2013

ΘΕΜΑ Α

Α4. **Σ - Λ**

α. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο Κ (2, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z, που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$.

Β2. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 , που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

$$|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma = 5$$

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς α_0 , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να απόδειξετε ότι:

$$|v| < 4$$

ΘΕΜΑ Α

Α4. **Σ - Λ**

α. Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\overline{z}| = |-z|$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους η εξίσωση:

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|$$

έχει μια διπλή ρίζα, τη $x = 1$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z, στο μιγαδικό επίπεδο, είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w, στο μιγαδικό επίπεδο, είναι κύκλος με κέντρο (4, 3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς z, w, του ερωτήματος Β1, να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \le 10 \quad \text{και} \quad |z + w| \le 10$$

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος Β1, να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z^2 - 3z - 2z\overline{z}| = 5$$

2012

ΘΕΜΑ Α

Α4. **Σ - Λ**

α. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \qquad (1)$$

$$|w-5\overline{w}|=12 \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με:

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2}$$

τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z-w| \le 4$$

ΘΕΜΑ Α

Α4. **Σ - Λ**

β. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α + βi και γ + δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z| = 1$

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$

όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z.

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει:

$$u - ui = \frac{i}{w} - w,\ w \neq 0$$

ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ Α

Α4. **Σ - Λ**

α. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-3|^2+|z+3|^2=36$$
$$|2w-1|=|w-2|$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$.

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με:

$$|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$$

τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

2011

ΘΕΜΑ Α

Α3. Σ - Λ

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\overline{z}+3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Β2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z}+3i = \dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι:

$$-2 \leq w \leq 2 \, .$$

ΘΕΜΑ Α

Α3. **Σ - Λ**

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z = α + βi, α, β $\in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$z - \overline{z} = 2\beta$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w} + 3i) = i(3\overline{w} + i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$.

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (0, 3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w .

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημείοα Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο.

2010

ΘΕΜΑ Α

Α4. **Σ - Λ**

α. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α + βi και γ + δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Β2. Να αποδείξετε ότι: $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$.

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει:

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι: $3 \leq |w| \leq 7$.

ΘΕΜΑ Α

Α4. Σ - Λ

ε. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν:

$$z_1 + z_2 = -2 \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = 5$$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2.

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση:

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x + 1)^2 + y^2 = 4$.

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει:

$$2 \cdot \text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 0$$

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$.

2009

ΘΕΜΑ 1

Γ. **Σ - Λ**

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i \, , \, \lambda \in \mathbb{R}$$

Α. **α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_o$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 1

Γ. Σ - Λ

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{(z^{\nu})} = (\overline{z})^{\nu}$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε του μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)\cdot z + (2+i)\cdot \overline{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40 .$$

2008

ΘΕΜΑ 1

Β. **Σ - Λ**

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $αz^2 + βz + γ = 0$ με $α, β, γ \in \mathbb{R}$ και $α \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν:

$$|(i + 2\sqrt{2})\cdot z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 1

Γ. Σ - Λ

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

β. Να αποδείξετε $z_1^3 = -1$.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$$

2007

ΘΕΜΑ 1

Α1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}\ , \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο:

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = α + βi$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1}$, όπου $α, β \in \mathbb{R}$ με $β \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Αν ο αριθμός $z_1{}^2$ είναι φανταστικός και $α \cdot β > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι:

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$$

ΘΕΜΑ 1

Β. **Σ - Λ**

1. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = z \cdot \bar{z}$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (\lambda - 2) + 2\lambda \cdot i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Αν ισχύει $z + \bar{z} = 2$, να βρείτε το $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

γ. Αν $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, να βρείτε το λ.

2006

ΘΕΜΑ 1

Β. **Σ - Λ**

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί με z_1, z_2, z_3 με:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 0 .$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

ΘΕΜΑ 1

Β. **Σ - Λ**

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2| \ .$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_0 = -3$, τότε:

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$.

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Β. **Σ - Λ**

2. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α, β) και Μ΄(α, –β) των συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (1)$$

α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13} \cdot |\bar{z}_2| + i^{2006}$.

γ. Αν $z_1 = 2 + 3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - z_1| = 5$$

2005

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$.

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

ΘΕΜΑ 1

Β. **Σ - Λ**

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 2

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \text{ και } 2\cdot z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i,$$

να βρείτε τους z_1, z_2.

β. Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν:

$$|z-1-3i| \le \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |w-3-i| \le \sqrt{2}$$

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

2004

ΘΕΜΑ 1

Γ. **Σ - Λ**

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε f(1) = 1. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| \cdot f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x - 1) \geq 0,$$

όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g΄.

β. Να αποδείξετε ότι: $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (β) να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

δ. Αν επιπλέον f(2) = α > 0, f(3) = β και α > β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΘΕΜΑ 1

Β. **Σ - Λ**

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται μια συνάρτηση f: [α, β] → ℝ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$. Αν $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$.

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

γ. η εξίσωση $x^3 \cdot f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

2003

ΘΕΜΑ 1

Γ. **Σ - Λ**

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει:

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = α + βi$, όπου $α, β \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι: $Re(w) = 3α - β + 4$ και $Im(w) = 3β - α$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΘΕΜΑ 1

Β. Σ - Λ

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

ΘΕΜΑ 2

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}(z) \ge 0.$$

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x.

2002

ΘΕΜΑ 2

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} \cdot z$, $\nu \in \mathbb{N}$.

α. Να δείξετε ότι: $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

β. Αν $|z| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι:

$$f(13) = \rho \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right]$$

γ. Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

2001

ΘΕΜΑ 1

Α1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$

Α2. **Σ - Λ**

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\bar{z}| = |z|$

Β1. Αν:

$$z_1 = 3 + 4i \quad \text{και} \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$$

να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $|z_1 \cdot z_2|$	**α.** 4
2. $|z_1^2|$	**β.** 2
3. $|z_2|^2$	**γ.** 25
4. $-|\bar{z}_1|$	**δ.** -5
5. $|i \cdot z_2|$	**ε.** -2
	στ. 5
	ζ. 10

Β2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι: $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

2000

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{2z+i}{\bar{z}-2}\ , \quad z \in \mathbb{C}$$

με $z \neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$W_1 = f(9-5i) \qquad\qquad W_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004}$$

β. Θεωρούμε τον πίνακα: $M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix}$

όπου $|W_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού W_1 του ερωτήματος (α). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$.

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο: $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ. Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ, ώστε να ισχύει:

$$M \cdot X = K$$

όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.