ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΟΡΙΑ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^3-3x^2+5x-6}$ **β.** $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^4-4}{x^2-2}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+8x^2+16}{x^4+2x^3}$

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x+1}{x-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

2. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{6-x}-\sqrt{x+6}}{x+2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3-x}$

γ. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{2x\sqrt{x}-6x+3\sqrt{x}-9}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

3. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-3}+x-3}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}-4x^2+3}{x-1}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

4. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x|x-1|-6}{|x-3|-2(x-3)}$

β. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ όπου $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|+|x+2|}{4x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}\cdot ημ\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}\cdot ημ\left(π\dfrac{x-1}{2}\right)\right]$

5. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ^2x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(πx)}{x^2-x}$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ^2x-2\cdot συν^2x+2}{\sqrt{x^2+4}-2}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{|x|}$

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-3\cdot ημx}{x+2\cdot ημ4x}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συν(4x)}{x^2}$

ζ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+ημx}-\sqrt{4-ημx}}{x}$ **η.** $\lim\limits_{θ\to\frac{π}{2}}\left(\dfrac{1}{συνθ}-εφθ\right)$

6. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-3\cdot ημx}{x+2\cdot ημ4x}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{4x^3-x^2}{|x|}\cdot συν\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$

7. Να βρεθεί ο $ν\in\mathbb{N}$ όταν: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx+ημ(2x)+...+ημ(νx)}{x}=28$

8. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{3x+3}\le(x-2)\cdot f(x)+3\le 3\sqrt{x+7}-6 \text{ , για κάθε } x\in(1,\,3)$$

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)\le h^2(x) \text{ , για κάθε } x\in(α\,,\,x_0)\cup(x_0\,,\,β)$$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=0$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

10. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|2-g(x)|-g(x)+x^2+x}{x^2-4}$ αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -2}g(x)=7$.

11. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - x\cdot f^2(x) + x^2\cdot f(x) = x^2 \cdot ημx\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ αν είναι γνωστό ότι υπάρχουν.

12. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+5}{f(x)-2}=0$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-5$

13. Αν $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(x-1)]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}-1}\right]=3$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]$.

14. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-3\cdot ημx}{\sqrt{x+1}-1}\right]=1$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

15. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, αν $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)-g(x)]=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}[2f(x)+g(x)]=4$.

ΓΕΝΙΚΕΣ

16. Για τις συναρτήσεις f, g να αποδειχτούν:

α. Αν είναι $\lim\limits_{x\to α} f^2(x)=0$, τότε: $\lim\limits_{x\to α} f(x)=0$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\left[12f(x)-4f^2(x)\right]=9$, τότε να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

γ. Αν: $f^2(x) + g^2(x) + 2\cdot f(x) - 4\cdot g(x) + 5 \le \sqrt{x}$ τότε να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{f(x)+x}{x-3}\right]=2$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

ε. Αν $f^2(x) - 2\cdot f(x) - συν^2x \le 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

17. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x}{x-1}=2$ είναι:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)+1}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{f^2(x)-x^2}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-x^2}{f(x)+1}$

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$

18. Η συνάρτηση f έχει πραγματικό όριο στο $x_0 = 2$ και ισχύει ότι:

$$(x-2)\cdot f(x) \le x^2 - 7x + 10 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

19. Έστω μια περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α. Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x-1)-f(1-x)\right]$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

20. Να βρεθούν τα α, β ∈ℝ, ώστε να έχει όριο στο $x_0 = 1$ η συνάρτηση f,

με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+\beta x+1}{x-1} & , x<1\\ x+2\dfrac{\eta\mu(\alpha(x-1))}{x^2-x} & , x>1\end{cases}$.

21. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$2\sqrt{2x} \le f(x) \le x+2 \text{ , για κάθε } x \ge 0$$

Να βρείτε τα:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{\sqrt{x+2}-2}$

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+1}-\sqrt{5}}{x-2}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-1|-3}{x^2-4}$

22. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x) = f(1-x)$.

23. Η συνάρτηση f είναι άρτια. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ αν ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to -3}\left(f(x)+2x-5\right)=4$.

24. Αν για κάθε x > 0 ισχύει $f^2(x) + 4 < x + 4\cdot f(x)$, να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

25. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-x}{x-3\sqrt{x}+2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-2x+1}$

γ. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-2x}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-4}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}$

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}$

26. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-2|x|+1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x|x|}$

γ. $\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{5-x^2}{\eta\mu x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

ε. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3-2x^2}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+5}{|x+1|}-\dfrac{x+3}{(x+1)^2}\right)$

27. **α.** Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)}{|x-2|}=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-4}{g(x)}=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

γ. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)(-x^2-x)\right]=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+3}-5}{f(x)}=+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x^2-4)\cdot f(x)-3x+2\right]=+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

στ. Αν $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-3$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|g(x)+2x|+g(x)-6+4x}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}$.

ΟΡΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ x_o

28. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & , x<0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2+2\sqrt{x}} & , x>0\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, για κάθε α∈ℝ.

29. Αν $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , x<\lambda\\ x^2-x+\lambda & , x\geq\lambda\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, για κάθε λ∈ℝ.

30. Να βρείτε το λ∈ℝ, ώστε $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-5\lambda}{(x-\lambda^2)^2}=-\infty$.

31. Να βρείτε τα λ, μ ∈ℝ, αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lambda x-\mu\sqrt{x}+2}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2}=8$.

32. Να αποδειχτεί ότι για κάθε λ∈ℝ, η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$, δεν έχει πραγματικό όριο στο 1 .

33. Να βρείτε τους λ, μ ∈ℝ, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^3-(\lambda-\mu)x^2-(2\lambda-\mu+1)x+3-\mu}{x^3-3x+2}$$

να έχει πραγματικό όριο ℓ, στο $x_o = 1$.

34. Για κάθε α∈ℝ, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-\alpha}{\sqrt[3]{x+7}-2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-\alpha}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-\alpha x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2\sqrt{x^2+21}-5\alpha}{\sqrt{x^2+5}-3}$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

35. Να υπολογιστούν όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{2x^3-1}{x+1}\right)$ **β.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(-x+2)^{13}(x^2+1)^6}{(x-3)^{24}}$

36. Να υπολογιστούν όρια:

α. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$ **β.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sqrt{x^2+3}-x^2\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x-1}\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}$

ε. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2}+2x\right)$

37. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2\eta\mu x}{x^2+\sqrt{x^2+3}}$ **β.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x^2}{x^3}$

γ. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+1-2|3-x|}{|x-2|+3}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x^2-2x-3|-4}{|x^2+2x+5|}$

38. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)+5x-7\right)=3$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **β.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2f(x)-3x+5}{5x^2-2x+1}$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

39. Να υπολογιστούν όρια:

α. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x(x^2-2x)}{x^2-4x}$ **β.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x+3^{x+1}}{e^{x+2}+3^{x+3}}$

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^{x+1}-3^{x+3}+1}{2^{x+1}+3^{x}+5}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-2\log x}{1+2\log x}$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

40. Αν $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^3-(\lambda-\mu)x^2+\mu x-3}{x+1}$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, για κάθε λ, μ $\in\mathbb{R}$.

41. Αν $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}-\alpha x-\beta$, να βρεθούν οι α, β $\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3\beta+11$.

42. Αν $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}-\lambda x$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

43. Αν $f(x)=\sqrt{x^2-4}+x\cdot\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi$, με φ, ω $\in(0,\pi)$, να βρείτε τα φ, ω, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

44. Να βρεθούν οι α, β $\in\mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\alpha x+\beta\right)=12$.

45. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, αν α + β + γ = 0 με α, β, γ $\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\alpha\sqrt{x^2+1}+\beta\sqrt{x^2+2}+\gamma\sqrt{x^2+3}$.

46. Αν $\alpha>0$, να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha^x}{\alpha^x+1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha^x+2^{x+1}}{\alpha^{x+1}+2^x}$

47. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις:

α. αν $f(x)=\sqrt{\lambda x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+3}$

β. αν $f(x)=\sqrt{9x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-3x}+2\lambda x$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

48. Έστω η $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+\kappa^2}{x}\right)$, κ > 0 .

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

β. Να δείξετε ότι f(x) – lnx > 0 και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$.

49. Αν για τη συνάρτηση f: ℝ → ℝ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, τότε να βρείτε το:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot f(3x)-f(-x)\cdot \eta\mu 2x}{3x^2-\eta\mu^2 x}$.

50. Για τη συνάρτηση f: ℝ → ℝ ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot \eta\mu x+1-\sigma\upsilon\nu 4x}{\sqrt{4+x^2}-2}=4$,

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

51. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\eta\mu(x-3)}{2\sqrt{x+3}-3}$

β. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+1}-2}$

γ. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

δ. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(3\pi x)}{\eta\mu(4\pi x)}$

52. Αν για κάθε x∈ℝ είναι: |ημx – x·f(x)| ≤ |x – ημx| , να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

53. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{\eta\mu(x-1)}$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu^2 x)}{x^2}$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}$

δ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

54. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν $x \cdot f(x) = ημ3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν $x \cdot f(x) + 5x^2 + 2 = ημx + (x-1)(x-2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

55. Αν $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-2x}{x-2} = 1$ και η f είναι συνεχής, τότε να βρείτε το: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3f(x) - 6x}{x-2}$.

56. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, όταν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

57. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $θ \in (0, 1)$, ώστε $|f(x) - f(y)| \leq θ \cdot |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

58. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$ημ^2x + 2x \cdot f(x) \leq f^2(x) \leq ημ^2x + x \cdot (x + 2f(x))$$

59. Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα:

$$f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) + 5 \leq 4g(x) + συν^2 x \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = π/2$.

60. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^5(x) + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

61. Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2000}{2001} x^2 \cdot ημ\dfrac{1}{x} & , \ x < α \\ x^3 + x & , \ x \geq α \end{cases}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

62. Να απόδειξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα:

α. $2x = π(2συνx - 1)$, στο $(0, π/2)$.

β. $\sigma\upsilon\nu x = 3 - 2x$, στο $(\pi/4 , \pi/2)$.

γ. $\dfrac{x-1}{x-2x^2} = \varepsilon\varphi x$, στο $(1/2 , \pi/2)$

63. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με $f(x) = (x^2 + 1)(x - \alpha) + (2 - \eta\mu x)(x - \beta)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

64. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{\kappa^2}{x} + \dfrac{\lambda^2}{x+1} + \dfrac{\mu^2}{x-1} = 0$, με κ, λ, μ $\neq 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , στο διάστημα $(-1, 1)$, για τις οποίες ισχύει ότι: $\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

65. Έστω η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta + 1 < 0$. Να αποδειχτεί ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

66. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(\alpha) \geq \alpha^2$ και $f(\beta) \leq \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

67. Αν f, g είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $[0, 2]$ και $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ και $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) + g(x_0) = x_0$.

68. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x \in [0, 2]$ και $0 < f(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [0, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 2)$, τέτοιο ώστε $f^2(x_0) - 2f(x_0) + x_0 = 0$.

69. Έστω $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(0) = f(\pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$, ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \pi/2)$.

70. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) + f(x + 2) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι περιοδική.

β. Υπάρχουν άπειροι $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = f(x_0 + 2)$.

71. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ με $f(-1) \neq f(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 2)$, ώστε $3f(-1) + 4f(2) = 7f(x_0)$.

72. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής και γνήσια φθίνουσα συνάρτηση με $f(\alpha) - f(\beta) \neq 0$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$ και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$(\kappa + \lambda + \mu)\cdot f(x_0) = \kappa\cdot f(\alpha) + \lambda\cdot f(\gamma) + \mu\cdot f(\beta)$$

73. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = 2000\cdot\alpha\cdot x\cdot e^x$ και $g(x) = 2001\cdot\beta\cdot(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$. Αν το (α, β) είναι σημείο της ευθείας $y = \frac{2000}{2001}x$, με $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

74. Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\cdot\eta\mu x + \beta = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, της οποίας η απόλυτη τιμή δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\alpha + \beta$.

75. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(x) + f(2 - x) = 0$, για κάθε x, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

76. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ώστε να ισχύει:

$$\alpha^2\cdot f(\alpha) + \beta^2\cdot f(\beta) = -f(\alpha) - f(\beta)$$

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

77. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(1) + f(2) + f(3) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = 0$.

78. Αν α_1 , α_2 , ... , $\alpha_{1994} \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1]$ ώστε:

$$|x_0 - \alpha_1| + |x_0 - \alpha_2| + \ldots + |x_0 - \alpha_{1994}| = 997$$

79. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f αν:

α. $f(x) = (x - x^2)(1 - e^{-x})$

β. $f(x) = (4x^2 - 5\pi x + \pi^2)\cdot\eta\mu x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

γ. $f(x) = \sqrt{6 - x} - x$

80. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις f: ℝ → ℝ αν ισχύει ότι: $f^2(x) - 2f(x)\cdot ημx = 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

81. Έστω η συνεχής συνάρτηση f, ώστε $4x^2 + 9\cdot f^2(x) = 36$, για κάθε $x\in(-3, 3)$. Να βρείτε τον τύπο της αν $f(0) = -2$.

82. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$, $0 < x < 1$

β. $f(x) = x^3 - συνx$, $x\in[0, π/2]$

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

84. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο ℝ, ώστε:

- $8\cdot ημ(x-4) \le (x-4)\cdot f(x) \le x^2 - 16$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{2-x} = 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την παραβολή $y = -x^2 + 7x - 6$, σε σημείο με τετμημένη στο διάστημα (2, 4).

85. Έστω η συνάρτηση $g(x) = x + \dfrac{β-α}{5}$ ορισμένη στο [α, β]. Αν ισχύει $f\left(g\left(\dfrac{4α+β}{5}\right)\right) = f(α)$, όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο ℝ, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[α, β]$, ωστε $f(x_0) = f(g(x_0))$.

86. Αν α, β, γ ∈ℝ, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0, \frac{π}{2}]$ ώστε:

$$ημ^2(x_0+α) + ημ^2(x_0+β) + ημ^2(x_0+γ) = \frac{3}{2}$$

87. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1, 4]$, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [1, 4]$, $f(1) > 0$ και $f(1) \cdot f(2) = f(3) \cdot f(4)$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 4]$.

β. Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1) \cdot f(2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

γ. Η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη.

88. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ και $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

89. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και $x \cdot [f(x) - g(x)] = \sqrt{x} \cdot [3f(x) + g(x)]$.

α. Να βρείτε το $f(0)$.

β. Αν για κάθε $x \in [0, 4]$ είναι $f(x) \neq 0$, να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $(x - 2) \cdot f(x) + x \cdot f(x) = x \cdot (x - 2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

ii. $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 4]$.

90. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(\alpha + \beta - x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε να ισχύει:

$$f(\alpha + \beta - x_0) = f(x_0)$$

91. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$ με $\gamma \neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 είναι ρίζα της g, με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

92. **α.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1–1 σε διάστημα Δ. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι ισχύει: είτε $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$, είτε $f(\gamma) < f(\beta) < f(\alpha)$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1–1 στο διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

93. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, ώστε: $f^2(x) + \eta\mu^2 x = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

β. Αν η f είναι συνεχής και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta < 0$.

94. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, η οποία να παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές.

95. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = f(\beta)$. Αν m, M τα ακρότατά της, να αποδείξετε ότι για κάθε $c\in(m, M)$ η ευθεία $y = c$ τέμνει τη C_f σε δύο τουλάχιστον σημεία.

96. Η ανάβαση στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου διαρκεί για έναν ορειβάτη 6 ώρες. Η κατάβαση διαρκεί, επίσης, 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει την ανάβαση στις 6 το πρωί και, χωρίς να σταματήσει, βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου και διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση και σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, επιστρέφει στη βάση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής, στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

97. Για μια συνεχή συνάρτηση f, ισχύει ότι:

$$\sqrt[3]{2x+8}-\sqrt{x+4}\le x\cdot f(x)\le ημ\frac{x}{6}+x^6, \text{ για κάθε } x \ge -4$$

Να υπολογίσετε το f(0) και να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(0, 1]$, ώστε $f(\kappa) = ημ\frac{\kappa}{6} + \kappa^6$.

98. Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση:

$$f^3(x) + 4f^2(x) + 6f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλαχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

99. Έστω $f(x) = x^3 + συν(\pi x) - 1$ και $g(x) = \ln(x - 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in(1, 2)$, ώστε $f(\alpha) = g(\kappa)$, για κάθε $\kappa\in\left(\frac{e+1}{e}, e^8+1\right)$.

100. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = συν2x$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο, του διαστήματος $(0, \pi/4)$.

101. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, 2] με $f(2) \neq 6$, και ακόμη $f(1) + f(2) = 8$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$, ώστε: $f(x_0) = x_0 + x_0^2$.

102. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$, ώστε $f(x_0) + e^{x_0 + 1} + \ln(x_0) = 1$.

103. Έστω α, β $\in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\gamma \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, ώστε: $\gamma = x_0 \cdot \beta + (1 - x_0) \cdot \alpha$.

104. Οι συναρτήσεις $f, g: [0, 1] \to [0, 1]$ είναι συνεχείς κι επιπλέον ισχύει $f \circ g = g \circ f$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Έστω ακόμα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 1]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1]$, ώστε $f(x_0) = x_0$ και $g(x_0) = x_0$.

105. Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $g(x) = x^2 + x \cdot \eta\mu x$
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x}{g(x)} & , g(x) \neq 0 \\ \alpha & , g(x) = 0 \end{cases}$

α. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$.

β. Να βρείτε την πραγματική τιμή του αριθμού α, για την οποία η f είναι συνεχής.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

106. Έστω η $f(x) = \dfrac{|\bar{z} + iz| \cdot x^2 + 5x + 2|z - i\bar{z}|}{x^2 + 3x + 2}$ με $z = \alpha + \beta i$, α, β $\in \mathbb{R}$ και $z \neq 0$. Αν $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z - i\bar{z}| = 2|\bar{z} + iz|$ **β.** $\alpha \cdot \beta > 0$

107. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w, για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{|z - 3 - 4i| \cdot x^2 - |w - 3 + 6i| \cdot x + 2}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z .

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w .

γ. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

γ. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$.

δ. Αν z, w είναι μιγαδικοί τέτοιοι, ώστε να ισχύει ότι:

$$f^{-1}(\ln 1) + f(\ln|z - \overline{w}|) = \frac{7}{6}$$

να αποδείξετε ότι:

i. $|z + \overline{w}| = 2$

ii. $|\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)| \le 2$

109. Δίνονται οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |z| \cdot x^3 + |w| \cdot x^2 - |z + w|$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 1]$.

110. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ και οι μιγαδικοί $z_1 = f(0) + i$ και $z_2 = 1 + f(2) \cdot i$. Αν ισχύει ότι:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 2]$.

111. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$, $z_1 = \alpha + i \cdot f(\alpha)$, $z_2 = \beta + i \cdot f(\beta)$. Αν ισχύει:

$$3(z^2 - \overline{z}^2) - 4i \cdot z\overline{z} = 4i \cdot \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

112. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) > \alpha > 0$. Δίνεται και ο μιγαδικός

$z=\dfrac{\beta+i\cdot f(\beta)}{\alpha-i\cdot f(\alpha)}$. Αν ο z είναι φανταστικός να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = x έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

113. Έστω συνάρτηση $f(x) = |2z + 1|x^3 - |z|x - 1$, όπου z μιγαδικός με $z \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $Re(z) > 1/12$, τότε η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1) .

114. Αν για το μιγαδικό αριθμό $z = x + i\cdot f(x)$ ισχύει $|z| = 1$, για κάθε $x \in D_f$, να αποδείξετε ότι:

α. Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του διαστήματος [−1, 1] .

β. Αν η f είναι συνεχής, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (−1, 1) .

115. Δίνεται ο μιγαδικός $w=\dfrac{4z^2-|z|}{4z^2+|z|}$, $z \in \mathbb{C}$.

α. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση: $4z^2 + |z| = 0$.

β. Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του z .

γ. Αν οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z_1 , z_2 , w_1 , w_2 είναι εσωτερικά σημεία του γεωμετρικού τόπου C , να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, ώστε να ισχύει:

$$|x_0\cdot z_1 - z_2| + |x_0\cdot w_1 - w_2| = x_0$$

116. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x)+|z_1-z_2|\cdot f^2(x)+\frac{|1-\overline{z}_1 z_2|^2}{4}f(x)=2x^5+x^4-2 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

όπου z_1 , z_2 σταθεροί μιγαδικοί, οι εικόνες των οποίων είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) .

117. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, 2] και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = f(0) + i$ και $z_2 = 1 + f(2)\cdot i$. Αν ισχύει ότι:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [0, 2] .