ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ C

1. Έστω οι φυσικοί αριθμοί κ, λ, μ, ν οι οποίοι, αν διαιρεθούν με το 4, αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Να αποδείξετε ότι:

α. $i^{\kappa} = i^{\lambda} = i^{\mu} = i^{\nu}$

β. $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu} = 1$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

α. $i^{2\nu} + i^{2\nu+1} + i^{2\nu+2} + i^{2\nu+3} = \dfrac{1}{i^{2\nu}} - \dfrac{1}{i^{2\nu+1}} + \dfrac{1}{i^{2\nu+2}} - \dfrac{1}{i^{2\nu+3}}$

β. $\dfrac{1+i^{-1}}{1-i} + \dfrac{1-i^{-1}}{1+i} + \dfrac{1+i}{1-i^{-1}} + \dfrac{1-i}{1+i^{-1}} = 4$

γ. $(2\alpha + 3\beta i)^{30\nu} + (3\beta - 2\alpha i)^{30\nu} = 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. Αν ν είναι φυσικός μεγαλύτερος του 2, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $S = i + i^2 + i^3 + i^{2004}$

β. $S = 1 - i + i^2 - i^3 + \ldots + (-1)^{\nu} i^{\nu}$

4. Να βρείτε τις τιμές του φυσικού αριθμού ν, για τις οποίες ισχύει καθεμία από τις παρακάτω ισότητες:

α. $i^{3\nu+1} = 1$ **β.** $(1 + i)^{\nu} = (1 - i)^{\nu}$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}^*$ η παράσταση:

$$A = (\kappa + \lambda i)\cdot(\kappa + \lambda i^2)\cdot \ldots \cdot(\kappa + \lambda i^{\nu}),\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

είναι πραγματικός αριθμός.

6. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, να βρείτε το άθροισμα:

$S = i + (2 + 3i) + (4 + 5i) + \ldots + ((2\nu - 2) + (2\nu - 1)i)$

7. Αν $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $w = 1 + z$, να αποδείξετε ότι:

α. $1 + z + z^2 = 0$

β. $z^3 = 1$

γ. $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 1$

δ. $w^{2\nu} = z^{\nu}$, για κάθε φυσικό ν

ε. $w^{300} = 1$ και $w^{333} = -1$

στ. $z^{2004} + \dfrac{1}{z^{2004}} = z^{2001} + \dfrac{1}{z^{2001}} = 2$

8. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις:

α. $(3 - 2x)^2 + (4 + x)^2 = 0$

β. $\lambda^2 z - 4 = \lambda(-zi + 4\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$

9. Έστω M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών

$$z_1 = 1 + ημθ + iσυνθ\ ,\ z_2 = 1 - ημθ + iσυνθ\ ,\ θ \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M_1, M_2 ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

β. Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2, να βρείτε το γεωμετρικό τόπου του Μ.

10. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $x, y \in \mathbb{R}$, να λύσετε τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 5iz - 18w = 7 \\ (2+i)z + 6iw = 5 - 4i \end{cases}$

β. $\begin{cases} ix^2 - (1+i)y = -4 \\ (1+2i)x + yi = -2 \end{cases}$

11. Έστω οι μιγαδικοί $z = \lambda - 3 + (5\lambda + 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει $w = z - (2 - i)$.

γ. Ποια σχέση συνδέει τους δύο γεωμετρικούς τόπους;

δ. Να βρείτε το μιγαδικό z, που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή Ο (0, 0).

12. Στο μιγαδικό επίπεδο, να σημειώσετε το σύνολο των σημείων, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, όταν:

α. $z = 2\kappa - 1 + 5(1 + \kappa)i$, $\kappa \geq 0$

β. $z = 3 + (\alpha^2 + 4\alpha + 1)i$, $\alpha \in \mathbb{R}$

γ. $z = 3 + iσυνθ$, $θ \in [0, \pi)$

δ. $z = ημθ + iσυνθ$, $θ \in \mathbb{R}$

ε. $z = σφθ + \dfrac{1}{ημθ} i$, $θ \in \mathbb{R} - \{κπ, κ \in \mathbb{Z}\}$

στ. $z = ημθ + (λ^2 - 1)i$, για κάθε $θ \in \mathbb{R}$, $λ \in \mathbb{R}$

ζ. $z = 2ημ^2θ - iημ2θ$, $θ \in \mathbb{R}$

13. Για τους μιγαδικούς z, w ισχύει ότι $z = \dfrac{w-1}{w+i}$. Αν η εικόνα του w είναι στην ευθεία x = 0 , να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

14. Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = α + βi$, $α, β \in \mathbb{R}$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα 1 , να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής, στην οποία κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w, με $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

15. Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι: $z^2 - w + 1 = 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του z όταν:

α. οι εικόνες 0, z, w είναι σημεία συνευθειακά.

β. $Re(w) = 2$.

16. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z, 1, –iz βρίσκονται στην ίδια ευθεία, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(z) είναι κύκλος.

17. Ο μιγαδικός $z = 2 + i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών u, w που οι εικόνες τους βρίσκονται στις ευθείες $y = x - 2$ και $y = 2x - 1$, αντίστοιχα.

18. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $α, β, γ \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συζυγείς οι μιγαδικοί z, w όταν:

α. $z = (α^2 + i) \cdot i$ και $w = α \cdot (5i - α) + 4i$

β. $w = 3 + |γ - 2| \cdot i$, $z = |α + 2| + (|γ^2 - 4| + |β - 2|) \cdot i$

19. Αν δύο μιγαδικοί αριθμοί έχουν άθροισμα πραγματικό αριθμό και διαφορά φανταστικό αριθμό, να αποδείξετε ότι είναι συζυγείς.

20. Αν z, w είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι:

Α. είναι πραγματικοί αριθμοί οι:

α. $w=\dfrac{\bar{z}+iz}{z+i\bar{z}}$ **β.** $\dfrac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{2z\bar{z}}-\dfrac{z}{\bar{z}}$

Β. είναι φανταστικοί οι αριθμοί οι:

α. $\dfrac{(z+i)^2-(\bar{z}-i)^2}{(z+i)^3+(\bar{z}-i)^3}$ **β.** $\begin{vmatrix} z-u & \bar{z}-\bar{u} \\ w-u & \bar{w}-\bar{u} \end{vmatrix}$

21. Αν ο z είναι μιγαδικός με $z^2=\bar{z}^2$, να αποδείξετε ότι $z\in\mathbb{R}$ ή $z\in\mathbb{I}$.

22. Αν z_1, z_2 $\in$ $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ο $(z_1-z_2)(z_1-\bar{z}_2)$, είναι πραγματικός αριθμός, αν και μόνον αν, $Re(z_1) = Re(z_2)$.

23. Έστω οι z, w με $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{C}-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\bar{z}w-z}{w-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow w=\frac{1}{\bar{w}}$$

24. Αν $w=\dfrac{\bar{z}-z_1z_2z-z_1+z_2}{z_1+z_2}$ με z_1, z_2 $\in$ $\mathbb{C}$, $z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=1$ και $z_1\neq -z_2$, τότε να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{I}$.

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\bar{z}=3z+5+2i$ **β.** $z\bar{z}+i(z-\bar{z})=2$

26. Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} 3z+(1+i)\bar{w}=2+3i \\ (2+i)\bar{z}+(1+i)w=1 \end{cases}$$

27. Για κάθε μιγαδικό z να αποδείξετε ότι:

α. $(z+\bar{z})^2\geq 0$ **β.** $(z-\bar{z})^2\leq 0$

28. Αν Ο, Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών 0, z και z·i στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

29. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot \text{Im}(z_2\bar{z}_3) + z_2 \cdot \text{Im}(z_3\bar{z}_1) + z_3 \cdot \text{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$$

30. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύει ότι $\bar{w} = \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}$, τότε να αποδείξετε ότι: $\text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \text{Im}(w) < 0$.

31. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $w \neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{w}z + w\bar{z}}{2w\bar{w}}$ **β.** $\text{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{w}z - w\bar{z}}{2iw\bar{w}}$

32. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Αν $w = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$, να αποδείξετε ότι:

α. ο w είναι πραγματικός.

β. $-2 \leq w \leq 2$

γ. αν $w = 2$ τότε $z \in \mathbb{R}$.

δ. αν $w = -2$ τότε $z \in \mathbb{I}$.

33. Αν είναι $w = \frac{z+i}{\bar{z}-i} + \frac{\bar{z}-i}{z+i}$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$ και ότι $|w| \leq 2$.

34. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = z\frac{4z-1}{4-z}$, με $z \neq 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου, όταν $w \in \mathbb{R}$.

35. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και M(z) εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Αν είναι $w = 2z - \bar{z}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M, όταν:

α. $\text{Re}(w) = 2$ **β.** $\text{Re}(w^2) = 1$

36. Αν $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$ και $-\bar{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συνευθειακά.

37. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, που είναι εικόνες των ριζών κάθε μίας από τις εξισώσεις:

α. $z^2 + 4z = \bar{z}^2 + 4\bar{z}$ **β.** $z^2 + \bar{z}^2 = z\bar{z}$

38. Να λύσετε την εξίσωση $(3+2i)\overline{z}+(3-2i)z=2$ και να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των ριζών της είναι μια ευθεία κάθετη στη διανυσματική ακτίνα του $w = 3 + 2i$.

39. Αν M_1, M_2, M_3, M_4 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4, αντίστοιχα, με $z_2 \neq 0$, τότε να δείξετε ότι:

α. $\overrightarrow{OM_1} // \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$

β. $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{M_3M_4} \Leftrightarrow \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \mathbb{I}$ με $O(0, 0)$

40. Να αποδείξετε ότι: $(3 + 4i)^{4\nu} + (4 + 3i)^{4\nu} \in \mathbb{R}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

41. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών:

α. $z = -4$ **β.** $z = 2i$

γ. $z = 3 - 4i$

42. Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το μιγαδικό $2 - i$. Να βρείτε την άλλη ρίζα, καθώς επίσης τα α, β.

43. Στην ισότητα: $z^2 + 2iz - \alpha = 0$, ο z είναι φανταστικός αριθμός, ενώ ο α πραγματικός. Να βρεθεί:

α. το διάστημα, στο οποίο παίρνει τιμές ο α και

β. ο αριθμός z συναρτήσει του α.

44. Αν οι αριθμοί $z = 2(\alpha - 2\beta) + (\gamma - \alpha)i$ και $w = -\gamma + (\beta - \alpha)i$ ικανοποιούν τη συνθήκη $z = 2w$, να αποδείξετε ότι οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

45. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης:

$$\eta\mu^2\theta \cdot z^2 - 2\eta\mu\theta \cdot z + 5 - 4\eta\mu^2\theta = 0 , \theta \in (0, \pi)$$

ανήκουν σε υπερβολή, για κάθε $\theta \in (0, \pi)$.

46. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:

$$w = \alpha \cdot z_1 \cdot \overline{z}_1 + \beta \cdot (z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2) + \gamma \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$

$$u = \alpha \cdot z_1 \cdot \overline{z}_1 + \beta \cdot i \cdot (z_1 \cdot \overline{z}_2 - \overline{z}_1 \cdot z_2) + \gamma \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι πραγματικοί.

47. Να αποδείξετε ότι:

α. η παράσταση $A = (1 + i)^{\nu} + (1 - i)^{\nu} \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}$

β. $(-1 + i)^{4\nu} = (-4)^{\nu}$ και να υπολογίσετε την παράσταση Α για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

48. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, όταν ισχύει $(\bar{z}-\alpha)(z+\alpha)=(\bar{z}+\alpha)(\alpha-z)$, $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

49. Έστω συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(1+z)^{\nu}}{1+z^{\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=f(z)$.

β. Αν είναι $z\bar{z}=1$, να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε για ποια ν ορίζεται το f(i).

δ. Να αποδείξετε ότι το f(i) είναι πραγματικός, για κάθε επιτρεπτό ν.

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

50. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z, όταν:

α. $z=\dfrac{(1+i)^2(1-i)^4}{2\sqrt{7}+6i}$

β. $z=\left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

γ. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}i$, με α, β, γ $\in \mathbb{R}^*$

δ. $8+z^2=\left(\sqrt{3}\cdot z^2-6\right)\cdot i$

51. Αν $x, y \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

α. είναι φανταστικός ο αριθμός $w=\dfrac{x|y|-y|x|}{xy+|xy|}$.

β. $|x|=|y|=1 \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{1+xy} \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z| = 1$ τότε $\dfrac{1-z+z^2}{1+z+z^2} \in \mathbb{R}$.

52. Να αποδείξετε ότι:

α. $\left|\bar{z}^2+i\right|=\left|i-z^2\right|$

β. $\left|z+|z|^2\right|=\left|z^2+z\right|$

53. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε τις ισότητες:

α. $|1+\bar{z}_1 z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$

β. $(|z_1|+|z_2|)^2 - |z_1+z_2|^2 = 2(|z_1 z_2| - \mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2))$

γ. $2[|z_1 z_2| - \mathrm{Re}(z_1 z_2)] = |z_1 - \bar{z}_2|^2 - (|z_2|-|z_1|)^2$

54. **α.** Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι: $|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1| = 3$.

β. Αν $(z+2+4i)^{15} = (2z+1+2i)^{15}$, τότε να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις εικόνες του z.

55. Να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = e \Leftrightarrow \ln|z+e^2| = 1 + \ln|z+1|$

β. $\log|z+100| = 1 + \log|z+1| \Rightarrow |z| = 10$

56. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και ισχύει $z^2 = z_1^2 - z_2^2$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 - z| + |z_1 + z| = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$$

57. Δίνονται οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1, z_2 \neq 0$. Αν $(1 - |z_1|)(1 + |z_2|) = 1$, να αποδείξετε ότι $|z_1| \neq |z_2|$.

58. Δίνονται οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει ότι

$$\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2) = \mathrm{Re}(z_2)\cdot\mathrm{Im}(z_1)$$

Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)|$

59. Αν $z \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

α. $|z + |z|| + |z - |z|| = 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

β. $|z + |z|| + |z - |z|| > 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

60. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\bar{z}_1 \cdot z_2 \neq 1$ και ισχύει $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| = 1$, τότε να αποδείξετε ότι $|z_1| = 1$ ή $|z_2| = 1$.

61. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 1$ να αποδείξετε ότι αν $\dfrac{z_1 - \bar{z}_1 z_2}{1 - z_2} \in \mathbb{R}$, τότε $z_1 \in \mathbb{R}$ ή $|z_2| = 1$.

62. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{z_1}{z_2} = \lambda \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

63. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

β. $2|z|^2 = |z + u - w|^2 + |z - u + w|^2 \Leftrightarrow u = w$

γ. $|z + |z|| + |z - |z|| = 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

64. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ και ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

β. $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1{}^2 - z_2{}^2|$

65. Έστω οι $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}^*$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left(\frac{\bar{z} + z_1\bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right)\overline{\left(\frac{\bar{z} + z_1\bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}(z_1 + z_2)$$

τότε να δείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$.

66. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z + w| = |z| = |w|$. Να δείξετε ότι: $|z - w| = \sqrt{3} \cdot |z|$.

67. Αν $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1{}^2 - z_2{}^2|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

β. $z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{I}$ και $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$

68. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = 1$, τότε:

α. να δείξετε ότι: $z_1 + z_2 + z_1 \cdot z_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2 + 1 = 0$

β. να βρείτε το μέτρο του: $\dfrac{z_1z_2 + z_1 + z_2 - 1}{z_1 + z_2 - z_1z_2 + 1}$

69. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z + w + \lambda zw - 1| = |z + w - zw + \lambda|$$

70. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = |w| = 1$ να αποδείξετε ότι:

α. $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ **β.** $\dfrac{z + w}{1 + zw} \in \mathbb{R}$

71. Να δείξετε ότι $z^2 + z = -1 \Leftrightarrow |z| = |z + 1| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

72. Δίνεται ο $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$ **β.** $\dfrac{z^2 + 1}{z} \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$

73. Να αποδείξετε ότι αν $z + u + w = 0$ και $zu + uw + wz = 0$, τότε είναι $|z| = |u| = |w|$.

74. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ και $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 1$ και να βρείτε τους z_1 , z_2 , z_3 .

75. Αν z_1 , z_2 , $z_3 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $z_1 \cdot z_2$, $z_2 \cdot z_3$, $z_1 \cdot z_3$ είναι, επίσης, κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

76. Αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, να αποδείξετε:

α. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ **β.** $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

77. Αν $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$$

78. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, με z_1 , z_2 , $z_3 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

79. Αν z_1 , z_2 , $z_3 \in \mathbb{C}$ διαφορετικοί ανά δύο και ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, να αποδείξετε ότι: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$.

80. Αν οι εικόνες των z_1 , z_2 , $z_3 \in \mathbb{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, να αποδείξετε ότι:

$$(z_2 - z_1)^2 + (z_3 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 = 0$$

81. Να αποδείξετε ότι:

α. $(z-u)^2+(u-w)^2+(w-z)^2=0 \Rightarrow |z-u|=|u-w|=|w-z|$

β. $z^2+u^2+w^2=zu+uw+wz \Rightarrow |z-u|=|u-w|=|w-z|$

82. Έστω ο θετικός αριθμός ρ και οι μιγαδικοί z_1 , z_2 , z_3 τέτοιοι, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$, $|z_1 + z_2 + z_3| = \rho^2$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1| = 8$.

83. Έστω οι $z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει:

$$z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 = 1 , \ |(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)| = 10$$

να βρεθεί το:

$$|(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)(1 + z_3^2)|$$

84. Αν $|z + w| = |z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

α. $\left(\frac{z}{w}\right)^2+\frac{z}{w}+1=0$ **β.** $\left|\frac{z}{w}-1\right|=\sqrt{3}$

85. Αν $z_1 , z_2 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

α. $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2|$

β. $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2 \le 2|z_1 z_2|$

γ. $(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2)i \le 2|z_1 z_2|$

86. Για τους $z_1 , z_2 , z_3 , w \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

α. $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1| \le 2(|z_1|+|z_2|+|z_3|)$

β. $|z_1|+|z_2| \le |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$

γ. $\dfrac{|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_1|}{2} \le |w-z_2|+|w-z_2|+|w-z_3|$

87. Να αποδείξετε ότι:

α. $|z-w|^2 \le (1+|z|^2)(1+|w|^2)$

β. $|z|^2+|u|^2+z\bar{u}+u\bar{z} \ge 0$

γ. $|1+z\bar{u}|^2 \le (1+|z|^2)(1+|u|^2)$

δ. $|z-i|+\left|\frac{1}{z}-i\right| \ge \left|z+\frac{1}{\bar{z}}\right|$ για κάθε $z\in\mathbb{C}^*$

88. Για κάθε z, u, w ∈ ℂ να αποδείξετε ότι:

α. $|z+1|+|z-2|-|z-1|-|z| \le 2$

β. $|z+2|+|z+3| \le |z|+|z+5|$

γ. $z + u + w = 0 \Rightarrow |z| + |u| \ge |w|$

δ. $\left|\frac{z+\bar{z}}{2}\right|+\left|\frac{z-\bar{z}}{2}\right| \le \sqrt{2}\cdot|z|$

89. Να αποδείξετε ότι:

α. $\left|\frac{z}{z+|z|}\right|+\left|\frac{z}{z-|z|}\right| \ge 1$

β. $\frac{|3z+w|}{|2z-1|+|2w+1|} \le \frac{1}{2}+\frac{|z|}{|z+w|}$

γ. $\left|\frac{z}{\eta\mu x}\right|+\left|\frac{w}{\sigma\upsilon\nu x}\right| \ge |z+w|$ αν $x\in\mathbb{R}$, $0 < x < \pi/2$

90. Αν $|z| = |w| = 1$ να αποδείξετε ότι:

α. $|z+1|+|w+1|+|zw+1| \ge 2$

β. $|z+1|+|z^2+1|+|z^3+1| \ge 2$

91. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που είναι εικόνες του $z\in\mathbb{C}$, αν $\log|z-5| \le \log|z-1|$.

92. Για κάθε $z_1, z_2 \in\mathbb{C}$, με $z_1\cdot z_2 = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z_1-z_2}{2}+i\right|+\left|\frac{z_1-z_2}{2}-i\right| \le |z_1|+|z_2|$$

93. Αν για τους $z_1, z_2 \in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z_1| < 1$ και $|z_2| < 1$, τότε να αποδείξετε ότι: $|z_1-z_2| < |1-\bar{z}_1 z_2|$.

94. Για κάθε μιγαδικό z να αποδείξετε ότι:

α. αν $Re(z) < Im(z)$ τότε $|z + 1| < |z + i|$.

β. αν $|1 - z| > |z|$ τότε $2Re(z) < 1$.

γ. αν $|z + 1/z| = 1$ τότε $|z| + 1/|z| \le \sqrt{5}$, $z\in\mathbb{C}^*$.

δ. αν $|z^2 + 1/z^2| \le 2$ τότε $|z + 1/z| \le 2$, $z\in\mathbb{C}^*$.

95. Για κάθε $z, w \in\mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

α. $\left(z\overline{w}+w\overline{z}\right)^2 \ge 0$

β. $\left(z\overline{w}-w\overline{z}\right)^2 \le 0$

γ. $\left(z\overline{w}+w\overline{z}\right)^2 - \left(z\overline{w}-w\overline{z}\right)^2 = \left|2zw\right|^2$

δ. $-2\left|zw\right| \le z\overline{w}+w\overline{z} \le 2\left|zw\right|$

96. Για τον $z\in\mathbb{C}$ ισχύει $z + 1/z = 2008$ (1) τότε:

α. να αποδείξετε ότι η εικόνα του z είναι σημείο του μοναδιαίου κύκλου, με κέντρο το O (0, 0).

β. αν για τους z_1 , z_2 , z_3 ισχύει η σχέση (1), τότε να αποδείξετε ότι: $\left(z_1+z_2+z_3\right)\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right) \le 9$

97. Για τον $z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι: $|z - 1 - 2i| \le 4$.

α. Να αποδείξετε ότι: $9 \le |z - 13 - 7i| \le 17$.

β. Να βρείτε τις τιμές του z, για τις οποίες η παράσταση $|z - 13 - 7i|$ γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη.

98. Αν $z, w, z+w \in \mathbb{C} - \{-i\}$, να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\dfrac{|z-i|}{|z+i|}+\dfrac{|w-i|}{|w+i|}<1$

τότε θα ισχύει η $\dfrac{|z+w-i|}{|z+w+i|}<1$.

99. Αν $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ και $z\in\mathbb{C}$ με $|z| = 1$, τότε:

α. να βρείτε για ποιες τιμές του z η παράσταση $|z_0 - z|$ γίνεται μέγιστη και πότε ελάχιστη.

β. Αν z_1, z_2 οι τιμές του z από το πρώτο ερώτημα και M_1, M_2 οι εικόνες τους στο επίπεδο, με Ο (0, 0), τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία M_1, O, M_2 είναι συνευθειακά.

100. Έστω $z = (2ημα - 1) + (3 - 2συνα)i$, $α \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των σημείων M(z) είναι σημεία κύκλου.

β. Να αποδείξετε ότι $3 \le |z - 4 + i| \le 7$.

γ. Να βρείτε τους μιγαδικούς z με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο.

101. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

α. αν $|z| = 5$ τότε $1 \le |z - 6| \le 11$.

β. αν $|z - 2 - i| \le 5$ τότε $8 \le |z - 14 - 6i| \le 18$.

γ. αν $|z| \le \sqrt{3} - 1$ τότε $|2z \cdot ημθ + z^2| \le 2$, $θ \in \mathbb{R}$.

δ. αν $|z - 1| \le 1$ και $|z - 2| = 1$ τότε $1 \le |z| \le \sqrt{3}$.

102. Αν για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει $|w - 3 + 2i| \le 3$ και $|(1 + i)w + 2| \le 2\sqrt{2}$, τότε να αποδείξετε ότι $|z - w| \le 10$.

103. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες των εξισώσεων:

$$z^2 - z + 1 = 0 \text{ και } z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$$

ορίζουν τις κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

104. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ η εξίσωση:

$$x^2 + 2|z_1|x - |z_2|^2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

έχει πραγματικές ρίζες.

105. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + λz + 4 = 0$ με $-4 < λ < 4$ βρίσκονται σε κύκλο.

106. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και το πολυώνυμο:
$P(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδέιξετε ότι $P(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Πότε ισχύει $P(x_0) = 0$;

107. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις:

α. $|z|^2 - 6\sqrt{z\bar{z}} + 9 = 0$ **β.** $z^2 + |z| = 0$

γ. $z + |z + 1| + i = 0$ **δ.** $z + \bar{z} - 3|z|^2 = 0$

108. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τα συστήματα:

α. $|z-2| = |z| = \sqrt{2}$

β. $|z - i| = |iz - i| = |z - iz|$

γ. $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ και $\left|\frac{3z-1}{z-3}\right| = 1$

δ. $|z| = |w| = 1$ και $z + w + 1 = zw$

109. Δίνονται οι μιγαδικοί z και w, που συνδέονται με τη σχέση $w = \frac{\alpha}{z^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Αν ισχύει ότι $|z - 1| = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε παραβολή.

110. Δίνονται οι $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε $z^2 + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

111. Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $z = w + 1/w$. Αν η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο το O (0, 0) και ακτίνα $\rho = 2$, τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

112. Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = z + \frac{4i}{\bar{z}}$ κινείται, επίσης, σε κύκλο.

113. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z = \frac{\lambda + 2i}{1 + \lambda i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ένα ορισμένο κύκλο.

114. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο O (0, 0) και ακτίνα $\rho = 1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του $w = \frac{\lambda z - i}{iz + \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

115. **α.** Αν $|z + 1| = 2|z - 2|$, να βρείτε τη γραμμή που διαγράφει η εικόνα M του z.

β. Αν $\frac{|z_1+1|}{|z_1-2|}=\frac{|z_2+1|}{|z_2-2|}=2$, να δείξετε ότι $|z_1 - z_2|^2 \le 16$.

116. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z\cdot w = 1$. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο $|z - 3 + 4i| = 5$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε ένα κύκλο.

117. Να προσδιορίσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σύνολα των εικόνων των μιγαδικών z, που αποτελούν τις γραφικές λύσεις των συστημάτων:

α. $\begin{cases}|z+3|\le|z+1|\\ |z+5|\ge|\bar{z}+2|\end{cases}$ **β.** $\begin{cases}|z|=1\\ |z-1|=2|z+1|\end{cases}$

γ. $3 < |z - 4i| \le 5$ **δ.** $1<|\bar{z}-1+i|<2$

118. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου, που είναι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, για τον οποίο ισχύει ότι:

α. $|z - 3| + |z + 3| = 10$ **β.** $|z - 2i| + |z + 2i| = 6$

γ. $|z - 2| - |z + 2| = 2$ **δ.** $|z - 2i| - |z + 2i| = 6$

119. Για τον $z\in\mathbb{C}$ ισχύει: $z^2+\bar{z}^2-2|z|^2+z+\bar{z}=0$. Αν M είναι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι παραβολή.

120. Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z, για τον οποίο ισχύει κάθε μία από τις σχέσεις:

α. $|1 - z|^2 \le 1 - |z|^2$ **β.** $\log|z - 2| < \log|z|$

121. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία A, B αντίστοιχα, που δεν ανήκουν στον κύκλο C: $x^2 + y^2 = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $|z_1+z_2|>|1+z_1\bar{z}_2|$, αν και μόνον αν, ένα μόνο από τα σημεία A, B είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (C).

122. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών 1, z, $1 + z^2$, των οποίων οι εικόνες τους αντιστοίχως στο επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

123. Να δείξετε ότι οι εικόνες των $w_1 = (z_1 + z_2)^{2\nu}$, $w_2 = (z_1 - z_2)^{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1| = |z_2|$, $z_1 \neq z_2$, ορίζουν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

124. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| = 1$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.

125. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\dfrac{(1+z)(1-\bar{z})}{\bar{z}-z} \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι οι εικόνες των 1, –1, z, $\bar{z}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.

126. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, που ικανοποιούν τη σχέση: $|z+3| = |\bar{z}-5+3i|$ (1) . Από τους μιγαδικούς z, που ικανοποιούν την (1), ποιος έχει το μικρότερο μέτρο;

127. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |z - 3i|^2 + |z + 3i|^2$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία όταν $z \neq \pm 3i$.

128. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z) του επιπέδου, που είναι εικόνες του μιγαδικού z αν ισχύει:

$$|z - 2i|^2 + |z - 3 + i|^2 = 13$$

129. Έστω ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει:

$$13\left(z^2 + \bar{z}^2\right) + 24|z|^2 - 50 = 0$$

Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του z είναι υπερβολή.

130. Να δείξετε ότι: $\left(\dfrac{2+i}{1-2i}\right)^{2004} + \left(\dfrac{i-2}{1+2i}\right)^{2006} = 0$.

131. **α.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του $z \in \mathbb{C}$ στο επίπεδο, αν $\frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|z+3i|}=\frac{10}{|z^2+9|}$.

β. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στη C και είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$.

132. Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα και $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_2-z_1|^2$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ όπου O (0, 0).

133. Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα και $|z_1 \cdot z_2|=|\mathrm{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2)|$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ όπου O (0, 0).

134. Έστω ο μιγαδικός $z \neq 1$, για τον οποίο ισχύει: $3z^{2001}+2001 \cdot \bar{z}^{2001}=2004$. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\bar{z})^{2001}=z^{2001}=1$ **β.** $z\bar{z}=1$

γ. ο αριθμός $w=\frac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

135. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = |w|$, να αποδείξετε ότι ο $\frac{(z+w)^{2004}}{(z-w)^{2004}} \in \mathbb{R}$, ενώ ο $\frac{(z+w)^{2003}}{(z-w)^{2003}}$ είναι φανταστικός.

136. Έστω οι διαφορετικοί μιγαδικοί z_1 και z_2 , ώστε ο $w=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ να είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι:

α. $w^{2004} \geq 0$ **β.** $|z_1| = |z_2|$

137. Αν η εξίσωση $(iz - 2)^{\nu} = w(z + 2i)^{\nu}$ με άγνωστο το $z \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει πραγματική ρίζα τότε $|w| = 1$.

138. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(1+iz)^{\nu}=\frac{2+3i}{2\sqrt{3}-i}$ έχει πραγματική ρίζα.

139. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $z^2 - 4z > 0$ **β.** $z^2 - 4z + 3 < 0$

140. Έστω ο μιγαδικός $f(\nu) = 1^{\nu} \cdot (1 - i)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\rho \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

α. $f(4\rho) + f(4\rho + 1) + f(4\rho + 2) + f(4\rho + 3) = 0$

β. $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(101) = 1 + i$