συζυγής του ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή;

Α. $z + \overline{z}$ πραγματικός αριθμός **Β.** $z - \overline{z}$ φανταστικός αριθμός

Γ. $z \cdot \overline{z}$ φανταστικός αριθμός **Δ.** $-\overline{\overline{z} \cdot z}$ πραγματικός αριθμός

Ε. $\overline{z + \overline{z}}$ πραγματικός αριθμός

2. Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά

Α. ως προς τον άξονα y΄y **Β.** ως προς τον άξονα x΄x

Γ. ως προς την ευθεία y = x **Δ.** ως προς την ευθεία y = - x

Ε. ως προς την αρχή των αξόνων

3. Να βρεθούν τα x, y $\in$ R ώστε οι μιγαδικοί:
$z_1 = x + 2y - i$ και $z_2 = 11 - (4x - y)\,i$ να είναι συζυγείς.

4. Αν z φανταστικός αριθμός με $z \neq -i$ δείξτε ότι ο αριθμός $\omega = \dfrac{z^3 - i}{z + i}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.

5. Αν οι εικόνες δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι στο ίδιο τεταρτημόριο, ποια από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει;

Α. $z_1 = -z_2$ **Β.** $z_1 = \bar{z}_2$ **Γ.** $z_1 = -\bar{z}_2$

Δ. $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = 0$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

6. Να δείξετε ότι αν $\omega = \dfrac{z}{z+i}$ και $\omega \in R$ τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός.

ΛΑ19. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ β) $x^2 - 2x + 3 = 0$ γ) $x + \dfrac{1}{x} = 1$.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Να ξέρουμε ότι τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές τις λύνουμε κατά τον γνωστό τρόπο.
> Αν αυτή έχει ρίζες μιγαδικές τότε οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικοί.
> Υπενθυμίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού υπάρχει στο $\mathbb{C}$.
> Για παράδειγμα $\sqrt{-16} = \sqrt{i^2 16} = \sqrt{(4i)^2} = \pm 4i$.

α) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$.

β) $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{i^2 4.2}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} =$

$\dfrac{2(1 \pm i\sqrt{2})}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$.

γ) Είναι $x \neq 0$ και έχουμε:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

ΛΑ20. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in R$, είναι $3 + 2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Να ξέρουμε ότι για τις ρίζες ρ_1, ρ_2 μιας δευτεροβάθμιες εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, ισχύουν οι τύποι του Vietta:
> $\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Αφού οι συντελεστές της εξίσωσης $2x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και μία ρίζα της είναι η $3+2i$, η άλλη θα είναι η $3-2i$, οπότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{\beta}{2} \\ x_1x_2=\frac{\gamma}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=-\frac{\beta}{2} \\ 13=\frac{\gamma}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-12 \\ \gamma=26\end{cases}.$$

Ασκήσεις προς λύση

1. Η εξίσωση z^2 - 6z + λ = 0, λ ∈ R, μπορεί να έχει ρίζα τον αριθμό

Α. i **Β.** 1 - i **Γ.** 1 + i **Δ.** 2 - i **Ε.** 3 + i

2. Η εξίσωση x^2 + αx + 5 = 0, α ∈ R μπορεί να έχει ρίζα τον

Α. - 3 + i **Β.** 2 - i **Γ.** 1 - i **Δ.** 3 - i **Ε.** - 3 - i

3. Αν η εξίσωση z^2 - κz + λ = 0, κ, λ ∈ Z έχει ρίζα τον 2 + i τότε ισχύει

Α. κ = 6 και λ = 5 **Β.** κ = 4 και λ = 1 **Γ.** κ = 3 και λ = 4

Δ. κ = 4 και λ = 5 **Ε.** κ = 5 και λ = 4

4. Η εξίσωση z^2 + αz + β =0, α, β ∈ R έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό 2 - i.

α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β.

ΛΑ21. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\overline{z}=z^2$, β) $\overline{z}=z^3$.

Λύση

> **Υπόδειξη**
> Πρέπει να ξέρεις ότι τις απλές εξισώσεις και ανισώσεις τις λύνουμε θέτοντας $z=x+yi$, οπότε καταλήγουμε σε σύστημα 2 εξισώσεων με δυο αγνώστους τους x, y το οποίο αφού το επιλύσουμε βρίσκουμε τα x, y, άρα τον z.

α) Αν $z=x+yi$ τότε έχουμε:

$$\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow x - yi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow x - yi = x^2 + (yi)^2 + 2xyi \Leftrightarrow x - yi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - x) + (2x + 1)yi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)y = 0 \\ x^2 - y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \ \text{ ή } \ y = 0 & (1) \\ x^2 - y^2 - x = 0 & (2) \end{cases}$$

- Αν $2x + 1 = 0$, δηλαδή αν $x = -\frac{1}{2}$, τότε η (2) γράφεται:

$\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα: $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ή $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- Αν $y = 0$, τότε η (2) γράφεται: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

  Άρα: $z = 0$ ή $z = 1$.

β) Αν $z = x + yi$, έχουμε: $\bar{z} = z^3 \Leftrightarrow x - yi = (x + yi)^3 \Leftrightarrow$

$$x - yi = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 \Leftrightarrow x - yi = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$$

$$\Leftrightarrow x - yi = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2 - y^2)yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ (3x^2 - y^2)y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0 \\ y(3x^2 - y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 3y^2 - 1 = 0 & (1) \\ y(3x^2 - y^2 + 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

- Αν $x = 0$, τότε η (2) γράφεται: $y(1 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = \pm 1$.

  Άρα: $z = 0$ ή $z = i$ ή $z = -i$.

- Αν $x^2 = 3y^2 + 1$, τότε η (2) γράφεται:

  $y[3(3y^2 + 1) - y^2 + 1] \Leftrightarrow y(8y^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Άρα $x^2 = 1$,

  οπότε $x = 1$ ή $x = -1$ και επομένως $z = 1$ ή $z = -1$.

Ασκήσεις προς λύση

1. α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα

$z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$.

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την ισότητα $\bar{z} = -z^2$.

2. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει:

$z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

ΛΑ22. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: α) $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=5\,\mathrm{Re}(z)$ β) $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=-3\,\mathrm{Im}(z)$.

Λύση

Υπόδειξη

- Να ξέρουμε ότι στους απλούς γεωμετρικούς τόπους θέτουμε $z=x+yi$ και αναζητούμε τη σχέση (συνήθως σχέση ισότητας) που συνδέει το x με το y.
- Κάνε ακόμα μια φορά επανάληψη και μάθε τις εξισώσεις: ευθείας, κύκλου, έλλειψης, παραβολής, υπερβολής γιατί θα σου χρειασθούν στη συνέχεια!

α) Έστω $z=x+yi$. Τότε $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$. Επομένως:

$\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=5\,\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow x+\frac{x}{x^2+y^2}=5x\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-4\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\frac{1}{x^2+y^2}=4\Leftrightarrow x=0$ ή $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $y'y$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ ή ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}$.

β) Έχουμε: $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=-3\,\mathrm{Im}(z)\Leftrightarrow y-\frac{y}{x^2+y^2}=-3y\Leftrightarrow 4y-\frac{y}{x^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow y\left(4-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\Leftrightarrow y=0$ ή $\frac{1}{x^2+y^2}=4\Leftrightarrow y=0$ ή $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $x'x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ ή κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}$.

Ασκήσεις προς λύση

1. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε στη μορφή α + βi τον μιγαδικό $w=\frac{z+8i}{z+6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Im (w) = 0.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Re (w) = 0.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

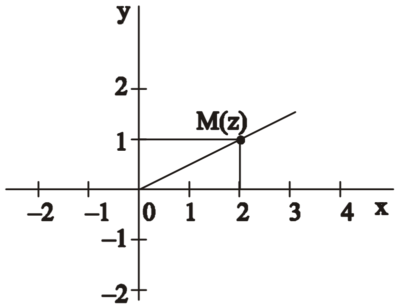
ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.

α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β.

3. Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \lambda + (\lambda - 1)i$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = 4x + 1$, να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

4. Να συμπληρώσετε το διπλανό σχήμα με το σημείο $M_1(2z)$. Μετά να βρείτε τα σημεία $M_2(2\overline{z})$, $M_3(-2z)$ και $M_4(-2\overline{z})$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $M_1M_2M_3M_4$.



5. Ο μιγαδικός $z = 2 + i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 που οι εικόνες τους βρίσκονται αντίστοιχα στις ευθείες $y = x - 2$ και $y = 2x - 1$.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Αν $z = \alpha + \beta i$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί στην ίση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. $\overline{\overline{z}}$	**1.** 2α
Β. $z + \overline{z}$	**2.** $\alpha^2 + \beta^2$
Γ. $z - \overline{z}$	**3.** $\alpha + \beta i$
Δ. $z\overline{z}$	**4.** $\alpha - \beta i$
	5. $2\beta i$
	6. $2\alpha + i$

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχέση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z	***γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. το πραγματικό μέρος του z είναι 2 **Β.** το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του **Γ.** το πραγματικό μέρος του z είναι αντίθετο του φανταστικού μέρους του	**1.** ο άξονας x΄x **2.** η ευθεία y = x **3.** η ευθεία y = - x **4.** η ευθεία x = 2 **5.** η ευθεία y = - 2

Α	**Β**	**Γ**

3. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο Μ ($\frac{1}{2}$, 1), να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
μιγαδικός αριθμός	***σημείο στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. $\frac{1}{\bar{z}}$ **Β.** $-\bar{z}$ **Γ.** iz	**1.** $(-\frac{1}{2}, 1)$ **2.** $(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ **3.** $(\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$

	4. $(-1, \frac{1}{2})$ **5.** $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

Α	**Β**	**Γ**

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε δύναμη του i που υπάρχει στη στήλη Α να αντιστοιχεί στην τιμή της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
δύναμη του i	
Α. i^{13} **Β.** i^{14} **Γ.** i^{15} **Δ.** i^{0}	**1.** - i **2.** i **3.** - 1 **4.** 0 **5.** 1 **6.** 2i

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

5. Αν $z = x + yi$, $x, y \neq 0$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός, διάφορος του μηδενός, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z	***γεωμετρικός τόπος του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. Re (z) = c	**1.** $y = x + c$
Β. Im (z) = c	**2.** $y = \frac{c}{x}$
Γ. Re (z) · Im (z) = c	**3.** $y = c$
	4. $c \cdot x + y = 0$
	5. $x = c$

Α	**Β**	**Γ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$ και $z = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.	**Σ**	**Λ**
2. Αν $z = \alpha + \beta i$ και $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} i$.	**Σ**	**Λ**
3. Αν $z = \kappa + \lambda i$ $\kappa, \lambda \in R$, τότε Re (z) = κ.	**Σ**	**Λ**
4. Αν $z = x + (y - 1)i$ και Im (z) = 0, τότε y = 1.	**Σ**	**Λ**
5. Αν $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1 + z_2) = 0$, τότε $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$.	**Σ**	**Λ**
6. Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα y΄y.	**Σ**	**Λ**
7. Αν $i^2 = -1$ τότε $i^{2003} = i$.	**Σ**	**Λ**
8. Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.	**Σ**	**Λ**
9. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζεται $z^{\circ} = 1$.	**Σ**	**Λ**
10. Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας x΄x είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2, τότε είναι $z_1 = \overline{z}_2$.	**Σ**	**Λ**
11. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 \in C$, και $z_1 + z_2 = 2\alpha$, τότε $z_2 = \overline{z}_1$.	**Σ**	**Λ**
12. Αν Re(z)=2 τότε οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στην ευθεία x = 2.	**Σ**	**Λ**

13. Αν Im (z + i) = 8 τότε οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία y = 8. **Σ** **Λ**

14. Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζες τους μιγαδικούς 1 + i και 1 - i. **Σ** **Λ**

15. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, α, β, γ ∈ R έχει ρίζα τον 2 + i θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$. **Σ** **Λ**

16. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, α, β, γ, $\in R^*$ έχει πάντοτε λύση στο C. **Σ** **Λ**

17. Αν Re $(z_1z_2) = 0$ τότε ισχύει πάντα Re $(z_1) \cdot$ Re $(z_2) = 0$. **Σ** **Λ**

Επιλεγμένα Θέματα

1. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z ώστε να ισχύουν:

α) $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{R}$.

β) $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{I}$.

2. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί να βρεθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο αριθμός $z = \frac{z_1 - \overline{z_1} z_2}{1 - z_2}$ να είναι πραγματικός.

3. Αν $x + yi = \frac{1}{2 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$, όπου $x, y, \theta \in \mathbb{R}$, να βρεθούν τα x, y συναρτήσει του θ και να δειχθεί ότι $(3x-2)^2 + 9y^2 = 1$.

4. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $w \neq 0$, να δειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{z}{\overline{w}} + \frac{\overline{z}}{w} \in \mathbb{R}$.

5. Να λυθεί η εξίσωση $z^3 + iz^2 + iz - 2i - 1 = 0$, αν γνωρίζουμε ότι έχει μια ρίζα πραγματική.

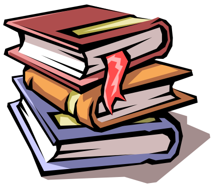
6. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

7. Να δειχθεί ότι αν οι συζυγείς μιγαδικοί $w = x + yi$ και $\overline{w} = x - yi$ είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, τότε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $z = (1+i)^\nu - (1-i)^\nu$, είναι πραγματικός για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

9. Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)i = \delta + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

10. Αν $x + yi = \frac{\alpha}{\beta + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$, με $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}^*$ και $\theta \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $(\beta^2 - 1)(x^2 + y^2) + \alpha^2 = 2\alpha\beta x$.



*Μάθημα 2^ον^*

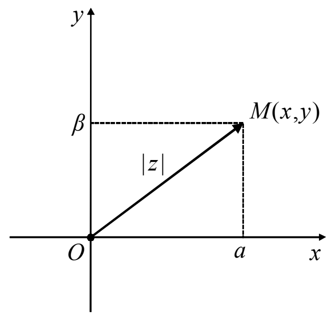
ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z και συμβολίζουμε $|z|$, τον μη αρνητικό αριθμό $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0}$.

? ***Τι εκφράζει γεωμετρικά το μέτρο ενός μιγαδικού;***

Αν $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το μέτρο εκφράζει το μήκος της διανυσματικής ακτίνας $\overrightarrow{OM}$ του σημείου Μ, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων, οπότε $\boxed{|\overrightarrow{OM}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0}$.



Για παράδειγμα, $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

- Όταν ο μιγαδικός z είναι πραγματικός, δηλαδή είναι της μορφής $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$, τότε $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x.
- Όταν ο μιγαδικός z είναι φανταστικός, δηλαδή είναι της μορφής $z = 0 + yi = y \in \mathbb{R}$, τότε $|z| = \sqrt{0^2 + y^2} = |y|$.

☛ **Πρόσεξε!** ότι αν $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$, δηλαδή αν δυο μιγαδικοί είναι ίσοι τότε και τα μέτρα τους θα είναι ίσα.

☛ **Πρόσεξε!** ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν δυο μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα, τότε δεν είναι κατ' ανάγκη ίσοι.

Αυτό σημαίνει ότι:

- από ισότητα μιγάδων περνάμε άφοβα σε ισότητα μέτρων,
- από ισότητα μέτρων δεν περνάμε σε ισότητα μιγάδων!

Ξέρουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $|x| = \rho$, με $\rho > 0$, έχει λύση $x = \rho$ ή $x = -\rho$.

Πρόσεξε! τώρα το εξής:

Στο σύνολο των μιγαδικών η αντίστοιχη εξίσωση $|z| = \rho$, με $\rho > 0$, έχει για λύση όλους τους μιγαδικούς αριθμούς των οποίων οι εικόνες βρίσκονται πάνω στο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα τον θετικό αριθμό ρ, δηλαδή η εξίσωση $|z| = \rho$ με $\rho > 0$, είναι εξίσωση γεωμετρικού τόπου και μάλιστα κύκλου!

Απόδειξη

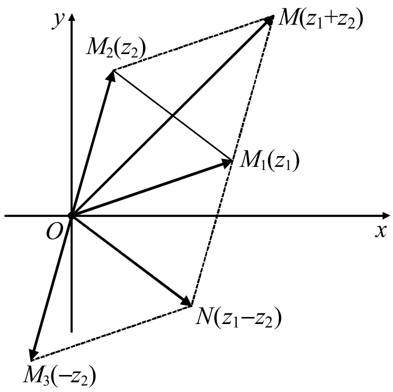
1ος τρόπος (αλγεβρικός): $|z| = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$.

2ος τρόπος (γεωμετρικός): $|z| = \rho \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = \rho$, οπότε αφού η εικόνα Μ του μιγαδικού z απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ρ, συμπεραίνουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ είναι ο κύκλος κέντρου O και ακτίνας $\rho > 0$.

? ***Ποιες ιδιότητες έχει το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού;***

1. $\boxed{|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|}$,
2. $\boxed{|z|^2 = z \cdot \bar{z}}$,
3. $\boxed{|z| \geq 0}$,
4. $\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$,
5. $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$,
6. $\boxed{|z_1 z_2 \dots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_\nu|}$,
7. $\boxed{|z^\nu| = |z|^\nu}$

Επίσης, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:



$$\boxed{||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

Είναι $|\overrightarrow{OM}| = (OM) = |z_1 + z_2|$ και

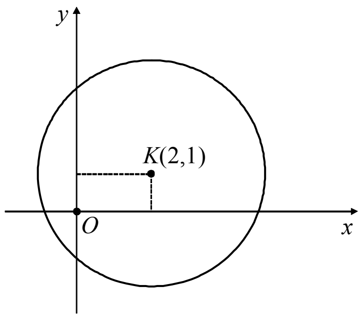
$$|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{M_2M_1}|=(M_1M_2)=|z_1-z_2|$$

Σχόλιο: *Μάθε τα ακόλουθα πάρα πολύ καλά!!!*

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:

> **1. "Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους"**, δηλαδή: $\boxed{(M_1M_2)=|z_1-z_2|}$

Έστω η εξίσωση $|z-(2+i)|=3$ (1). Αν καλέσουμε Μ την εικόνα του z και Κ την εικόνα του $2+i$, τότε η σχέση (1) παίρνει τη μορφή (ΜΚ)=3, που σημαίνει ότι η εικόνα Μ του z απέχει από το σημείο Κ σταθερή απόσταση ίση με 3, άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο Κ(2,1) και ακτίνα $\rho=3$.



> **2.** Γενικά, η εξίσωση: $|z-z_0|=\rho,\quad \rho>0$, παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

- Αν λοιπόν καλέσεις $z=x+yi$ και $z_0=\alpha+\beta i$, τότε η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$.
- Τον κύκλο αυτό μπορεί να τον βρίσκεις και αλγεβρικά ως εξής:

  $|z-z_0|=\rho \Leftrightarrow |(x+yi)-(\alpha+\beta i)|=\rho \Leftrightarrow |(x-\alpha)+(y-\beta)i|=\rho \Leftrightarrow$

  $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\rho \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$, που ως γνωστόν είναι εξίσωση του κύκλου με κέντρο Κ(α,β) και ακτίνας $\rho>0$.

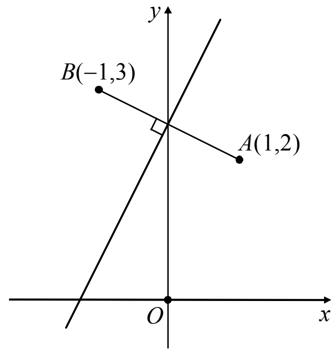
Πρόσεξε!

Αν σου δίνεται εξίσωση της μορφής $\boxed{|\lambda z-z_0|=\kappa,\quad \kappa>0}$ και $\lambda\neq 0$, τότε και αυτή είναι εξίσωση κύκλου, που θα την επεξεργάζεσαι ως εξής:

$|\lambda z-z_0|=\kappa \Leftrightarrow \left|\lambda(z-\frac{1}{\lambda}z_0\right|=\kappa \Leftrightarrow |\lambda|\left|z-\frac{1}{\lambda}z_0\right|=\kappa \Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{\lambda}z_0\right|=\frac{\kappa}{|\lambda|}$, η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο Κ που είναι η εικόνα του μιγαδικού $\frac{1}{\lambda}z_0$ και έχει ακτίνα $\rho=\frac{\kappa}{|\lambda|}$. Η αλγεβρική της εξίσωση είναι:

$\left(x-\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right)^2+\left(y-\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)\right)^2=\left(\frac{\kappa}{|\lambda|}\right)^2$, όπου $z=x+yi$ και $z_0=\alpha+\beta i$.

Έστω η εξίσωση $|z-(1+2i)|=|z-(-1+3i)|$ (2). Αν καλέσουμε Μ την εικόνα του z, Α την εικόνα του $1+2i$, Β την εικόνα του $-1+3i$,τότε η σχέση (2) παίρνει τη μορφή (ΜΑ)=(ΜΒ), που σημαίνει ότι η εικόνα Μ του z ισαπέχει από τα σημεία Α(1,2) και Β(-1,3), άρα η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.



3. Γενικά, η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$, εφόσον $z_1 \neq z_2$.

Την εξίσωση της μεσοκαθέτου θα την βρίσκουμε αλγεβρικά ως εξής:

Έστω $z=x+yi$, $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, έχουμε:

$$|z-z_1|=|z-z_2| \Leftrightarrow |(x+yi)-(\alpha+\beta i)|=|(x+yi)-(\gamma+\delta i)| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\sqrt{(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2} \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=x^2-2\gamma x+\gamma^2+y^2-2\delta y+\delta^2 \Leftrightarrow$$

$2(\gamma-\alpha)x+2(\delta-\beta)y=0 \Leftrightarrow (\gamma-\alpha)x+(\delta-\beta)y=0$ (3), η οποία εφόσον $z_1 \neq z_2$, θα είναι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $\gamma-\alpha$ και $\delta-\beta$ θα είναι διάφορος του μηδενός οπότε η (3) θα είναι εξίσωση ευθείας, δηλαδή η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $A(\alpha,\beta)$ και $B(\gamma,\delta)$.

☛ **Πρόσεξε!**

Αν σου δίνεται εξίσωση της μορφής $\boxed{|\lambda z-z_1|=|\lambda z-z_2|}$ και $\lambda \neq 0$, τότε και αυτή είναι εξίσωση μεσοκαθέτου, την οποία την βρίσκεις ως εξής:

$|\lambda z-z_1|=|\lambda z-z_2| \Leftrightarrow |\lambda|\left|z-\frac{1}{\lambda}z_1\right|=|\lambda|\left|z-\frac{1}{\lambda}z_2\right| \Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{\lambda}z_1\right|=\left|z-\frac{1}{\lambda}z_1\right|$, που είναι η εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος με άκρα τα σημεία $A\left(\frac{1}{\lambda}z_1\right)$ και $B\left(\frac{1}{\lambda}z_2\right)$.

☛ **Πρόσεξε!**

Τέλος η εξίσωση $\boxed{|\lambda z-z_1|=|\kappa z-z_2|}$ με $\kappa,\lambda \neq 0$ και $\kappa \neq \lambda$, είναι εξίσωση κύκλου (Απολλώνιος Κύκλος), την οποία θα την βρίσκεις μόνον αλγεβρικά!

4. Στις ασκήσεις που έχουν μέτρα και θέλουμε να απαλλαγούμε από αυτά, αφού εξασφαλίσουμε ότι και τα δυο μέλη είναι ομόσημα, υψώνουμε στο τετράγωνο (μέθοδος του τετραγωνισμού) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, για κάθε μέτρο μιγάδα που είναι υψωμένο στο τετράγωνο.

5. Όταν ένας μιγάδας έχει μέτρο $|z| = \kappa$, με $\kappa > 0$, να ξέρεις ότι: $|z| = \kappa \Leftrightarrow |z|^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = \kappa^2 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{\kappa^2}{z} = \kappa^2 \cdot z^{-1}$ ή $z = \dfrac{\kappa^2}{\overline{z}} = \kappa^2 \cdot (\overline{z})^{-1}$.

- Τη σχέση αυτή την χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να περάσουμε από μια σχέση που περιέχει τον $\overline{z}$ ή τον z^{-1} σε μια σχέση που περιέχει μόνο τον z.
- Συνήθως μας δίνεται ότι $|z| = 1$, οπότε: $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1^2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 1^2 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z} = z^{-1}$ ή $z = \dfrac{1}{\overline{z}} = (\overline{z})^{-1}$.

Πρόσεξε! μην κάνεις το λάθος και θεωρήσεις ότι, επειδή στους πραγματικούς ισχύει η σχέση $|x|^2 = x^2$, θα ισχύει και στους μιγαδικούς η αντίστοιχη σχέση $|z|^2 = z^2$, γιατί δεν ισχύει!

Θυμήσου ότι ισχύει $\boxed{|z|^2 = z \cdot \overline{z}}$.

Πρόσεξε!

6. Αν $|z|^2 = z^2$, τότε ο z είναι πραγματικός και αντίστροφα, ενώ αν $|z|^2 = -z^2$, τότε ο z είναι φανταστικός και αντίστροφα!

Απόδειξη

- Αν $|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = z^2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} - z^2 = 0 \Leftrightarrow z(\overline{z} - z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ \overline{z} = z \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- Αν $|z|^2 = -z^2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = -z^2 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} + z^2 = 0 \Leftrightarrow z(\overline{z} + z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ \overline{z} = -z \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$.

Έλεγχος των γνώσεων

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|-z| = |\bar{z}|$. **Σ** **Λ**

2. Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. **Σ** **Λ**

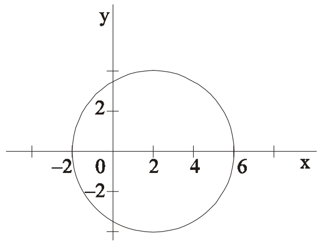
3. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z \in C$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία Α (z_1) και Β (z_2). **Σ** **Λ**

4. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει μόνο μια λύση. **Σ** **Λ**

5. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με κέντρο Κ (z_0) και ακτίνα ρ. **Σ** **Λ**

6. Στο μιγαδικό επίπεδο η εικόνα του μιγαδικού αριθμού 2 + 3i είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου $|z| = 4$. **Σ** **Λ**

7. Στο μιγαδικό επίπεδο του διπλανού σχήματος η εξίσωση του κύκλου είναι $|z - 2| = 4$. **Σ** **Λ**



Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν z = x + yi ποια από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι πάντα σωστή;

Α. $|z| = |\bar{z}|$ **Β.** $|z| = |-z|$ **Γ.** $|z|^2 = z^2$

Δ. $|z| = \sqrt{x^2 + (-y^2)}$ **Ε.** $|z^2| = |\bar{z}|^2$

2. Αν $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 + 3i$ τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ είναι

Α. 5 **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** 12 **Ε.** 14

3. Αν $|\bar{z}_1| = 2$ και $|-z_2| = 5$ τότε η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 10

4. Αν z = 3 + yi και $|z| = 5$, τότε μια τιμή του y είναι η

Α. 5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** - 4 **Δ.** $\sqrt{3}$ **Ε.** 3

5. Αν το σημείο Ρ (x, y) είναι εικόνα του μιγαδικού z = x + yi στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 3| = 5$, το Ρ βρίσκεται πάνω σε

Α. ευθεία **Β.** έλλειψη **Γ.** κύκλο

Δ. παραβολή **Ε.** υπερβολή

6. Η εξίσωση $|z - (1+2i)| = 4$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με

Α. κέντρο (- 1, 2) και ακτίνα 4 **Β.** κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 2
Γ. κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 4 **Δ.** κέντρο (1, 2) και ακτίνα 2
Ε. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 4

7. Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 10. Από τους παρακάτω αριθμούς έχει εικόνα πάνω στον κύκλο ο μιγαδικός αριθμός

Α. $z = \sqrt{2} + 3i$ **Β.** $z = \sqrt{3} + i\sqrt{7}$ **Γ.** $z = 2 - i\sqrt{8}$
Δ. $z = 8 + 6i$ **Ε.** $z = \sqrt{2} + i\sqrt{8}$

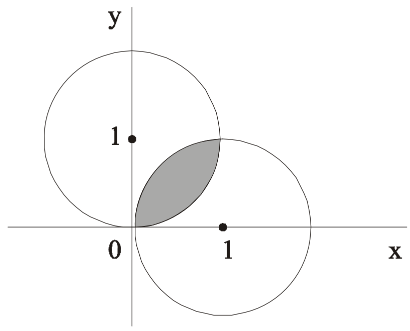
8. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 2| = |z - i|$ είναι

Α. ο άξονας y΄y
Β. η ευθεία y = x
Γ. ο άξονας x΄x
Δ. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, 1)
Ε. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 2) και (1, 0)

9. Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (2, 1) και ακτίνα 3 είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει

Α. $|z - (2 - i)| = 3$ **Β.** $|z - (1+2i)| = 3$
Γ. $|z - (2+i)| = 9$ **Δ.** $|z - (2+i)| = 3$ **Ε.** $|z + (2+i)| = 3$

10. Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



Α. $|z+1| < 1$ και $|z+i| < 1$
Β. $|z-1| < 1$ και $|z+i| < 1$
Γ. $|z-1| > 1$ και $|z-i| > 1$
Δ. $|z-1| < 1$ και $|z-i| < 1$ **Ε.** $|z+1| < 1$ και $|z-i| < 1$

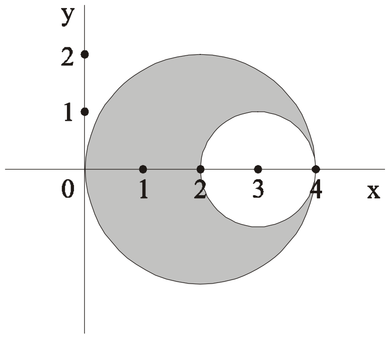
11. Αν η εξίσωση $|z-2| = |z-κi|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία y = x, ο πραγματικός αριθμός κ ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** 4

12. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$ με άγνωστο τον z είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 4 **Ε.** 0

13. Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



Α. $|z-2| < 2$ και $|z-3| < 1$

Β. $|z-2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Γ. $|z+2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Δ. $|z+2| < 2$ και $|z+3| > 1$ **Ε.** $|z-2| > 2$ και $|z-3| < 1$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Αν $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε στοιχείο της στήλης Α να αντιστοιχεί στο ίσο του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. $\left\|\frac{1}{z}\right\|$	**1.** **0**
	2. **1**
Β. $1 - \left\|z^{20}\right\|$	**3.** **2**
Γ. $\left\|\frac{(\bar{z})^{31}}{2\left\|-z^2\right\|}\right\|$	**4.** $\frac{1}{2}$
	5. **4**

Α	**Β**	**Γ**

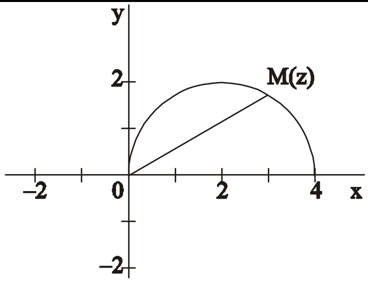
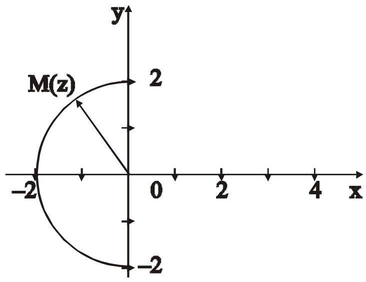
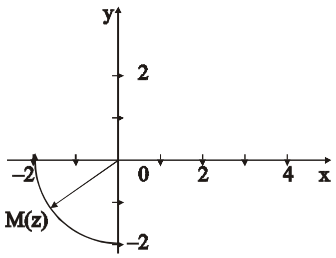
2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο της στήλης Α να αντιστοιχεί στη σχέση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο	***σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z***
Α. κύκλος κέντρου Κ (2, 1) και ακτίνας 3	**1.** $\|z+2+i\| = 3$
Β. μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0), (0, - 1)	**2.** $\|z\| = 3$
	3. $\|z-2-i\| = 3$
Γ. κύκλος κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 3	**4.** $\|z+2\| = \|z-i\|$

	5. $\lvert z-2 \rvert = \lvert z+i \rvert$

Α	**Β**	**Γ**

3. Στα σχήματα της στήλης Α φαίνονται τόξα κύκλων στα οποία βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

	Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α.		**1.** $\lvert z \rvert = 2$, Im (z) ≤ 0 και Re (z) ≤ 0
Β.		**2.** $\lvert z-2 \rvert = 2$ και Im (z) ≥ 0 **3.** $\lvert z \rvert = 2$ και Re (z) ≤ 0
Γ.		**4.** $\lvert z+2 \rvert = 2$ και Re (z) < 0

Α	**Β**	**Γ**

Υποδειγματικά Λυμένες Ασκήσεις
Άλυτες Ασκήσεις

Πρόσεξε να μάθεις να υπολογίζεις σωστά το μέτρο!

Αν $z = x + yi$, τότε $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$ και **όχι** $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + (yi)^2}}$!!!

Μελέτησε τις ασκήσεις ΛΑ1,ΛΑ2.

ΛΑ1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$1+i,\quad 1-i,\quad 3+4i,\quad 3-4i,\quad -5i,\quad -4,\ \frac{1+i}{1-i},$$

$$(1-i)^2\cdot(1+i)^4,\quad (2-i)\cdot(1+2i)\quad \text{και}\quad \frac{3+i}{4-3i}.$$

Λύση

Έχουμε:

- $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = |1-i|$, αφού $|z| = |\bar{z}|$
- $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 = |3-4i|$
- $|-5i| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-4| = 4$, $\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right| = \dfrac{|1+i|}{|1-i|} = 1$, αφού $|1+i| = |1-i|$
- $|(1-i)^2\cdot(1+i)^4| = |1-i|^2\cdot|1+i|^4 = \sqrt{2}^2\cdot\sqrt{2}^4 = 2\cdot 2^2 = 2^3 = 8$
- $|(2-i)\cdot(1+2i)| = |2-i|\cdot|1+2i| = \sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}^2 = 5$
- $\left|\dfrac{3+i}{4-3i}\right| = \dfrac{|3+i|}{|4-3i|} = \dfrac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

ΛΑ2. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$(1+i)^2,\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2,\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2,\ \left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2,\ \text{όπου } \lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ με } |\lambda|+|\mu|\neq 0.$$

Λύση

Έχουμε

- $|(1+i)^2| = |1+i|^2 = \sqrt{2}^2 = 2$
- $\left|\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right| = \left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|^2 = \left(\dfrac{|1+i|}{|1-i|}\right)^2 = 1^2 = 1$

- $\left|\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right| = \left|\dfrac{1-i}{1+i}\right|^2 = \left(\dfrac{|1-i|}{|1+i|}\right)^2 = 1^2 = 1$
- $\left|\left(\dfrac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2\right| = \left|\dfrac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right|^2 = \left(\dfrac{|\lambda+\mu i|}{|\lambda-\mu i|}\right)^2 = 1^2 = 1$

Ασκήσεις προς λύση

1. Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \dfrac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$

2. Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \left(\dfrac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

3. Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \varepsilon\varphi x - i$ β) $z = 1 - \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$.

4. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z, αν $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\alpha-\beta i} - \dfrac{1}{\alpha-\gamma i}$, όπου $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

Πρόσεξε να μάθεις να ερμηνεύεις αυτό που σου δίνεται!

ΛΑ3. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει:

α) $|z-1| = z$ β) $|z+i| = 2\bar{z}$.

Λύση

α΄ τρόπος:

α) Ας ερμηνεύσουμε τι μας δίνεται!

Το πρώτο μέλος της ισότητας είναι $|z-1| \geq 0$, άρα και το δεύτερο μέλος είναι πραγματικός αριθμός και μάλιστα μη αρνητικός, άρα $z = x$, $x \geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$|z-1| = z \Leftrightarrow |x-1| = x \Leftrightarrow x - 1 = x$ ή $x - 1 = -x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Άρα, $z = \dfrac{1}{2}$.

β) Ας ερμηνεύσουμε τι μας δίνεται!

Αν $|z+i| = 2\bar{z}$, τότε ο $2\bar{z}$ θα είναι μη αρνητικός πραγματικός. Επομένως θα είναι $z = x$, $x \geq 0$, $y = 0$, οπότε θα έχουμε: $|z+i| = 2\bar{z} \Leftrightarrow |x+i| = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x \Leftrightarrow$ $x^2 + 1 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, αφού $x \geq 0$. Άρα, $z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

β΄ τρόπος: Μιας και είναι απλές εξισώσεις ας θέσουμε $z = x + yi$, οπότε:

α) $|z-1|=z \Leftrightarrow |(x-1)+yi|=x+yi \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+yi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x-1|=x\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}.\\ y=0\end{cases} \text{ Άρα, } z=\frac{1}{2}.$$

β) Θέστε $z=x+yi$ και δουλέψτε κατά τα γνωστά.

Ασκήσεις προς λύση

1. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z=x+yi$ για τους οποίους ισχύει:
α) $|z-2|=2z+1$ β) $|z-3i|=-2\overline{z}$.

2. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z=x+yi$ για τους οποίους ισχύει:
α) $|3z|=5z+2$ β) $|z-3i|=(\overline{z})^2$.

> **Μάθε να ξεχωρίζεις και να ερμηνεύεις τις σχέσεις που περιέχουν μέτρα της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών, δηλαδή σχέσεις της μορφής $|z_1-z_2|=(AB)$, όπου Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2.**
>
> Μελέτησε πολύ καλά τις ασκήσεις ΛΑ4,ΛΑ5,ΛΑ6,ΛΑ7,ΛΑ8,ΛΑ9.

ΛΑ4. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:
α) $|z|=1$ β) $|z-i|=1$ γ) $|z+1+2i|=3$
δ) $1<|z|<2$ ε) $|z|\geq 2$.

Λύση

α) Αν $|z|=1$, τότε ο z θα απέχει από το $O(0,0)$ απόσταση ίση με 1. Άρα, ο z θα βρίσκεται σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ=1, ο οποίος έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$.

β) Αν $|z-i|=1$, ο z θα απέχει από τον μιγαδικό i (δηλαδή από το σημείο K(0,1)) απόσταση σταθερή ίση με 1. Άρα, ο z θα βρίσκεται σε κύκλο κέντρου K(0,1) και ακτίνας $\rho=1$, ο οποίος έχει εξίσωση: $x^2+(y-1)^2=1$.

γ) Ομοίως, αν $|z+1+2i|=3$, δηλαδή αν $|z-(-1-2i)|=3$, τότε ο z θα απέχει από τον μιγαδικό $-1-2i$ απόσταση ίση με 3. Άρα, ο z θα βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(-1,-2)$ και ακτίνας $\rho=3$, ο οποίος έχει εξίσωση $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

δ) Αν $1<|z|<2$, τότε ο z θα βρίσκεται μεταξύ των κύκλων με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνες $\rho_1=1$ και $\rho_2=2$.

ε) Αν $|z|\geq 2$, τότε ο z θα βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας ρ=2 ή πάνω στον κύκλο αυτό.

ΛΑ5. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z+1|=|z-2i|$ β) $|z-i|>|z+1|$

Λύση

α) Έχουμε $|z+1|=|z-2i| \Leftrightarrow |z-(-1)|=|z-2i|$. Άρα, οι αποστάσεις του μιγαδικού z από τους μιγαδικούς $-1+0i$ και $0+2i$, δηλαδή από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(0,2)$ είναι ίσες. Επομένως ο z θα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος AB.

β) Έχουμε $|z-i|>|z+1| \Leftrightarrow |z-i|>|z-(-1)|$. Επομένως, η απόσταση του μιγαδικού z από τον i, είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του από τον μιγαδικό $-1+0i$. Άρα ο z θα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του AB και από το σημείο B, όπου A και B τα σημεία με συντεταγμένες (0, 1) και $(-1, 0)$ αντιστοίχως.

Πρόσεξε να μάθεις καλά την τεχνική της ΛΑ6!!!

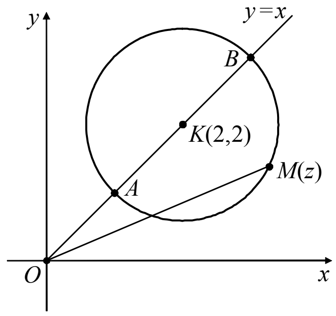
ΛΑ6. Αν για το μιγαδικό z ισχύει, $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$ να βρεθεί:

α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

Λύση

α) Η ισότητα $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο K(2,2) σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο K(2,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$, δηλαδή ο κύκλος $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.



β) Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας M(z) από την αρχή O(0,0), δηλαδή το μήκος OM. Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε $(OA) \le (OM) \le (OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Πρέπει λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας OK και να λύσουμε το σύστημα της ευθείας και του κύκλου $(x-2)^2+(y-2)^2=2$, για να βρούμε τα κοινά σημεία τους που είναι τα A, B.

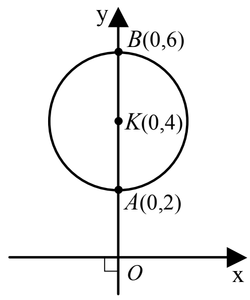
Η ευθεία OK θα έχει εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, όπου (x_0, y_0), ένα σημείο από το οποίο διέρχεται και λ ο συντελεστής διεύθυνσής της.

Ένα σημείο από το οποίο διέρχεται είναι το O(0,0), άρα $x_0=0$ και $y_0=0$. Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι ο $\lambda=\dfrac{y_K-y_O}{x_K-x_O}=\dfrac{2-0}{2-0}=1$, μιας και διέρχεται από τα σημεία O(0,0) και K(2,2), οπότε η εξίσωση της OK είναι: $y-0=\lambda(x-0) \Leftrightarrow y=\lambda x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=2\\ y=x\end{cases}$, που είναι τα ζεύγη $(1,1)$ και $(3,3)$. Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB)=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

ΛΑ7. Από τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει $|z-4i|=2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

Λύση

Από την ισότητα $|z-4i|=2$ προκύπτει ότι η απόσταση του $M(z)$ από το σημείο $K(0,4)$ είναι σταθερή και ίση με 2. Επομένως το M ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(0,4)$ και ακτίνα $\rho=2$.



Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z_1=2i$ και ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z_2=6i$.

> **Θυμήσου** ότι η εξίσωση $\boxed{|\lambda z-z_1|=|\kappa z-z_2|}$ με $\kappa,\lambda\neq 0$ και $\kappa\neq\lambda$, είναι εξίσωση κύκλου (Απολλώνιος Κύκλος), την οποία θα την βρίσκεις μόνον αλγεβρικά! Μελέτησε την **ΛΑ8**.

ΛΑ8. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1|=|z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Λύση

α! τρόπος: (μέθοδος του τετραγωνισμού)

Έχουμε: $|2z-1|=|z-2|\Leftrightarrow|2z-1|^2=|z-2|^2\Leftrightarrow(2z-1)(2\bar{z}-1)=(z-2)(\bar{z}-2)$

$\Leftrightarrow 4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1=z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4\Leftrightarrow 3z\bar{z}=3\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1$.

Άρα, η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β! τρόπος: με αντικατάσταση

Αν $z=x+yi$, έχουμε: $|2z-1|=|z-2|\Leftrightarrow\left|2(x+yi)-1\right|=\left|x+yi-2\right|\Leftrightarrow$

$\left|(2x-1)+2yi\right|=\left|(x-2)+yi\right|\Leftrightarrow\sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\Leftrightarrow$

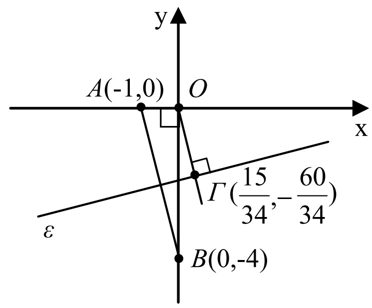
$4x^2-4x+1+4y^2=x^2-4x+4+y^2\Leftrightarrow 3x^2+3y^2=3\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Άρα, η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

> **Πρόσεξε να μάθεις καλά την τεχνική της ΛΑ9!!!**

ΛΑ9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Να βρεθεί ο μιγαδικός z με το ελάχιστο μέτρο και το ελάχιστο μέτρο.

Λύση



Η σχέση που μας δίνεται $|z+1|=|z+4i|$ μετατρέπεται στην $|z-(-1+0i)|=|z-(0-4i)|$, που ως γνωστόν είναι εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $A(-1,0)$ και $B(0,-4)$. Επειδή όμως θα χρειασθούμε την εξίσωσή της εργαζόμαστε αλγεβρικά.

Αν $z = x + yi$, τότε θα έχουμε:

$$|z+1|=|z+4i| \Leftrightarrow |(x+1)+yi|=|x+(y+4)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y+4)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2+8y+16 \Leftrightarrow$$

$2x+1=8y+16 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}$. Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $\varepsilon : y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}$.

Ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι αυτός που έχει για εικόνα το ίχνος της καθέτου από την αρχή O στην ε. Η κάθετος αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αντιθετοαντίστροφο του συντελεστή διεύθυνσης της $\varepsilon : y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}$, άρα $\lambda=-4$, οπότε έχει εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ με $x_0=y_0=0$ και $\lambda=-4$, άρα $y=-4x$ και επομένως οι συντεταγμένες του σημείου τομής της με την ε βρίσκεται από τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y=-4x \\ y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8} \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $\left(\frac{15}{34},-\frac{60}{34}\right)$. Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z=\frac{15}{34}-\frac{60}{34}i$ και το ελάχιστο μέτρο είναι το $|z|=\sqrt{\left(\frac{15}{34}\right)^2+\left(-\frac{60}{34}\right)^2}$.

Παρατήρηση:

Επειδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ των μιγάδων z είναι ευθεία και επεκτείνεται απεριόριστα, δεν μπορούμε να βρούμε τον μιγάδα με το μεγαλύτερο μέτρο. Το ίδιο συμβαίνει αν ο γ.τ είναι υπερβολή ή παραβολή!

Εν αντιθέσει στις ασκήσεις ΛΑ6 και ΛΑ7 που ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος μπορούμε να βρούμε τον μιγάδα και με το μικρότερο και με το μεγαλύτερο μέτρο! Το ίδιο συμβαίνει αν ο γ.τ είναι έλλειψη!

Ασκήσεις προς λύση

1. Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:

$-2 \le \mathrm{Re}(z) \le 2$ (1)

$|\mathrm{Im}(z)| \le 2$ (2)

$|z| \ge 2$ (3)

Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.

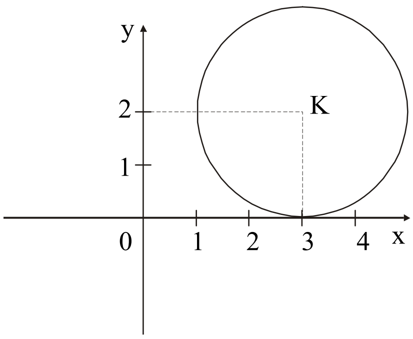
2. Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z+1-i| = 3$

β) $|z-1-i| < 4$

γ) $1 < |z-1+i| < 2$

3. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος εφάπτεται του άξονα των τετμημένων και είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, $x, y \in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε δύο που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

ii) $3x^2 + 2y^2 = 4$

iii) $|z| - |3+2i| = 4$

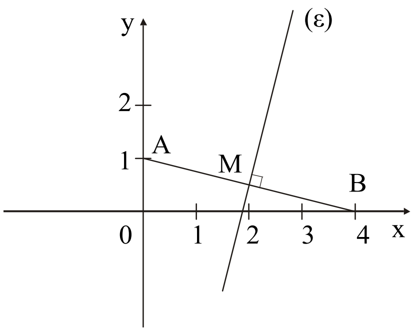
iv) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

v) $|z-3-2i| = 2$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

4. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν τη σχέση $2\,|z-1| = |z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 2.

5. Στο διπλανό σχήμα η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$, $x,y\in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε τρεις που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $x^2 - i = y^2 + 4$

ii) $|z-i| = |z-4|$

iii) $|z-1| - |z-4| = 0$

iv) $y = 4x - \dfrac{15}{2}$

v) $\mathrm{Re}(z) = 2\mathrm{Im}(z)$

vi) $8\mathrm{Re}(z) = 15 + 2\mathrm{Im}(z)$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

> ☛ **Πρόσεξε να μάθεις τις ασκήσεις ΛΑ10, ΛΑ11 γιατί είναι βασικές!**

ΛΑ10. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι:

α) $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2) = 2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 \cdot z_2)$

β) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 \cdot z_2)$

γ) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 \cdot z_2)$

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Έχουμε λοιπόν τα εξής: $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1\overline{\overline{z}}_2 = z_1\overline{z}_2 + \overline{(z_1\overline{z}_2)} = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$ ή

$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = \overline{\overline{z}}_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = \overline{(\overline{z}_1 z_2)} + \overline{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2).$$

β) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2)$

γ) $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 =$

$= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - (z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) =$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2)$

ΛΑ11. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

Λύση

α΄ τρόπος: αλγεβρικός

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$. Τότε: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ και $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y - y_2)i$. Άρα:

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$

$= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

β΄ τρόπος: εφαρμόζουμε την ΛΑ10

Έχουμε: $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)$ (1) και

$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

Ασκήσεις προς λύση

1. Αν $|z+w|=|z|=|w|\neq 0$, δείξτε ότι $|z-w|=\sqrt{3}|z|$.

2. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε τη σχέση:

$|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2=4\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=4\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2)$.

3. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και $z_2\neq 0$ να αποδείξετε τη σχέση:

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}\geq 0$.

4. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και $z_2\neq 0$ να αποδείξετε τη σχέση:

$|z_1-z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}\leq 0$.

5. Να αποδειχθεί η σχέση: $\big|z+|z|\big|+\big|z-|z|\big|=2|z|\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Μερικές ασκήσεις γεωμετρικών τόπων.

Πρόσεξε να μάθεις την τεχνική της άσκησης ΛΑ12!

Μελέτησε τις ασκήσεις ΛΑ12, ΛΑ13, ΛΑ14, ΛΑ15.

ΛΑ12. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w=2z+1$.

Λύση

Σχόλιο!

Στην άσκηση αυτή έχουμε τον μιγάδα z που ξέρουμε τον γεωμετρικό του τόπο γιατί αφού $|z|=1$, συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες του z θα βρίσκονται στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=1$, και αναζητάμε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w που εκφράζεται συναρτήσει του z.

Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας θα εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $z=\alpha+\beta i$, οπότε $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1$ (1) και $w=x+yi$. Αναζητάμε τη σχέση που συνδέει το x με το y. Έχουμε:

$$w=2z+1\Leftrightarrow x+yi=2(\alpha+\beta i)+1\Leftrightarrow x+yi=(2\alpha+1)+2\beta i\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha+1\\ \text{και}\\ y=2\beta\end{cases} \quad (2).$$

Πρόσεξε τώρα! Αν και ζητάμε την σχέση που συνδέει το x με το y, θα επιλύσουμε το σύστημα ως προς τα α και β και στη συνέχεια αυτά που θα βρούμε θα τα αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) που τα συνδέει, για να βρούμε το ζητούμενο.

Επιλύοντας λοιπόν τις σχέσεις (2) ως προς α και β έχουμε: $\begin{cases} \alpha = \dfrac{x-1}{2} \\ \text{και} \\ \beta = \dfrac{y}{2} \end{cases}$.

Αντικαθιστώντας στην συνέχεια στην (1) έχουμε: $\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2^2$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος κέντρου $K(1,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.

ΛΑ13. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \dfrac{2z - i}{iz + 2}$.

Λύση

Σχόλιο!

Η άσκηση ανάγεται στη τεχνική της ΛΑ11.

Θέτουμε $z = \alpha + \beta i$, οπότε $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$ (1) και $w = x + yi$. Αναζητάμε τη σχέση που συνδέει το x με το y. Έχουμε: $w = \dfrac{2z - i}{iz + 2} \Leftrightarrow x + yi = \dfrac{2(\alpha + \beta i) - i}{i(\alpha + \beta i) + 2}$

$$\Leftrightarrow x + yi = \frac{2\alpha + 2\beta i - i}{i\alpha + \beta i^2 + 2} = \frac{2\alpha + (2\beta - 1)i}{(2-\beta) + \alpha i} = \frac{[2\alpha + (2\beta - 1)i]\cdot[(2-\beta) - \alpha i]}{[(2-\beta) + \alpha i]\cdot[(2-\beta) - \alpha i]} =$$

$$= \frac{4\alpha - 2\alpha\beta - 2\alpha^2 i + 4\beta i - 2\beta^2 i - 2i + \beta i + \alpha i^2}{(2-\beta)^2 - (\alpha i)^2} =$$

$$= \frac{3\alpha}{(2-\beta)^2 + \alpha^2} + \frac{-2(\alpha^2 + \beta^2) + 4\beta - 2 + \beta}{(2-\beta)^2 + \alpha^2} i = \frac{3\alpha}{4 - 4\beta + (\beta^2 + \alpha^2)} + \frac{-2(\alpha^2 + \beta^2) + 5\beta - 2}{4 - 4\beta + (\beta^2 + \alpha^2)} i$$

Λόγω της (1) έχουμε ότι:

$x + yi = \dfrac{3\alpha}{5 - 4\beta} + \dfrac{5\beta - 4}{5 - 4\beta} i$, άρα $x = \dfrac{3\alpha}{5 - 4\beta}$ και $y = \dfrac{5\beta - 4}{5 - 4\beta}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $x^2 + y^2 = 1$. Έχουμε: $x^2 + y^2 = \dfrac{9\alpha^2}{(5 - 4\beta)^2} + \dfrac{(5\beta - 4)^2}{(5 - 4\beta)^2} =$

$$= \frac{9\alpha^2}{(5-4\beta)^2} + \frac{(5\beta - 4)^2}{(5-4\beta)^2} = \frac{9\alpha^2 + 25\beta^2 - 40\beta + 16}{(5-4\beta)^2} = \frac{9(1-\beta^2) + 25\beta^2 - 40\beta + 16}{(5-4\beta)^2} =$$

$$= \frac{9 - 9\beta^2 + 25\beta^2 - 40\beta + 16}{(5-4\beta)^2} = \frac{16\beta^2 - 40\beta + 25}{16\beta^2 - 40\beta + 25} = 1.$$

ΛΑ14. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

Λύση

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$. Επειδή το σημείο M_1 κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4^2$ θα ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = 16$. (1)

Επομένως:

$$z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1} \Leftrightarrow x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{4}{x_1 + y_1 i} \Leftrightarrow x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{4(x_1 - y_1 i)}{x_1^2 + y_1^2} \Leftrightarrow$$

$x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{4(x_1 - y_1 i)}{16}$ (λόγω της (1)). $x_2 + y_2 i = x_1 + y_1 i + \frac{x_1}{4} - \frac{y_1}{4} i \Leftrightarrow$

$x_2 + y_2 i = \frac{5x_1}{4} + \frac{3y_1 i}{4}$. Επομένως, $x_2 = \frac{5x_1}{4}$ και $y_2 = \frac{3y_1}{4}$, οπότε $x_1 = \frac{4x_2}{5}$ και $y_1 = \frac{4y_2}{3}$ (2). Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των x_1 και y_1 στην (1) και έχουμε: $\left(\frac{4x_2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4y_2}{3}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{16x_2^2}{25} + \frac{16y_2^2}{9} = 16 \Leftrightarrow \frac{x_2^2}{25} + \frac{y_2^2}{9} = 1$. Άρα, το σημείο M_2 κινείται στην έλλειψη με μεγάλο άξονα $2\alpha = 10$ και εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$.

ΛΑ15. Αν $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z, όπου $z = \frac{1 + xi}{x + i}$.

Λύση

Έχουμε $z = \frac{1 + xi}{x + i}$, άρα $|z| = \left|\frac{1 + xi}{x + i}\right| = \frac{|1 + xi|}{|x + i|} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$. Αφού $|z| = 1$, ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του z θα είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Σχόλιο!

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο μιγάδας του αριθμητή και ο μιγάδας του παρονομαστή έχουν ίσα μέτρα!

Ασκήσεις προς λύση

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο αν ο αριθμός $\frac{z + 2i}{z + 1}$ είναι πραγματικός.

2. Από όλους τους μιγαδικούς z με την ιδιότητα $\left|z + \frac{3}{z}\right| = 2$ να βρεθεί αυτός του οποίου η εικόνα απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.

3. Από όλους τους μιγαδικούς z με την ιδιότητα $\left|3z+\frac{1}{z}\right|=2$ να βρεθεί αυτός του οποίου η εικόνα απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.

4. Α. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-3|$, όταν $|z+4i|\le 1$.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z, όταν το $|z-3|$ είναι ίσο με το μέγιστό του.

5. Αν $|z-i|=2|z+i|$ τότε:

α) Δείξτε ότι ο γ.τ των εικόνων Μ των μιγάδων z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από την εικόνα Ρ του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{2\sqrt{3}}{3}-i$.

6. Έστω $z=x+yi\neq 0$ και $w=\frac{\bar z}{z}$. Να βρεθεί ο γ.τ των εικόνων Μ του w.

Όταν ένας μιγάδας έχει μέτρο $|z|=\kappa$, με $\kappa>0$, να ξέρεις ότι:

$$|z|=\kappa \Leftrightarrow |z|^2=\kappa^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar z=\kappa^2 \Leftrightarrow \bar z=\frac{\kappa^2}{z}=\kappa^2\cdot z^{-1} \text{ ή } z=\frac{\kappa^2}{\bar z}=\kappa^2\cdot(\bar z)^{-1}.$$

Συνήθως μας δίνεται ότι $|z|=1$, οπότε:

$$|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar z=1^2 \Leftrightarrow \bar z=\frac{1}{z}=z^{-1} \text{ ή } z=\frac{1}{\bar z}=(\bar z)^{-1}.$$

ΛΑ16. Αν για τους μιγαδικούς $z_1,z_2,...,z_\kappa$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=...=|z_\kappa|=1$, να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2+...+z_\kappa|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_\kappa}\right|$.

Λύση

Από τις ισότητες $|z_1|=|z_2|=|z_3|=...=|z_\kappa|=1$ έχουμε: $\bar z_1=\frac{1}{z_1}$, $\bar z_2=\frac{1}{z_2}$, $\bar z_3=\frac{1}{z_3},...,\bar z_\kappa=\frac{1}{z_\kappa}$. Άρα $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_\kappa}\right|=|\bar z_1+\bar z_2+...+\bar z_\kappa|=$

$=\left|\overline{z_1+z_2+...+z_\kappa}\right|=|z_1+z_2+...+z_\kappa|$, αφού $|z|=|\bar z|$.

Ασκήσεις προς λύση

1. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2,z_3 τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, $z_1+z_2+z_3=1$ και $z_1\cdot z_2\cdot z_3=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1$

β) Να υπολογισθούν οι z_1, z_2, z_3.

2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\kappa$ με $\kappa>0$ και $z_1+z_2+z_3=\kappa$. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{1}{\kappa}$.

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 z_2, ..., z_\nu$, τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z_2|=...=|z_\nu|=\rho>0$ και $z_1+z_2+...+z_\nu=\alpha$. Να δειχθεί ότι $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_\nu}\right|=\frac{|\alpha|}{\rho^2}$.

Ας θυμηθούμε ότι

- Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ είναι ο $\bar{z}=\alpha-\beta i$.
- Αν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\bar{z}=z$ και αντίστροφα.
- Αν $z \in \mathbb{I}$ τότε $\bar{z}=-z$ και αντίστροφα.

Μελέτησε τις ασκήσεις ΛΑ17, ΛΑ18, ΛΑ19.

ΛΑ17. Έστω ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει $z\neq -1$. Να αποδείξετε ότι: Αν $|z|=1$, τότε ο $w=\frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

Λύση

Έχουμε τις ισοδυναμίες: w φανταστικός $\Leftrightarrow \bar{w}=-w \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=-\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z}-1)(z+1)=-(z-1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z}+\bar{z}-z-1=-z\bar{z}-z+\bar{z}+1 \Leftrightarrow 2z\bar{z}=2 \Leftrightarrow z\bar{z}=1$

$\Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$.

ΛΑ18. Έστω ο μιγαδικός z με $z\neq 0$. Να αποδείξετε ότι: Ο $w=z+\frac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

Λύση

Έχουμε τις ισοδυναμίες: $w\in R \Leftrightarrow \bar{w}=w \Leftrightarrow \bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=z+\frac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z}^2 z+z=\bar{z}z^2+\bar{z} \Leftrightarrow$

$z\bar{z}(\bar{z}-z)-(\bar{z}-z)=0 \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(\bar{z}-z)=0 \Leftrightarrow z\bar{z}=1$ ή $\bar{z}=z \Leftrightarrow |z|=1$ ή $z\in R$.

ΛΑ19. Έστω ο μιγαδικός z με $z\neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι: ο $w=\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

Λύση

Έχουμε τις ισοδυναμίες: w φανταστικός $\Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z} - \alpha i}{-i\overline{z} + \alpha} = \dfrac{-(z + \alpha i)}{iz + \alpha} \Leftrightarrow$

$iz\overline{z} + \alpha\overline{z} + \alpha z - \alpha^2 i = iz\overline{z} - \alpha\overline{z} - \alpha z - \alpha^2 i \Leftrightarrow 2\alpha\overline{z} = -2\alpha z \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ φανταστικός.

Ασκήσεις προς λύση

1. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z \neq -1$. Αν ο αριθμός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός, δείξτε ότι $|z| = 1$.

2. Αν $|z_1| = |z_2| = 1$, να δείξετε ότι ο αριθμός $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2} \in \mathbb{R}$.

3. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, να δείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$.

4. Αν $|z| = 1$ δείξτε ότι $z + \dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, ενώ ο $z - \dfrac{1}{z}$ είναι φανταστικός.

5. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$ και $1 + z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \neq 0$. Να δείξετε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{1 + z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \in \mathbb{R}$.

6. Αν $|z + i| = |z - i|$, να αποδειχθεί ότι $z \in \mathbb{R}$.

7. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ο αριθμός $w = \dfrac{z_1 - \overline{z}_1 \cdot z_2}{1 - z_2}$ να είναι πραγματικός.

8. Αν για τον μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$, ισχύει $z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ \ldots \ + z^2 + z + 1 = 0$, να δειχθεί ότι ο $w = z + \dfrac{1}{z}$, είναι πραγματικός.

9. Αν $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$ και ο αριθμός $w = \dfrac{z^\nu - 1}{z^\nu + 1} \in \mathbb{I}$, με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu \geq 2$, να δειχθεί ότι $|z| = 1$.

Ας θυμηθούμε ότι

☛ Στις ασκήσεις που έχουν μέτρα και θέλουμε να απαλλαγούμε από αυτά, αφού εξασφαλίσουμε ότι και τα δυο μέλη είναι ομόσημα, υψώνουμε στο τετράγωνο (μέθοδος του τετραγωνισμού) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, για κάθε μέτρο μιγάδα που είναι υψωμένο στο τετράγωνο.

ΛΑ20. Αν $|z - 8| = |z - 2|$, να δείξετε ότι $\text{Re}(z) = 5$.

Λύση

Έχουμε $|z-8|=|z-2|$ και επειδή τα δυο μέλη είναι θετικά, υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε: $|z-8|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow (z-8)\cdot(\bar{z}-8)=(z-2)\cdot(\bar{z}-2) \Leftrightarrow$
$z\bar{z}-8z-8\bar{z}+64=z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow -6z-6\bar{z}=-60 \Leftrightarrow z+\bar{z}=10 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z)=10 \Leftrightarrow$
$\operatorname{Re}(z)=5$.

Ασκήσεις προς λύση

1. Αν $z \in C$ και $|z+9| = 3\,|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.

2. Αν $z \in C$ και $|z-10| = 3\,|z-2|$, αποδείξτε ότι $|z-1| = 3$.

3. Αν $z \in C$ και $|z+16| = 4\,|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 4$.

4. Αν $z \in C$ και $|7\cdot z-i|=|i\cdot z+7|$, να δειχθεί ότι $|z|=1$ και αντίστροφα.

5. Αν $z\in C$ και $\mu\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ και $|\mu\cdot z-i|=|i\cdot z+\mu|$, να δειχθεί ότι $|z|=1$ και αντίστροφα.

6. Αν $z\in C$ και $\mu\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ και $|\mu\cdot z-1|=|z-\mu|$, να δειχθεί ότι $|z|=1$ και αντίστροφα.

7. Αν $|z_1|=|z_2|=1$, να δείξετε ότι $|z_1-z_2|=|1-\bar{z}_1\cdot z_2|$.

8. Αν $|z+\alpha i|=|z+\beta i|$, όπου $z\in C$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq\beta$, να δείξετε ότι $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

9. Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, να δειχθεί ότι $|z_1\bar{z}_2+1|^2+|z_1-z_2|^2=\left(1+|z_1|^2\right)\cdot\left(1+|z_2|^2\right)$.

☛ Ας κάνουμε μερικές ασκήσεις αποδεικτικές με ανισότητες.

ΛΑ21. Αν για τους μιγαδικούς $z_1,z_2,\ldots,z_\nu$ ισχύει:
$\left|\dfrac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\dfrac{z_2-i}{z_2+i}\right|+\cdots+\left|\dfrac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1$, να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση

Αν ένας από τους $z_1,z_2,\ldots,z_\nu$, για παράδειγμα ο z_κ, ήταν πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί $z_\kappa-i$ και $z_\kappa+i$ θα ήταν συζυγείς και επομένως $\left|\dfrac{z_\kappa-i}{z_\kappa+i}\right|=\left|\dfrac{z_\kappa-i}{z_\kappa+i}\right|=1$, αφού τα μέτρα δύο συζυγών μιγαδικών είναι ίσα. Τότε όμως θα είχαμε $\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+\cdots+\left|\frac{z_\kappa-i}{z_\kappa+i}\right|+\cdots+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|\geq 1$, που είναι άτοπο.

ΛΑ22. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:
$\sqrt{2}\cdot|z|\geq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$.

Λύση

Αν $z=x+yi$,

τότε: $\sqrt{2}\,|z|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ και $|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|=|x|+|y|$.

Άρα θέλουμε να δείξουμε ότι: $\sqrt{2(x^2+y^2)}\geq|x|+|y|\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)\geq(|x|+|y|)^2\Leftrightarrow$

$2x^2+2y^2\geq x^2+y^2+2|x||y|\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2|x||y|\Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2+y^2-2|x||y|\geq 0\Leftrightarrow$

$|x|^2+|y|^2-2|x||y|\geq 0\Leftrightarrow(|x|-|y|)^2\geq 0$, που ισχύει.

> **Ας θυμηθούμε την τριγωνική ιδιότητα του μέτρου μιγάδων**
>
> $$\boxed{||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|}$$
>
> Μελέτησε καλά την άσκηση ΛΑ23!!!

ΛΑ23. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+4i|\leq 1$, να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z-3|$.

Λύση

α! τρόπος

Θα εφαρμόσουμε την τριγωνική ιδιότητα: $\boxed{||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|}$

- Έχουμε $|z-3|=|z+4i-4i-3|=|(z+4i)+(-3-4i)|=|(-3-4i)+(z+4i)|$. Αν θέσουμε $z_1=-3-4i$ $z_2=z+4i$ και εφαρμόσουμε το δεύτερο σκέλος της τριγωνικής ανισότητας $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$, έχουμε:

  $$|z-3|=|(-3-4i)+(z+4i)|\leq|-3-4i|+|z+4i|\leq\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}+|z+4i|. \quad (1)$$

  Όμως $|z+4i|\leq 1$, οπότε η (1) γίνεται: $|z-3|\leq\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}+1=\sqrt{25}+1=6$, άρα $|z-3|\leq 6$, που σημαίνει ότι το μέγιστο του $|z-3|$ είναι το 6.

- Έχουμε $|z-3|=|(-3-4i)+(z+4i)|$. Αν θέσουμε $z_1=-3-4i$ $z_2=z+4i$ και εφαρμόσουμε το πρώτο σκέλος της τριγωνικής ανισότητας,
  $|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ έχουμε:

$\left|z-3\right|=\left|(-3-4i)+(z+4i)\right|\geq\left|\left|-3-4i\right|-\left|z+4i\right|\right|\geq\geq\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}-\left|z+4i\right|$.(2) Όμως $\left|z+4i\right|\leq 1$, οπότε η (2) γίνεται: $\left|z-3\right|\geq\sqrt{25}-1=4$, $\left|z-3\right|\geq 4$, που σημαίνει ότι το ελάχιστο του $\left|z-3\right|$ είναι το 4, άρα τελικά: $4\leq\left|z-3\right|\leq 6$.

☛ Πρόσεξε τον τρόπο που ενισχύουμε τις ανισότητες!!! Για να μην κάνεις λάθος να βάζεις πάντα σαν z_1 τον μιγάδα που έχει σταθερό μέτρο!

β! τρόπος (Γεωμετρικός)

$\left|z+4i\right|\leq 1\Leftrightarrow\left|z-(0-4i)\right|\leq 1$, οπότε αν $M(x,y)$ η εικόνα του $z=x+yi$ και $K(0,-4)$ η εικόνα του $w=0-4i$, η σχέση μετατρέπεται στην $(MK)\leq 1$, που σημαίνει ότι οι εικόνες M του z βρίσκονται μέσα στον κυκλικό δίσκο με κέντρο το K και ακτίνας 1. Αναζητάμε το μέγιστο και το ελάχιστο του $\left|z-3\right|=\left|z-(3+0i)\right|$, που γεωμετρικά εκφράζει την απόσταση MA του σημείου M από το σταθερό σημείο $A(3,0)$. Το μέγιστο και το ελάχιστο του MA το βρίσκουμε κατά τα γνωστά, από την τομή της ευθείας KA με τον κύκλο κέντρου K και ακτίνας ρ=1.

Άρα πρέπει να βρούμε την εξίσωση της ευθείας KA και του κύκλου, να λύσουμε το σύστημά τους και να προσδιορίσουμε το ζητούμενο.

Εξίσωση KA: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, όπου $x_0=3$ και $y_0=0$ και $\lambda=\frac{-4-0}{0-3}=\frac{4}{3}$, άρα $y-0=\frac{4}{3}(x-3)$ (1), και η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+(y+4)^2=1$ (2). Οπότε λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε τα ζητούμενα.

Ασκήσεις προς λύση

1. Να δείξετε ότι αν $\left|z-1\right|<\left|z-2\right|$ τότε $\operatorname{Re}(z)<\frac{3}{2}$.

2. Να δείξετε ότι αν $\left|z-1\right|\leq 1$ και $\left|z-2\right|=1$ τότε $\operatorname{Re}(z)>0$ και $1\leq\left|z\right|\leq\sqrt{3}$.

3. Να δείξετε ότι αν $\left|z+3\right|<\left|z-4\right|$ τότε $\operatorname{Re}(z)<\frac{1}{2}$.

4. Να δείξετε ότι αν $\left|z+i\right|<\left|z-i\right|$ τότε $\operatorname{Im}(z)<0$.

5. Αν για τους μιγαδικούς $z_1,z_2,...,z_\nu$ ισχύει:

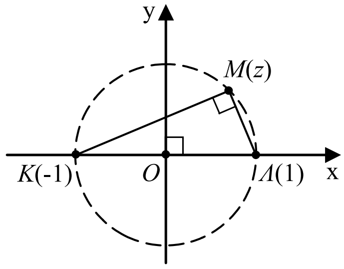
$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+\cdots+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1$, να δειχθεί ότι $\left|\frac{z_1+z_2+\ ...\ +z_\nu-i}{z_1+z_2+\ ...\ +z_\nu+i}\right|<1$.

6. Αν $\left|z-2-i\right|\leq 5$, να δείξετε ότι $8\leq\left|z-14-6i\right|\leq 18$.

7. Αν $\left|z-1-i\right|<5$, να δείξετε ότι $10\leq\left|z-10-13i\right|\leq 20$.

ΛΑ24. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|1+z|^2+|1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

Λύση
Έχουμε:
$A=(1+z)(1+\overline{z})+(1-z)(1-\overline{z})==1+z+\overline{z}+z\overline{z}+1-z-\overline{z}+z\overline{z}=2(1+z\overline{z})=$
$=2(1+|z|^2)=2\cdot 2=4$.



Γεωμετρική ερμηνεία
Αν Μ, Κ και Λ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, -1 και 1, αντιστοίχως, τότε θα είναι:

$|1+z|^2=|z-(-1+0i)|^2=MK^2$,

$|1-z|^2=|z-1|^2=|z-(1+0i)|^2=M\Lambda^2$ και

$4=K\Lambda^2$.Επομένως, $|1+z|^2+|1-z|^2=4\Leftrightarrow MK^2+M\Lambda^2=K\Lambda^2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ορθογώνιο στο Μ. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού το Μ είναι σημείο του μοναδιαίου κύκλου και η ΚΛ διάμετρος αυτού.

Ασκήσεις προς λύση

1. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 έχουν εικόνες A_1, A_2, A_3 οι οποίες ανήκουν στον κύκλο $(0,1)$, δείξτε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο τότε $z_1+z_2+z_3=0$.

β) Αν Ρ η εικόνα του μιγαδικού z για τον οποίο $|z|=3$, τότε δείξτε ότι $\left|\overrightarrow{PA_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PA_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{PA_3}\right|^2=30$.

2. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4 έχουν εικόνες A, B, Γ, Δ στο μιγαδικό επίπεδο οι οποίες ορίζουν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, να δείξετε ότι $\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|\geq\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|$.

Επιλεγμένα **Θέματα**

1. Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z|+z=2+i$.

2. Αν $\omega=\dfrac{z-1}{z+1}\in\mathbb{I}$, $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq -1$, δείξτε ότι $|z|=1$.

3. Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z αν ξέρουμε ότι η απόλυτη τιμή του πραγματικού μέρους του z είναι 3 και η απόλυτη τιμή του φανταστικού μέρους του z είναι 4. Πού βρίσκονται οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;

4. Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους $|z|=\left|\dfrac{1}{z}\right|=|z-1|$.

5. Να λυθεί στο C η εξίσωση: $z+|z+1|+i=0$.

6. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|1-z|>|z|$, δείξτε ότι $\mathrm{Re}\,(z)<\dfrac{1}{2}$.

7. Για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ δείξτε ότι ισχύει η σχέση:

$$\left|(z_1 \cdot z_2 \cdot \ \ldots \ \cdot z_\nu)^{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |z_\nu|} .$$

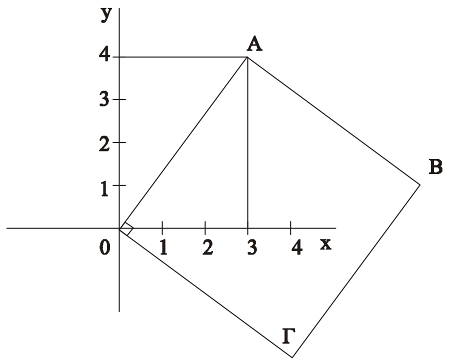
8. Για τον μιγάδα z, να δειχθεί η ισοδυναμία: $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = |z+1| = 1$.

9. Για τους μιγάδες z, w, δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία: $|z+w| = |1 + z \cdot \overline{w}| \Leftrightarrow |z| = 1$ ή $|w| = 1$.

10. Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο. Αν Α, Β και Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = x + yi$ και $z_3 = \kappa + \lambda i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο:

α) Να δειχθεί ότι $3\kappa + 4\lambda = 0$.

β) Να βρεθούν οι z_2 και z_3.



11. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, με $z_1^2 + z_2^2 = 0$, δείξετε ότι: α) $|z_1| = |z_2|$ β) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$.

12. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w, q ισχύουν οι σχέσεις: $z + w + q = 0$ και $z^2 + w^2 + q^2 = 0$, να δείξετε ότι $|z| = |w| = |q|$.

13. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w, q ισχύει $z^2 + w^2 + q^2 = z \cdot w + w \cdot q + q \cdot z$, να δείξετε ότι $|z - w| = |w - q| = |q - z|$.

14. Αν για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει $|z| + w = |z| = |w|$, να δειχθεί ότι $\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right) + 1 = 0$.

15. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z + 2 - 4i| \le 2$, να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z - 4|$.

16. Έστω $z = (2x - 3) + (2y - 1)i$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $|2z - 1 + 3i| = 3$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$.

17. Έστω $z = x + yi \neq 0$ και $\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε ένα κύκλο από το οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο $(0,0)$.

18. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi \neq 0$ και $w = \frac{2z - 1}{z^2}$.

α) Αν $w \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $z \in \mathbb{R}$ ή $|z|^2 = \text{Re}(z)$ και αντίστροφα.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ όταν $w \in \mathbb{R}$.

19. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, w_1 τέτοιοι ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w = \overline{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

20. Έστω $z = x + yi$ με $y \neq 0$ και $w = \frac{\overline{z}^2}{z-1}$. Να δείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός, αν το σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

21. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x + yi$, $w = \alpha + 2i$, $u = 2 + \alpha i$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

α) Αν $z = w^2$, δείξτε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε παραβολή (c_1) όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}^*$.

β) Αν $z = u^2$, δείξτε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε παραβολή (c_2) όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}^*$.

γ) Δείξτε ότι οι παραβολές (c_1) και (c_2) έχουν την ίδια εστία και τον ίδιο άξονα.

22. Αν $z_1, z_2, z_3 \in C \setminus R$ και $z_1 + z_2 + z_3 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, να αποδειχθεί ότι:

Α. $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, Β. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$.

23. Αν $z \in C - \{0\}$ και ισχύει $\big|z + |z|\big| + \big|z - |z|\big| = 2|z|$, να αποδειχθεί ότι $z \in R$.

24. Να αποδειχθεί ότι $|z^2 - 5z + 15| - |z-2||z-3| + \big||z^3 - 7| - |2 - z^3|\big| \leq 14$ για κάθε $z \in C$.

25. Αν είναι $\ln|z + e^2| = 1 + \ln|z + 1|$ να αποδείξετε ότι $|z| = e$ και αντιστρόφως.

26. Αν είναι $\text{Im}\left(\frac{\overline{z} + 4}{z + 3}\right) = 0$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z με $z \neq -3$.

27. Να λυθεί η εξίσωση $(7 - i)\overline{z} + (7 + i)z = 4$. Αν z_0 μια ρίζα της εξίσωσης να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ που είναι η εικόνα του z_0.

28. Έστω M_1, M_2, M_3 οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3 είναι συνευθειακά αν και μόνον αν ο αριθμός $z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1$ είναι πραγματικός.

29. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = |\text{Re}(z_1\overline{z}_2| = 1$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αυτών και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.

30. Έστω $z = 1 + i$ και w ένας μιγαδικός με $|w| = 2|z|$. Να βρείτε για ποιες τιμές του w η παράσταση $|z - w|$ γίνεται: α. Μέγιστη, β. Ελάχιστη. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

31. Έστω $z_1, z_2 \in C^*$ με $|z_1| = |z_2|$. Αν Α είναι εικόνα του $(z_1 + z_2)^2$ και Β η εικόνα του $(z_1 - z_2)^2$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Ο,Β είναι συνευθειακά, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

32.Αν $z \in C$ και $|z+i|+|z-i| = \sqrt{2}(|z|+1)$, να αποδειχθεί ότι $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$.

33.Αν $z \in C$ με $z \neq -i$ και $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$, να αποδειχθεί ότι $\text{Im}(z) > 0$.

34.Αν $z_1, z_2, z_3 \in C$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $|z_1 + z_2 + z_3| = 3$, να αποδειχθεί ότι $z_1 = z_2 = z_3$.

35.Αν $z \in C$ και $|z+i|+|z-2| = \sqrt{2}(|z|+1)$, να αποδειχθεί ότι $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$.

36.Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{\alpha + \beta z}{1+z}$ με $\alpha, \beta \in C$. Εάν $|z| = r$, να αποδειχθεί ότι $\left|f(z) - f(-r^2)\right|^2 = \frac{|\alpha - \beta|^2 r^2}{(r^2-1)^2}$.

37.Έστω z, w δυο καθαροί μιγαδικοί αριθμοί, διάφοροι μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\frac{(i-z)(i+w)}{w-z}$ να είναι φανταστικός. Να δειχθούν τα εξής:

1. Ισχύει: $(|w|^2 - 1)(z + \bar{z}) = (|z|^2 - 1)(w + \bar{w})$.
2. Οι εικόνες των $i, -i, z, w$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία ομοκυκλικά.

38.Δίνεται η εξίσωση $x^4 + \alpha x + \beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\beta \neq 1$ και η οποία έχει ρίζα ένα μιγαδικό αριθμό και μη πραγματικό, με μέτρο 1. Να δειχθεί ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

39.Έστω $f(z) = \left(2 + \frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}\bar{z}i$, όπου $z = x + yi$, με $x, y \in R$.

i. Να βρεθούν τα $\text{Re} f(z), \text{Im} f(z)$.
ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που είναι οι εικόνες των f(z).
iii. Να δειχθεί ότι $|f(z)| = |x - 2y|\sqrt{5}$.
iv. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$, για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \sqrt{5}$.

40.Δίνεται η εξίσωση $(z - \rho)(z^2 - 2z + 2) = 0$ με $\text{Re}(\rho) > 1$, της οποίας οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ.

i. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης.
ii. Να βρεθεί ένα σημείο Μ στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ, αν το άθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2$ είναι ελάχιστο και $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Gamma}\overrightarrow{MA} = 0$.

41.Έστω ο μιγαδικός αριθμός z.

1. Αν $|z| \leq 1$, να βρεθεί ο $\max|z-3|$ και ο $\min|z-3|$.
2. Αν $|z-5| \leq 2$, να βρεθεί ο $\max|z|$ και ο $\min|z|$.
3. Αν $|z+3i| \leq 1$, να βρεθεί ο $\max|z-4|$ και ο $\min|z-4|$.
4. Αν $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 1$, να βρεθεί ο $\max|z|$.