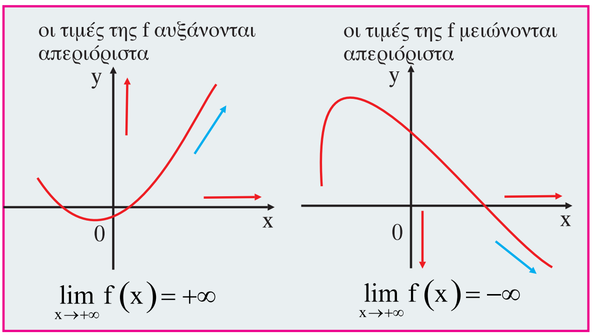
Υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$

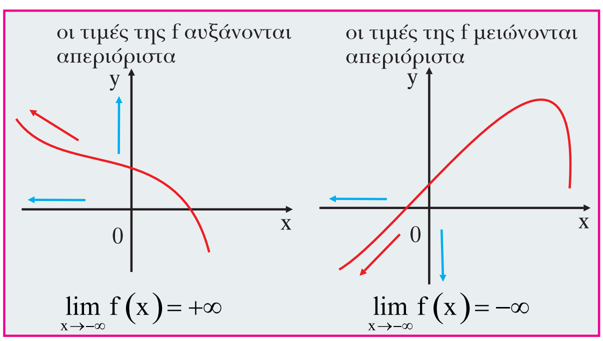
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **αυξάνονται απεριόριστα** όταν το x αυξάνεται απεριόριστα , λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $+\infty$ **είναι το** $+\infty$ και γράφουμε συμβολικά: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **μειώνονται απεριόριστα** όταν το x αυξάνεται απεριόριστα , λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $+\infty$ **είναι το** $-\infty$ και γράφουμε συμβολικά: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **αυξάνονται απεριόριστα** όταν το x μειώνεται απεριόριστα , λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $-\infty$ **είναι το** $+\infty$ και γράφουμε συμβολικά : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



Αν οι τιμές μιας συνάρτησης **μειώνονται απεριόριστα** όταν το x μειώνεται απεριόριστα , λέμε ότι **το όριο της συνάρτησης στο** $-\infty$ **είναι το** $-\infty$ και γράφουμε συμβολικά : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Δίνουμε παρακάτω τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ βασικών συναρτήσεων.

Όρια βασικών συναρτήσεων στο άπειρο

Δυνάμεις του x $\nu \in N^*$	Αν ν άρτιος : $\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = +\infty$ Αν ν περιττός : $\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = -\infty$
Αρνητικές δυνάμεις του x , όπου $\nu \in N^*$	$\lim_{x\to+\infty} x^{-\nu} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^{-\nu} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$
Πραγματικές δυνάμεις του x, όπου $\alpha > 0$	$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} = 0$
Εκθετικά όρια	Αν $\alpha > 1$: $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$ Αν $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$
Λογαριθμικά όρια	Αν $\alpha > 1$: $\lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$, $\lim_{x\to0^+} \log_\alpha x = -\infty$ Αν $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} \log_\alpha x = +\infty$

Σχόλιο

Αν γνωρίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητο να απομνημονεύσουμε τα αντίστοιχα όρια που αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ο υπολογισμός των ορίων στο άπειρο γίνεται με τους ίδιους κανόνες με τους οποίους υπολογίζουμε όρια σε πραγματικό αριθμό, εφόσον οι οριακές πράξεις που παρουσιάζονται είναι επιτρεπτές .

Θυμίζουμε τις **μη επιτρεπτές** πράξεις που σχετίζονται με το $\pm\infty$.

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ (-\infty)+(+\infty),\ (+\infty)-(+\infty),\ 0\cdot(\pm\infty),\ (+\infty)^0,\ 1^{+\infty}$$

Ακόμη πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι για τα όρια στο άπειρο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης ισχύουν :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \alpha_\nu x^\nu = \alpha_\nu \lim_{x\to\pm\infty} x^\nu =$$

$$= \begin{cases} \alpha_\nu \lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \alpha_\nu > 0 \\ -\infty, & \alpha_\nu < 0 \end{cases} \\ \alpha_\nu \lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} \begin{cases} -\infty, & \alpha_\nu > 0,\ \nu : \text{περιττος} \\ +\infty, & \alpha_\nu > 0,\ \nu : \text{αρτιος} \end{cases} \\ \begin{cases} +\infty, & \alpha_\nu < 0,\ \nu : \text{περιττος} \\ -\infty, & \alpha_\nu < 0,\ \nu : \text{αρτιος} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\cdots+\beta_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim_{x\to\pm\infty}x^{\nu-\mu}=$$

$$=\begin{cases}
\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-\mu}=\begin{cases}
+\infty\,, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}>0\\[2mm]
-\infty\,, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}<0\\[2mm]
0\,, & \text{αν}\quad \nu<\mu\\[2mm]
\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}, & \text{αν}\quad \nu=\mu
\end{cases}\\[12mm]
\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\nu-\mu}=\begin{cases}
\begin{cases}
-\infty\,, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}>0\,,\ \nu-\mu:\ \text{περιττός}\\[2mm]
+\infty\,, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}>0\,,\ \nu-\mu:\ \text{άρτιος}
\end{cases}\\[6mm]
\begin{cases}
+\infty\,, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}<0\,,\ \nu-\mu:\ \text{περιττός}\\[2mm]
-\infty\,, & \text{αν}\quad \nu>\mu,\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}<0\,,\ \nu-\mu:\ \text{άρτιος}
\end{cases}\\[6mm]
0\,, \quad \text{αν}\quad \nu<\mu\\[2mm]
\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}, \quad \text{αν}\quad \nu=\mu
\end{cases}
\end{cases}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^{11}+3x^5+2002\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+5x^3+10}{6x^9+4x-3}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^{11}+3x^5+2002\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^{11}\right)=-5\lim\limits_{x\to+\infty}x^{11}=(-5)(+\infty)=-\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+5x^3+10}{6x^9+4x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{6x^9}=\dfrac{3}{6}\lim\limits_{x\to-\infty}x^{-4}=\dfrac{3}{6}\cdot 0=0$.

Σχόλιο

Για τα όρια ρητών συναρτήσεων στο άπειρο ισχύει ότι :

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι **μεγαλύτερος** απο το βαθμό του παρονομαστή τότε το όριο είναι **μη πεπερασμένο** $(\pm\infty)$**.**

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι **μικρότερος** απο το βαθμό του παρονομαστή τότε το όριο είναι **μηδέν.**

Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι **ίσος** με το βαθμό του παρονομαστή τότε το όριο είναι **ίσο με το πηλίκο των συντελεστών** των μεγιστοβάθμιων όρων.

Όριο ρίζας

Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[\nu]{f(x)}=+\infty$ και $f(x)>0$ κοντά στο $\pm\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^6+5x^3+10}=+\infty$,διότι :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^6+5x^3+10\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^6\right)=3\lim\limits_{x\to-\infty}x^6=3(+\infty)=+\infty$.

Ο τυπικός τρόπος προσδιορισμού του ορίου είναι η εξαγωγή ως κοινού παράγοντα της μεγαλύτερης δύναμης του x.

Έτσι για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+4}-2x\right)$ παρατηρούμε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{16x^2+x+4}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, οπότε παρουσιάζεται η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$ οπότε

$$\text{Είναι }\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+4}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-2x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2\right)\right]=+\infty \text{ διότι, όταν } x\to+\infty$$

είναι $x>0$, άρα $|x|=x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2\right)=2>0$.

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+42x+12}-\sqrt{25x^2-17x+1}\right)$.

Λύση

Έχουμε απροσδιοριστία $(+\infty)-(+\infty)$ και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα του αθροίσματος ορίων.

Με εξαγωγή ως κοινού παράγοντα του x^2, έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+42x+12}-\sqrt{25x^2-17x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{42}{x}+\frac{12}{x^2}}-\sqrt{25-\frac{17}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{42}{x}+\frac{12}{x^2}}-\sqrt{25-\frac{17}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2-5=-3<0$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-2x\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)$ **iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{9x^2+3x+7}-5x\right)$

Λύση

i. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)\right]=+\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)=5>0$

ii. Με εξαγωγή ως κοινού παράγοντα της μεγαλύτερης δύναμης του x έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)\right]=(+\infty)\cdot 0$$

Παρατηρήστε ότι καταλήξαμε σε απροσδιοριστία και επομένως το όριο αυτό δεν υπολογίζεται με τη μέθοδο της εξαγωγής του κοινού παράγοντα που αναφέραμε προηγουμένως. Για να άρουμε την απροσδιοριστία σ'αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της συζυγούς παράστασης.

Μετατρέπουμε έτσι την απροσδιόριστη μορφή ($\infty-\infty$) σε $\frac{\infty}{\infty}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+x+2}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x+2}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\frac{1+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{1}{4}$$

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-2x\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty$

iv. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{9x^2+3x+7}-5x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x+\sqrt{9x^2+3x+7}-3x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x}+\frac{3x+7}{\sqrt{9x^2+3x+7}+3x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}+\frac{3+\frac{7}{x}}{\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}+3}\right)=\frac{3+0}{\sqrt{4+0+0}+2}+\frac{3+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=\frac{5}{4}$$

Όρια με απόλυτες τιμές

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

i. $\lim_{x\to-\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|+\left|2x-x^3\right|\right)$ **ii.** $\lim_{x\to+\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|-\left|2x-x^3\right|\right)$ **iii.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left|x-x^2\right|}{2x^2+42}$

Λύση

i. Σύμφωνα με την ιδιότητα : Αν $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τοτε $\lim_{x\to\pm\infty}\left|f(x)\right|=+\infty$ και επειδή είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(3-x+x^5\right)=-\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(2x-x^3\right)=+\infty$, παίρνουμε :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|+\left|2x-x^3\right|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left|3-x+x^5\right|+\lim_{x\to-\infty}\left|2x-x^3\right|=+\infty+\infty=+\infty$$

ii. Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της διαφοράς των ορίων αφού προκύπτει η απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\infty$. Γι'αυτό πρέπει να απαλλαγούμε από τα απόλυτα και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε ιδιότητες ορίων.

Για να απαλλαγούμε απο τα απόλυτα πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται μέσα σ'αυτά.

Όταν το όριο της παράστασης που βρίσκεται μέσα σε απόλυτο είναι θετικός αριθμός ή το $+\infty$ για $x\to+\infty$ τότε η παράσταση θα είναι θετική κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. (ή στο x_0 αν υπολογίζουμε όριο σε πραγματικό αριθμό).

Είναι: $\lim_{x\to+\infty}\left(3-x+x^5\right)=+\infty$, οπότε $3-x+x^5>0$, κοντά στο $+\infty$ και συνεπώς είναι:

$$\left|3-x+x^5\right|=3-x+x^5$$

Επίσης $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-x^3\right)=-\infty$, οπότε $2x-x^3<0$, κοντά στο $+\infty$ και συνεπώς είναι:

$$\left|2x-x^3\right|=-\left(2x-x^3\right)=x^3-2x\,.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\left|3-x+x^5\right|-\left|2x-x^3\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(3-x+x^5\right)-\left(x^3-2x\right)\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5-x^3+x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty$$

iii. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$, είναι $x-x^2<0$ στην περιοχή του $+\infty$,

οπότε $\left|x-x^2\right|=-\left(x-x^2\right)=x^2-x$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\left|x-x^2\right|}{2x^2+42}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x}{2x^2+42}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

Όρια με τριγωνομετρικούς αριθμούς

1. Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu\frac{1}{x}=0$ διότι, όταν $x\to\pm\infty$ τότε $\frac{1}{x}\to 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\eta\mu y=\eta\mu 0=0$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=1$.

2. Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ διότι,

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)=0$$

3. Ισχύει $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$ διότι, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$

Θυμίζουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και γενικότερα με $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{\nu}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{\nu-1}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x^{\nu-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-1}=\begin{cases}+\infty, & \nu>1\\ 1, & \nu=1\\ 0, & \nu<1\end{cases}\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty}x^{\nu-1}=\begin{cases}+\infty, & \nu>1,\ \text{άρτιος}\\ -\infty, & \nu>1,\ \text{περιττός}\\ 1, & \nu=1\\ 0, & \nu<1\end{cases}\end{cases}$$

και $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\eta\mu^{\nu}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\eta\mu^{\nu-1}\frac{1}{x}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu^{\nu-1}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0\cdot 1=0$$

4. Δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε το όριο της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ, αν $x\to-\infty$ και $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-\lambda x+1$.

Λύση

Είναι $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-\lambda x+1=|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\lambda x+1=-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda-\frac{1}{x}\right)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda-\frac{1}{x}\right)=2+\lambda$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Αν $2+\lambda>0\Leftrightarrow\lambda>-2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(+\infty)(2+\lambda)=+\infty$

ii. Αν $2+\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(+\infty)(2+\lambda)=-\infty$

iii. Αν $2+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-2$ τότε έχουμε απροσδιοριστία $0\cdot(+\infty)$

Για $\lambda=-2$:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}+2x+1=\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x+1\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1\right)}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=$$

$$=\frac{4x^2+x+3-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=\frac{-x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{3}{4}$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \lambda<-2\\ +\infty, & \text{αν } \lambda>-2\\ \frac{3}{4}, & \text{αν } \lambda=-2\end{cases}$

Άσκηση 2

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+x+5}-x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}=2$, **να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

Λύση

Θέτουμε $u(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+x+5}-x}$ και $h(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}$

τότε είναι: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{h(x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+5}-x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}\quad(1)$

Επειδή $\frac{\sqrt{x^2+x+5}-x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+5}-x\right)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+5}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}=$

$$\frac{(x+5)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}{(x+5)\left(\sqrt{x^2+x+5}+x\right)}=\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$$

προκύπτει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{u(x)}{h(x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+5}-x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{h(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{2002}}{e^x}$

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{2002}}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\cdot x^{2002}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2002}=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

διότι αν $0<\alpha<1$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x^\nu=+\infty$, αν ο ν είναι άρτιος.

Άσκηση 4

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ **για την οποία ισχύουν** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ **και**

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=4$**. Να βρείτε το** $\mu\in R$ **ώστε το** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\mu x-2}{xf(x)-3x^2+x+1}=2$**.**

Λύση

Πρέπει να εμφανίσουμε την $\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ και την $[f(x)-3x]$, διότι είναι τα μόνα όρια που γνωρίζουμε. Έτσι το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\mu x-2}{xf(x)-3x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+\mu-\frac{2}{x}}{f(x)-3x+1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{f(x)}{x}\right]+\mu-\frac{2}{x}}{[f(x)-3x]+1+\frac{1}{x}}=\frac{3+\mu}{4+1}=\frac{3+\mu}{5}$$

Άρα $\frac{3+\mu}{5}=2\Leftrightarrow\mu=7$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2+x-\dfrac{3x^3+x+2}{x^2-2}\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+5}-3x+1\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+5x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$ **iv.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+4}+3x+1\right)$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x+1}-\sqrt[3]{8x^3+3x^2}-x\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}+2\sqrt{4x^2+x+2}-3\sqrt{x^2-x+1}+2x\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}+2\sqrt{x^2+x+9}-5\sqrt{x^2+4x}\right)$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x-2}{\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{2x^2+1}}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+x+2}+\sqrt[4]{2x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{5x-1}}$

4. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του μ το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ αν :

$f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+2}+\mu x-1$.

(**Απ:** Είναι $f(x)=-x\left[\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}-\mu+\dfrac{1}{x}\right]$. Αν $\mu<5$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Αν $\mu>5$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Αν $\mu=5$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{17}{12}$)

5. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $\sqrt{x^2+2}+x\le f(x)\le\dfrac{1-x}{2x^2}$ για κάθε x διάφορο απο το μηδέν, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot f(x))$.

6. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε να ισχύουν:

$f(x)\neq1$, $f(x)\geq0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt[3]{f(x)}-1}$.

$\left(\textbf{Απ:}\ \dfrac{3}{2}\right)$

7. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(5f(x)+4x)=1$, να βρείτε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2f(x)+3x^3-2x+4}{10x^3f(x)+8x^4+9x+12}.$$

8. Να βρεθούν τα α , β ,γ ώστε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2+1}-\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=0$.

(**Απ:** $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{3}{2}$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Έστω $f(x)=(\kappa+1)\ell nx-\ell n2+\ell n(x-1)$**,** $x\geq2$**,** $\kappa\geq-2$**. Να προσδιοριστεί ο** $\kappa\in R$ **ώστε το** $\ell\mathrm{im}_{x\to+\infty} f(x)$ **να είναι πραγματικός αριθμός.**

(**Απ.:** $\kappa=-2$)

Β. Αν $\ell\mathrm{im}_{x\to+\infty}\frac{f(3x)}{f(x)}=5$ **να βρεθεί το** $\ell\mathrm{im}_{x\to+\infty}\frac{f(243x)}{f(x)}$**.**

(**Απ.:**Ισχύει: $\frac{f(243x)}{f(x)}=\frac{f(243x)}{f(81x)}\cdot\frac{f(81x)}{f(27x)}\cdot\frac{f(27x)}{f(9x)}\cdot\frac{f(9x)}{f(3x)}\cdot\frac{f(3x)}{f(x)}$. Άρα $\ell\mathrm{im}_{x\to-\infty}\frac{f(243x)}{f(x)}=5^5$)