ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Επιμέλεια
ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Η Έννοια του Ορίου

Ορισμός

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_o , τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε:

" το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_o, είναι ℓ "

ή " το όριο της f(x) στο x_o είναι ℓ "

- Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_o, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_o", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής:

$$(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta) \text{ ή } (\alpha, x_o) \text{ ή } (x_o, \beta)$$

- Το x_o μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ' αυτό.
- Η τιμή της f στο x_o, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_o ή διαφορετική από αυτό.
- Αν μια συνάρτηση έχει όριο στο x_o, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Αυστηρότερα, διατυπώνουμε τον παρακάτω ορισμό:

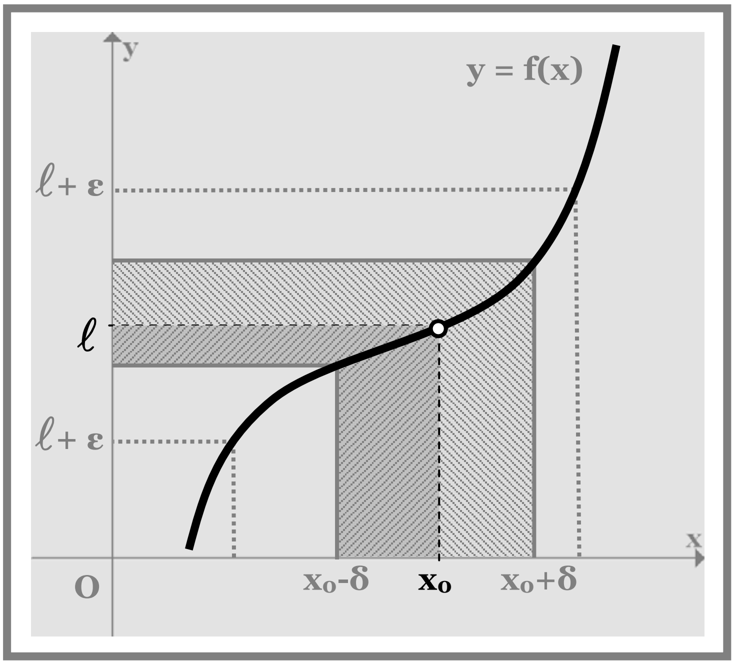
Ορισμός

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$. Θα λέμε ότι το όριο της f, όταν το x τείνει στο x_o, είναι ℓ και θα γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

αν και μόνον αν, για κάθε $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ υπάρχει $\boldsymbol{\delta > 0}$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\mathbf{x \in (\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)}$, με $\mathbf{0 < |x - x_o| < \delta}$ να ισχύει:

$$\mathbf{|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon}$$



Μεθοδολογία

Γενικά, προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή ενός ορίου, **αντικαθιστούμε** όπου $x = x_0$ και προχωρούμε στην εκτέλεση των πράξεων. Στη φάση αυτή, πιθανότατα να δημιουργηθούν διάφορα προβλήματα υπολογισμού, τα οποία καλούνται **μορφές απροσδιοριστίας** και τις οποίες θα εξετάσουμε αργότερα.

Πλευρικά Όρια

Ορισμός

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_o από **μικρότερες** τιμές **($x < x_o$)** , τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_o **από τα αριστερά**, είναι ℓ_1"

και αναλόγως

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_o από **μεγαλύτερες** τιμές **($x > x_o$)** , τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_o **από τα δεξιά**, είναι ℓ_2"

- Τους αριθμούς $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = \ell_2$ τους ονομάζουμε πλευρικά όρια της f στο x_o και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_o, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_o.
- Προκειμένου να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_o, θα πρέπει όχι μόνο να υπάρχουν τα πλευρικά όριο στο x_o αλλά και να ταυτίζονται. Συνεπώς, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell$$

- Αν μια συνάρτηση f ορίζεται μόνο δεξιά ή μόνο αριστερά του x_o , τότε το όριό της στο x_o ταυτίζεται με το δεξί ή το αριστερό όριο, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα:

  Αν η f ορίζεται σ' ένα διάστημα (x_o, β), αλλά όχι στο (α, x_o) τότε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell$$

  Αν η f ορίζεται σ' ένα διάστημα (α, x_o), αλλά όχι στο (x_o, β) τότε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x)$$

Μεθοδολογία

Τα πλευρικά όρια, συνήθως, τα χρειαζόμαστε στις συναρτήσεις, οι οποίες αλλάζουν τύπο, δεξιά ή αριστερά του σημείου x_o.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \ x < x_o \\ f_2(x) & , \ x > x_o \end{cases}$$

Για **$x < x_o$** , υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_o^-} f(x)$.

Για **$x > x_o$** , υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_o^+} f(x)$.

- Αν $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell$ τότε υπάρχει το όριο της f στο x_o και είναι: $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$.
- Αν $\lim_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_o^+} f(x)$ τότε **δεν** υπάρχει το όριο της f στο x_o.

Ιδιότητες των Ορίων

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται τα παρακάτω:

1. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} [f(x) - \ell] = 0$

2. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to o} f(x_o + h) = \ell$

3. $\lim\limits_{x\to x_o} c = c$ όριο **σταθερής** συνάρτησης

4. $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$ όριο **ταυτοτικής** συνάρτησης

5. $\lim\limits_{x\to x_o} x^{\nu} = x_o^{\nu}$

Όρια & πράξεις

Επιπλέον, αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε:

6. $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) + \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

   Γενικά:

   $\lim\limits_{x\to x_o} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x)] = \lim\limits_{x\to x_o} f_1(x) + \lim\limits_{x\to x_o} f_2(x) + \ldots + \lim\limits_{x\to x_o} f_\nu(x)$

7. $\lim\limits_{x\to x_o} [\kappa \cdot f(x)] = \kappa \cdot \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$

8. $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_o} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

   Γενικά:

   $\lim\limits_{x\to x_o} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_\nu(x)] = \lim\limits_{x\to x_o} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_o} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to x_o} f_\nu(x)$

9. $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}$, με $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) \neq 0$

10. $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\right|$

11. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0

12. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$, με $\nu\in\mathbb{N}^*$

Κι ακόμα, γενικά ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

Ισχύουν, επίσης, τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα

Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $x\in P$, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0) \text{ , για κάθε } x_0\in\mathbb{R}$$

Θεώρημα

Αν P(x), Q(x) πολυώνυμα του x, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ , για κάθε } x_0\in\mathbb{R} \text{ με } Q(x_0)\neq 0.$$

Μεθοδολογία

Προσοχή!

Συχνά, όταν στις ασκήσεις εργαζόμαστε με δύο ή περισσότερες συναρτήσεις, εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων δίχως ιδιαίτερη περίσκεψη. Θα πρέπει να θυμόμαστε, συνεχώς, ότι οι ιδιότητες εφαρμόζονται μόνο όταν υπάρχουν τα επιμέρους όρια των συναρτήσεων. Θα πρέπει λοιπόν, νωρίτερα, να εξετάζουμε την ύπαρξή τους.

Όριο και Διάταξη

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 , τότε:

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε είναι και **f(x) > 0** , κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε είναι και **f(x) < 0** , κοντά στο x_0 .

Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

- Στην περίπτωση που f(x) < g(x) ΔΕΝ συνεπάγεται απαραίτητα ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h .

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Μεθοδολογία

- Το κριτήριο της παρεμβολής χρησιμοποιείται, συνήθως, όταν μας δίνεται μια ανισοτική σχέση. Στην περίπτωση αυτή, πιθανότατα να χρειάζεται κάποιος μετασχηματισμός. Θα πρέπει, ωστόσο, να προσέχουμε, κατά τη διάρκεια των μετασχηματισμών, καθότι συχνά απαιτείται πολλαπλασιασμός ή διαίρεση των μελών με κάποιον αριθμό. Δηλαδή, αν ο αριθμός αυτός είναι θετικός ή αρνητικός, οπότε θα επηρεάσει και τη φορά της ανισότητας. Έτσι, ενίοτε, όταν δε γνωρίζουμε το πρόσημο, είμαστε υποχρεωμένοι να παίρνουμε ξεχωριστές περιπτώσεις, υπολογίζοντας πλευρικά όρια.

- Χρήσιμες είναι και οι παρακάτω διαδικασίες:

  $$\alpha^2 \le \beta^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \le \sqrt{\beta^2} \Leftrightarrow |\alpha| \le |\beta| \Leftrightarrow -|\beta| \le \alpha \le |\beta|$$

  και

  $$\alpha^2 \le \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| \le \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \le \alpha \le \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Τριγωνομετρικά Όρια

Για τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, σε ένα σημείο x_0, αποδεικνύονται οι εξής σχέσεις:

$$|\eta\mu x| \le |x| \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Μεθοδολογία

- Όταν αντιμετωπίζουμε όρια της μορφής $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}$, τότε θέτουμε $\kappa x = u$, οπότε όταν $x \to 0$ θα είναι και $u \to 0$. Έτσι, έχουμε: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \kappa \cdot \frac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x} = \lim\limits_{u \to 0} \kappa \cdot \frac{\eta\mu(u)}{u} = \kappa \cdot 1 = \kappa$.

- Όταν αντιμετωπίζουμε όρια της μορφής $\eta\mu(\infty)$ ή $\sigma\upsilon\nu(\infty)$, τότε εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής, με τη βοήθεια των παρακάτω σχέσεων:

  $-1 \le \eta\mu x \le 1 \iff |\eta\mu x| \le 1$ και $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \iff |\sigma\upsilon\nu x| \le 1$

Όριο Σύνθετης Συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι το όριο της σύνθεσης fog , δύο συναρτήσεων f και g, σε ένα σημείο x_o είναι:

$$\lim_{x \to x_o} f(g(x)) = \lim_{u \to u_o} f(u)$$

όπου: $\mathbf{u = g(x)}$ $\mathbf{u_o = \lim_{x \to x_o} g(x)}$ $\mathbf{g(x) \neq u_o}$ κοντά στο x_o

Μεθοδολογία

Για να υπολογίσουμε το όριο μιας σύνθετης συνάρτησης fog σ' ένα σημείο x_o, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Θέτουμε $g(x) = u$ και λύνουμε ως προς x .
- Υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_o} g(x)$, αν υπάρχει, έστω u_o.
- Υπολογίζουμε το $\lim_{u \to u_o} f(u)$, αν υπάρχει, έστω ℓ .

Το τελευταίο είναι και το ζητούμενο όριο.

Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f , που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(α, x_0)\cup(x_0, β)$. Ορίζουμε:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε Μ > 0 υπάρχει δ > 0 τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(α, x_0)\cup(x_0, β)$, με $0 < |x - x_0| < δ$ να ισχύει:

$$\mathbf{f(x) > M}$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, όταν για κάθε Μ > 0 υπάρχει δ > 0 τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(α, x_0)\cup(x_0, β)$, με $0 < |x - x_0| < δ$ να ισχύει:

$$\mathbf{f(x) < -M}$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Μεθοδολογία

■ Οι παρακάτω προτάσεις είναι, επίσης, πολύ χρήσιμες. Ωστόσο, χρειάζεται σε κάθε περίπτωση να αποδεικνύονται, καθώς δεν περιλαμβάνονται στην διδακτέα ύλη:

Μη πεπερασμένο όριο & διάταξη

Α. Αν ισχύει ότι **f(x) ≥ g(x)** κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

B. Αν ισχύει ότι **f(x) ≤ g(x)** κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Απόδειξη

Α. Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, άρα $g(x) > 0$, κοντά στο x_0. Όμως, $f(x) \geq g(x)$ άρα είναι και $f(x) > 0$, κοντά στο x_0.

Συνεπώς, κοντά στο x_0, είναι: $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} \leq \dfrac{1}{g(x)}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, τότε απ' το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \\ \dfrac{1}{f(x)} > 0 \\ \text{κοντά στο } x_0 \end{array}\right\} \text{άρα } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} = +\infty$$

B. Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, άρα $g(x) < 0$, κοντά στο x_0. Όμως, $f(x) \leq g(x)$ άρα είναι και $f(x) < 0$, κοντά στο x_0.

Συνεπώς, κοντά στο x_0, είναι: $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 0 > \dfrac{1}{f(x)} \geq \dfrac{1}{g(x)}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, τότε απ' το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \\ \dfrac{1}{f(x)} < 0 \\ \text{κοντά στο } x_0 \end{array}\right\} \text{άρα } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} = -\infty$$

Ιδιότητες Μη Πεπερασμένων Ορίων

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται τα παρακάτω:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ κοντά στο x_0

   $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow f(x) < 0$ κοντά στο x_0

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = -\infty$

   $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$

3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

4. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

   $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

5. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

6. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$

Όριο Αθροίσματος & Γινομένου

$\lim\limits_{x\to x_0}$						
f	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
f + g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

$\lim\limits_{x\to x_0}$										
f	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
g	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
f · g	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Οι περιπτώσεις, που παρουσιάζονται με ερωτηματικό, υπονοούν ότι το όριο σε κάθε περίπτωση (αν υπάρχει), εξαρτάται από τις δοθέντες συναρτήσεις και δεν υπάρχει γενική απάντηση.

Απροσδιόριστες μορφές αθροίσματος & γινομένου

$$(+\infty)+(-\infty) \qquad\qquad 0\cdot(\pm\infty)$$

Απροσδιόριστες μορφές διαφοράς & πηλίκου

$$(+\infty)-(+\infty) \qquad (-\infty)-(-\infty) \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Απροσδιόριστες Μορφές 0/0 & α/0

■ Απροσδιόριστη Μορφή 0/0

Αν το όριο, που θέλουμε να υπολογίσουμε, είναι της μορφής: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, αλλά συμβαίνει να είναι: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε προχωρούμε σε παραγοντοποίηση των παραστάσεων.

Ζητούμενο της παραγοντοποίησης είναι να εμφανιστεί, σε αριθμητή και παρονομάστη, παράγοντας της μορφής $(x - x_0)$, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την απροσδιοριστία. Στη συνέχεια, τον απλοποιούμε αίροντας έτσι την απροσδιοριστία.

Σχηματικά, έχουμε: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot P(x)}{(x - x_0) \cdot Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$

■ Απροσδιόριστη Μορφή 0/0 με ρίζες

Αν το όριο, που θέλουμε να υπολογίσουμε, είναι της προηγούμενης μορφής, αλλά περιλαμβάνει επιπλέον και ρίζες, τότε η παραγοντοποίηση δεν είναι, συνήθως, εφικτή. Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- Αν τα υπόρριζα δεν μηδενίζονται στο x_0 , τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση, αυτού που περιέχει τη ρίζα. Ενίοτε, πολλαπλασιάζουμε με τις συζυγείς παραστάσεις και του αριθμητή και του παρονομαστή.

  Ενδεικτικά, παραθέτουμε τις συζυγείς παραστάσεις των πιο συνηθισμένων ταυτοτήτων, προσαρμοσμένες στη λογική των ριζικών:

  $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 = \alpha - \beta$

  $(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}\right) = (\sqrt[3]{\alpha})^3 - (\sqrt[3]{\beta})^3 = \alpha - \beta$

- Αν τα υπόρριζα μηδενίζονται στο x_0 , τότε η μέθοδος των συζυγών παραστάσεων δεν είναι, συνήθως, χρήσιμη. Στην περίπτωση αυτή, προχωρούμε σε τυπική παραγοντοποίηση, εκμεταλλευόμενες τις ιδιότητες των ριζών.

■ Απροσδιόριστη Μορφή 0/0 με απόλυτες τιμές

Αν **καμία** απόλυτη τιμή **δε** μηδενίζεται στο x_0 τότε:

- Βρίσκουμε το πρόσημο των παραστάσεων, που βρίσκονται μέσα στα απόλυτα, κοντά στο x_0. Αυτό μπορεί να γίνει είτε κατασκευάζοντας πίνακα προσήμων, είτε υπολογίζοντας το όριο της παράστασης, όταν $x \to x_0$.
- Βγάζουμε τις απόλυτες τιμές.
- Συνεχίζουμε, κατά τα γνωστά, κάνοντας παραγοντοποίηση και απλοποίηση.

Αν **τουλάχιστον μία** απόλυτη τιμή μηδενίζεται στο x_0 τότε:

- Αν αλλάζουν τα πρόσημα δεξιά κι αριστερά του x_0, χρειάζεται να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια. Σε κάθε περίπτωση, προχωρούμε με τον τρόπο, που περιγράφτηκε νωρίτερα.

■ Απροσδιόριστη Μορφή α/0

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

■ Όρια της μορφής 1/0

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες:

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Συχνά, για να υπολογίσουμε το πρόσημο του παρονομαστή, χρειάζεται να εξετάσουμε τα πλευρικά όρια στο x_0.

Όρια της μορφής α/0

- Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.
- Χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο παράγοντες έτσι, ώστε η παράσταση που μηδενίζει τον παρονομαστή να βρεθεί μόνη της, σε παράγοντα της μορφής $1/p(x)$.
- Υπολογίζουμε το πρόσημό της, αν δηλαδή είναι $+\infty$ ή $-\infty$.
- Υπολογίζουμε το όριο του δεύτερου παράγοντα, με απλή αντικατάσταση.
- Συνθέτουμε την απάντησή μας, με απλούς κανόνες προσήμων.

Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο

Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \alpha)$, αντίστοιχα.

Βασικά Όρια ($\nu\in\mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty & \nu = \text{άρτιος} \\ -\infty & \nu = \text{περιττός} \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0$$

Όριο Πολυωνυμικής και Ρητής Συνάρτησης

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

Για την ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$, με $\alpha_\nu, \beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

Όριο Εκθετικής και Λογαριθμικής Συνάρτησης

- Αν α > 1 τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$$

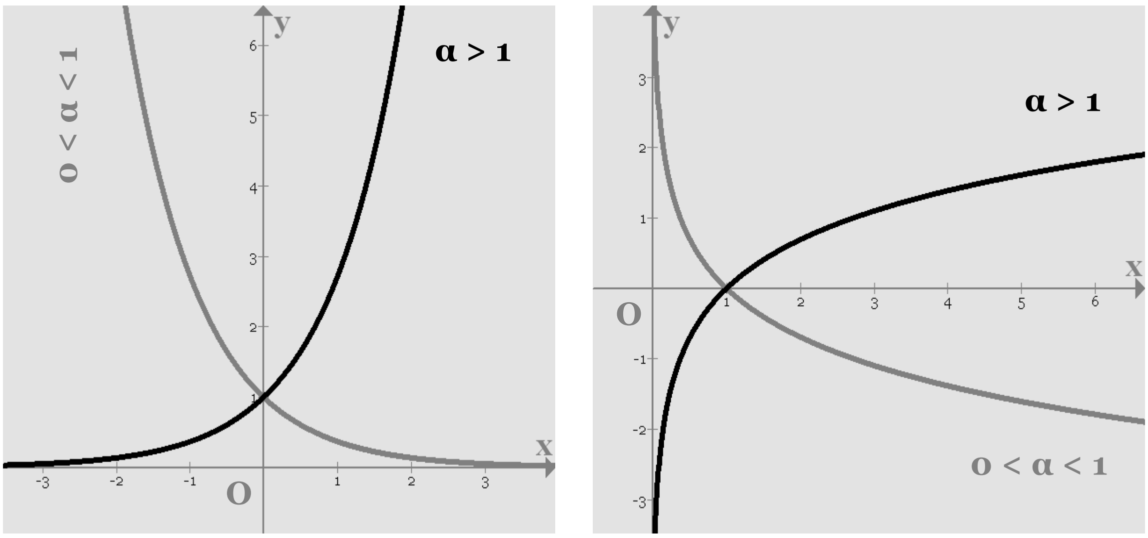
$$\lim_{x\to 0}(\log_\alpha x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(\log_\alpha x) = +\infty$$

- Αν 0 < α < 1 τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(\log_\alpha x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(\log_\alpha x) = -\infty$$

- Συμβουλή : Σε καμία περίπτωση, δε χρειάζεται να αποστηθίσουμε μηχανικά τα προηγούμενα. Αρκεί να έχουμε στο νου μας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Αυτές τα λένε όλα.



Πεπερασμένο Όριο Ακολουθίας

Ορισμός

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση α: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

- Η εικόνα α(ν) της ακολουθίας συμβολίζεται ως α_ν .
- Η ακολουθία α συμβολίζεται ως (α_ν) .

Ορισμός

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε ε > 0 , υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει:

$$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$$

Μεθοδολογία

- **Απόλυτες τιμές**

  Αν τα όρια περιέχουν παραστάσεις με απόλυτες τιμές, τότε πιθανότατα μπορούμε να απαλλαγούμε από τα απόλυτα.

  Αν το $x \to +\infty$, τότε μπορούμε να περιορίσουμε το x σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(M, +\infty)$, όπου M > 0. Αν, πάλι, το $x \to -\infty$, τότε μπορούμε αναλόγως να περιορίσουμε το x σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(-\infty, -M)$, όπου M > 0. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να "βγάλουμε" τις απόλυτες τιμές, με το ανάλογο πρόσημο.

- **Άρρητες συναρτήσεις**

  Για τον υπολογισμό ορίων στο $\pm\infty$ μιας άρρητης συνάρτησης, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

  - Βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο του υπόρριζου.
  - Χωρίζουμε τις ρίζες.
  - Υπολογίζουμε το όριο του γινομένου.

  Αν, παρ' όλα αυτά, καταλήξουμε σε απροσδιόριστη μορφή $0\cdot\infty$, τότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή της άρρητης παράστασης, που "ευθύνεται" για την απροσδιοριστία.

- Όταν η απροσδιοριστία αφορά σε κυβικές ρίζες, τότε κάνουμε χρήση της ταυτότητας: $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$

- **Εκθετικές συναρτήσεις**

  Για την άρση της απροσδιοριστίας, όταν υπολογίζουμε όρια εκθετικών συναρτήσεων:

  - αν περιέχουν δυνάμεις της μορφής $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x$, $\alpha > 1$ βγάζουμε κοινό παράγοντα τη **μεγαλύτερη** εκθετική δύναμη της μορφής α^x. Έτσι, σχηματίζονται εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$, με $\beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = 0$.

  - αν περιέχουν δυνάμεις της μορφής $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x$, $\alpha > 1$ βγάζουμε κοινό παράγοντα τη **μικρότερη** εκθετική δύναμη της μορφής α^x. Έτσι, σχηματίζονται εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$, με $\beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x = 0$.

Συνέχεια Συνάρτησης

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο xο** , όταν:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Μια συνάρτηση f, που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Σύμφωνα με τον ορισμό, είναι προφανές ότι μια συνάρτηση **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α. **δεν υπάρχει** το όριό της στο x_0.

β. υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι **διαφορετικό** από την τιμή της $f(x_0)$.

Βασικές Συνεχείς Συναρτήσεις

- Κάθε **πολυωνυμική συνάρτηση** ℝ είναι συνεχής. Λογικό, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
- Κάθε **ρητή συνάρτηση** $\frac{P}{Q}$ είναι, επίσης, συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
- Οι **τριγωνομετρικές συναρτήσεις f(x) = ημx** και **g(x) = συνx** είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} ημx = ημx_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} συνx = συνx_0$$

- Η **εκθετική συνάρτηση f(x) = $α^x$** , $0 < α \neq 1$, είναι συνεχής.
- Η **λογαριθμική συνάρτηση f(x) = $\log_α x$** , $0 < α \neq 1$, είναι συνεχής.

Πράξεις Συνεχών Συναρτήσεων

Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_o , τότε είναι συνεχείς στο x_o και οι συναρτήσεις:

$$\mathbf{f+g} \;,\; \mathbf{c\cdot f} \;(c\in\mathbb{R}) \;,\; \mathbf{f\cdot g} \;,\; \mathbf{f/g} \;,\; |\mathbf{f}| \;,\; \sqrt[\nu]{\mathbf{f}}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα, που περιέχει το x_o .

- Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις **f(x) = εφx** και **g(x) = σφx** είναι, επίσης, συνεχείς, ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_o)$, τότε και η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_o .