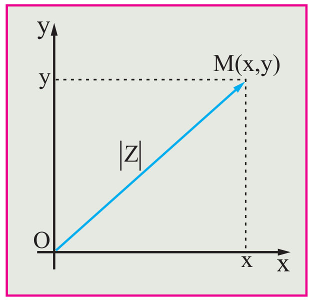
Μάθημα 2

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



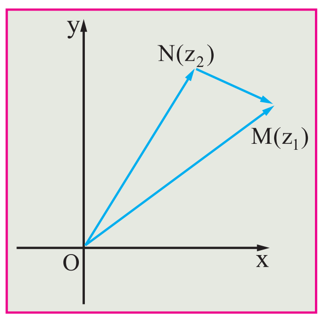
Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και M(z) η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού z την απόσταση του M(z) από την αρχή O(0,0) των αξόνων και συμβολίζουμε $|z| = (OM) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ιδιότητες του μέτρου

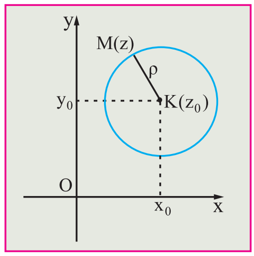
- Έστω $z = x + yi$ τότε $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Για κάθε μιγαδικό $z = x + yi$ ισχύει $|z^2| = |z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τότε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και γενικότερα

  $|z_1 \cdot z_2 ... z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| ... |z_\nu|$ και $|z^\nu| = |z|^\nu \quad \nu \in N^*$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$ τότε $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,
- Αν $z_1, z_2 \in C$ τότε $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)

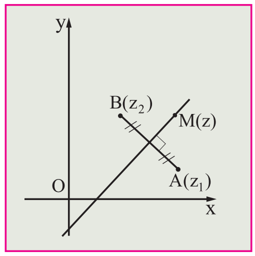


- Για τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, ισχύει ακόμα

  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$ ή $|\overrightarrow{MN}| = |z_1 - z_2|$ δηλαδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με τήν απόσταση των εικόνων τους.



• Έστω ο μιγαδικός $z_0 = x_0 + y_0 i$ και ένας θετικός πραγματικός ρ. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα $K(x_0, y_0)$ του z_0 και ακτίνα ρ.



• Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις όπου ζητείται το μέτρο ενός μιγαδικού ή το μέτρο μιας παράστασης μιγαδικών αριθμών.

α. Φέρνουμε τον μιγαδικό αριθμό ή την παράσταση στην κανονική μορφή $x + yi$ οπότε υπολογίζουμε εύκολα το μέτρο που είναι $\sqrt{x^2 + y^2}$

β. Όταν η παράσταση προσφέρεται εφαρμόζουμε τις ιδιότητες του μέτρου.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών: i. $z_1 = \dfrac{4+3i}{4-3i}$ **ii.** $z_2 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

α΄ τρόπος

i. $z_1 = \dfrac{4+3i}{4-3i} = \dfrac{(4+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{16-9+24i}{25} = \dfrac{7}{25} + \dfrac{24}{25}i$.

Οπότε $|z_1| = \sqrt{\dfrac{7^2}{25^2} + \dfrac{24^2}{25^2}} = \sqrt{\dfrac{49+576}{625}} = 1$

β΄ τρόπος

$|z_1| = \left|\dfrac{4+3i}{4-3i}\right| = 1$, (Αφού $|4+3i| = |\overline{4+3i}| = |4-3i|$)

ii. $|z_2| = \left|\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}\right| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right|^{\nu} = \left(\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}}\right)^{\nu} = 1^{\nu} = 1$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις όπου ζητείται να λυθούν εξισώσεις ή ανισώσεις που περιέχουν μέτρα μιγαδικών.

α. Θέτουμε $z = x + yi$, εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου και οδηγούμαστε έτσι σε άρρητες εξισώσεις με άγνωστους τους $x, y \in R$ τους οποίους και προσδιορίζουμε .

β. Υψώνουμε στο τετράγωνο κατά μέλη κάνοντας χρήση της ιδιότητας $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ή γενικότερα $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$.

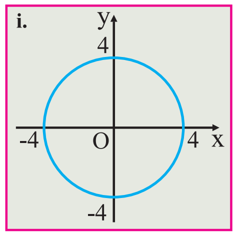
γ. Μπορούμε να λύσουμε γεωμετρικά τις εξισώσεις - ανισώσεις λαμβάνοντας υπόψη μας την γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου.

Παράδειγμα 2

Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία στα επόμενα:

i. $|\overline{z}| = 4$ **ii.** $|4z + 8i + 4| = 4$ **iii.** $2 < |z - 1 + 2i| < 3$ **iv.** $|z - 2| = |z - 3i|$

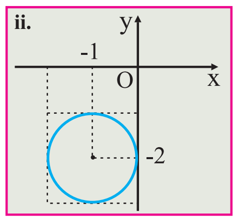
Λύση



i. Έστω $z = x + yi$ και επειδή $|\overline{z}| = 4$ έχουμε:

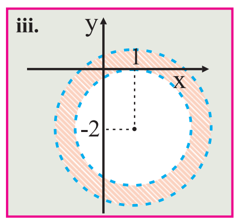
$|x - yi| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4^2$.

Άρα το σημείο M(z) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$



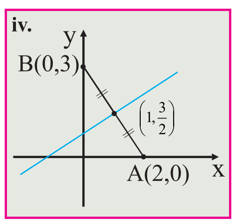
ii. Είναι $|4z + 8i + 4| = 4 \Leftrightarrow |z - (-1 - 2i)| = 1$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, -2)$ και $\rho = 1$



iii. Έχουμε $|z - (1 - 2i)| > 2$ και $|z - (1 - 2i)| < 3$ (2)

Η ανίσωση (1) παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται έξω από τον κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 2. Η ανίσωση (2) παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 3. Άρα η δοθείσα ανίσωση παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό του δακτυλίου που ορίζουν αυτοί οι ομόκεντροι κύκλοι.



iv. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει την μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία A(2,0) και B(0,3). Για να βρούμε την εξίσωση της θέτουμε $z = x + yi$ οπότε:

$|z - 2| = |z - 3i| \Leftrightarrow |x - 2 + yi| = |x + (y - 3)i|$

$|(x - 2) + yi|^2 = |x + (y - 3)i|^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 9 - 6y \Leftrightarrow -4x + 6y = 5$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ασκήσεις όπου ζητείται να αποδειχτεί μια ισότητα ή ανισότητα μέτρων με ή χωρίς συνθήκες.

α. Θέτουμε $z = x + yi$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου.

β. Υψώνουμε στο τετράγωνο εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$ ή $|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)}$.

Σημείωση: Όταν μας δίνεται ως συνθήκη $|f(z)| = 1$ όπου $z \in C$ τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |f(z)|^2 = 1 \Leftrightarrow f(z)\cdot\overline{f(z)} = 1 \text{ οπότε } f(z) = \frac{1}{\overline{f(z)}} \text{ ή } \overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}.$$

(Βλέπε στις λυμένες ασκήσεις την 1)

Τα πιο πάνω ισχύουν και γενικότερα αν $|f(z)| = \alpha$, $\alpha \in R$ οπότε:

$$|f(z)|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow f(z)\cdot\overline{f(z)} = \alpha^2 \text{ οπότε } f(z) = \frac{\alpha^2}{\overline{f(z)}} \text{ ή } \overline{f(z)} = \frac{\alpha^2}{f(z)}$$

(βλέπε στις λυμένες ασκήσεις την 2).

Παράδειγμα 3

Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|3z-9| = |z-11|$ **να δείξετε ότι** $|z-2| = 3$

Λύση

Ισχύει: $|3z-9| = |z-11| \Leftrightarrow |3z-9|^2 = |z-11|^2 \Leftrightarrow (3z-9)\overline{(3z-9)} = (z-11)\overline{(z-11)} \Leftrightarrow$

$$(3z-9)(3\overline{z}-9) = (z-11)(\overline{z}-11) \Leftrightarrow 9z\overline{z} - 27z - 27\overline{z} + 81 = z\overline{z} - 11z - 11\overline{z} + 121$$

$$\Leftrightarrow 8z\overline{z} - 16\overline{z} - 16z - 40 = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} - 2\overline{z} - 2z - 5 = 0 \qquad (1)$$

Έχουμε ακόμα: $|z-2| = 3 \Leftrightarrow |z-2|^2 = 9 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}-2) = 9$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} - 5 = 0$ που ισχύει απο (1).

Άρα αν $|3z-9| = |z-111|$ τότε $|z-2| = 3$

Παράδειγμα 4

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 **και** $\kappa \in R$ **με** $\kappa > 0$.

Να δείξετε ότι: $|z_1 + z_2|^2 \le (1+\kappa)\cdot|z_1|^2 + \left(1+\frac{1}{\kappa}\right)|z_2|^2$.

Λύση

α΄ τρόπος

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$

Έχουμε: $|z_1 + z_2|^2 \le (1+k)\cdot|z_1|^2 + \left(1+\frac{1}{k}\right)|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$|(\alpha+\gamma) + (\beta+\delta)i|^2 \le (1+\kappa)|\alpha+\beta i|^2 + \left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\cdot|\gamma+\delta i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2\le(1+\kappa)(\alpha^2+\beta^2)+\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)(\gamma^2+\delta^2)\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma+\beta^2+\delta^2+2\beta\delta\le\alpha^2+\beta^2+\kappa\alpha^2+\kappa\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\frac{\gamma^2}{\kappa}+\frac{\delta^2}{\kappa}\Leftrightarrow$$

$$2\alpha\gamma+2\beta\delta\le\kappa\alpha^2+\kappa\beta^2+\frac{\gamma^2}{\kappa}+\frac{\delta^2}{\kappa}\quad(\kappa>0)\Leftrightarrow 2\alpha\kappa\gamma+2\beta\kappa\delta\le\kappa^2\alpha^2+\kappa^2\beta^2+\gamma^2+\delta^2\Leftrightarrow$$

$$(\kappa^2\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\kappa\gamma)+(\kappa^2\beta^2+\delta^2-2\beta\kappa\delta)\ge0\Leftrightarrow(\kappa\alpha-\gamma)^2+(\kappa\beta-\delta)^2\ge0$$ που αληθεύει

β΄ τρόπος

Επειδή $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ αρκεί να δείξουμε ότι: $(|z_1|+|z_2|)^2\le(1+\kappa)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)|z_2|^2$ (1)

Πράγματι η (1) γίνεται $|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\le|z_1|^2+\kappa|z_1|^2+|z_2|^2+\frac{1}{\kappa}|z_2|^2\Leftrightarrow$

$$\kappa^2|z_1|^2+|z_2|^2-2\kappa|z_1||z_2|\ge0\Leftrightarrow(\kappa|z_1|-|z_2|)^2\ge0$$ που ισχύει.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις όπου ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μέτρου $|f(z)|$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα ή τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου μιγαδικού. $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Παράδειγμα 5

Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=1$ και $\omega=3+4i$ να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+\omega|$.

Λύση

Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=1$ έχει κέντρο το O(0,0) και $\rho=1$. Αφού το M(z) ανήκει στον κύκλο ισχύει $|z|=1$. Επίσης $|\omega|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||z|-|\omega||\le|z+\omega|\le|z|+|\omega| \quad ή \quad |1-5|\le|z+\omega|\le1+5 \quad ή \quad 4\le|z+\omega|\le6$$

Άρα η μέγιστη τιμή του $|z+\omega|$ είναι 6, ενώ η ελάχιστη 4.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$ αν $|z-3|\le1$ (1)

Λύση

Είναι $|z|=|(z-3)+3|\le|z-3|+3\overset{(1)}{\le}1+3=4$.

Επίσης: $|z|=|(z-3)+3|\ge||z-3|-|3||\overset{(1)}{\ge}|1-3|=2$ Άρα: $2\le|z|\le4$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 **ισχύει:** $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ **και** $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ **να δείξετε ότι:**

α. $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 0$

β. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 **είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμένου σε κύκλο ακτίνας 1.**

γ. $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$

δ. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

Λύση

α. Όταν $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$ (1) οπότε:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \text{ λόγω της (1).}$$

β. Για να δείξουμε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 - z_3$ οπότε

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 - (-z_1 - z_3)| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |-z_1 - 2z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3| \Leftrightarrow$$

$$|2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)\overline{(2z_1 + z_3)} = (z_1 + 2z_3)\overline{(z_1 + 2z_3)}$$

$$\Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\overline{z_1} + \overline{z_3}) = (z_1 + 2z_3)(\overline{z_1} + 2\overline{z_3}) \Leftrightarrow$$

$$4z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_3} = z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2z_3\overline{z_1} + 4z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|z_1|^2 + |z_3|^2 = |z_1|^2 + 4|z_3|^2 \Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3| \text{ που ισχύει:}$$

Άρα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Ομοίως αποδεικνύουμε και τις άλλες ισότητες οπότε το τρίγωνο που σχηματίζουν οι εικόνες M_1, M_2, M_3 των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα είναι ισόπλευρο.

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ το $M_1M_2M_3$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $\rho = 1$.

γ. Από την σχέση (α) έχουμε:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \Leftrightarrow \frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}=0 \Leftrightarrow z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2=0 \quad (2)$$

δ. Επειδή $z_1+z_2+z_3=0$ τότε και

$$(z_1+z_2+z_3)^2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_1z_2+2z_2z_3+2z_1z_3=0$$

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} z_1^2+z_2^2+z_3^2=0.$$

Επειδή $z_1+z_3=-z_2$, έχουμε: $z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=0 \Leftrightarrow z_2(z_1+z_3)+z_1z_3=0 \Leftrightarrow$

$$z_2(-z_2)+z_1z_3=0 \Leftrightarrow -z_2^2+z_1z_3=0 \Leftrightarrow z_2^2=z_1z_3 \Leftrightarrow z_2^2\cdot z_2=z_1z_2z_3 \Leftrightarrow z_2^3=z_1z_2z_3$$

Όμοια δείχνουμε ότι $z_1^3=z_1z_2z_3$ και $z_3^3=z_1z_2z_3$. Άρα $z_1^3=z_2^3=z_3^3$.

Άσκηση 2

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=\alpha$, $\alpha\in R_+^*$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w με $w=\dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}$ είναι φανταστικός.

Λύση

Για να δείξουμε ότι $w\in I$ αρκεί να δείξουμε ότι $w=-\overline{w}$

Είναι: $\overline{w}=\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)}=\dfrac{\overline{z-\alpha}}{\overline{z+\alpha}}=\dfrac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{z}+\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{z}-\alpha}{\overline{z}+\alpha}$ (1) διότι $\overline{\alpha}=\alpha$ αφού $\alpha\in R_+^*$.

Επίσης $|z|=\alpha \Leftrightarrow |z|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow z\overline{z}=\alpha^2 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{\alpha^2}{z}$ οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\overline{w}=\frac{\frac{\alpha^2}{z}-\alpha}{\frac{\alpha^2}{z}+\alpha}=\frac{\frac{\alpha^2-\alpha z}{z}}{\frac{\alpha^2+\alpha z}{z}}=\frac{\alpha(\alpha-z)}{\alpha(\alpha+z)}=\frac{\alpha-z}{\alpha+z}=-\frac{z-\alpha}{z+\alpha}=-w.$$

Δηλαδή $\overline{w}=-w \Leftrightarrow w$ φανταστικός

Άσκηση 3

Αν ισχύει ότι $\left|\dfrac{z+|z|}{2}\right|+\left|\dfrac{z-|z|}{2}\right|=|z|$ τότε ο z είναι πραγματικός.

Λύση

(Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε)

$$(z+|z|)(\overline{z}+|z|)+(z-|z|)(\overline{z}-|z|)+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$z\overline{z}+z|z|+\overline{z}|z|+|z|^2+z\overline{z}-z|z|-\overline{z}|z|+|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+|z|^2+|z|^2+|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow 4|z|^2+2\left|z^2-|z|^2\right|=4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$2\left|z^2-|z|^2\right|=0 \Leftrightarrow z^2-|z|^2=0 \Leftrightarrow |z|^2=z^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=z^2 \Leftrightarrow z(z-\bar{z})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \text{ή} \\ z=\bar{z} \end{cases}$$

Άρα $z \in R$.

Άσκηση 4

Να λυθεί στο C η εξίσωση $|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0$ όπου $\alpha \geq 0$.

Λύση

Έστω $z=x+yi$, $x,y \in R$

Είναι $|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2-2i(x+yi)+2\alpha(1+i)=0 \Leftrightarrow$

$$\left(x^2+y^2+2y+2\alpha\right)+2(\alpha-x)i=0+0i \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2+2y+2\alpha=0 \\ 2(\alpha-x)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} y^2+2y+2\alpha+\alpha^2=0 \\ x=\alpha \end{matrix}$$

Επειδή $y \in R$ πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4-4\left(\alpha^2+2\alpha\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha^2-2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$-1-\sqrt{2} \leq \alpha \leq -1+\sqrt{2}$ και επειδή $\alpha \geq 0$ είναι $0 \leq \alpha \leq -1+\sqrt{2}$.

Έτσι $y_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\left(\alpha^2+2\alpha\right)}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}}{2}=-1\pm\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}$.

Άρα οι λύσεις τις εξίσωσης είναι

$z_1=\alpha+\left(-1+\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}\right)i$ και

$z_2=\alpha+\left(-1-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha+1}\right)i$

με την προϋπόθεση $0 \leq \alpha \leq -1+\sqrt{2}$.

α	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$\alpha^2+2\alpha-1$		+	0	-	0	+	

Άσκηση 5

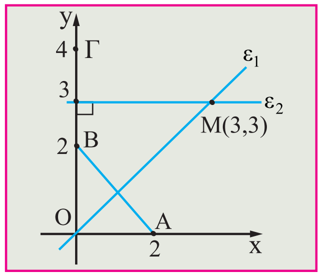
Να προσδιορίσετε τα σημεία M(z) του επιπέδου όταν ο αριθμός z ικανοποιεί τη σχέση $|z-4i|=|z-2|=|z-2i|$

Λύση

Εφ'όσον ο z ικανοποιεί την ισότητα $|z-2|=|z-2i|$ το M(z) θα βρίσκεται στην μεσοκάθετη του τμήματος AB όπου A(2,0) και B(0,2), δηλαδή επί της ευθείας $\varepsilon_1 : y=x \quad (1)$.

Εφ'όσον ο z ικανοποιεί τη σχέση $|z-4i|=|z-2i|$ το M(z) θα βρίσκεται στη μεσοκάθετη του τμήματος ΒΓ όπου B(0,2) και Γ(0,4), δηλαδή επί της ευθείας $\varepsilon_2 : y=3\ (2)$.

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) δηλαδή $\begin{cases} y=x \\ y=3 \end{cases}$ και βρίσκουμε ότι το M(z) είναι το (3,3) και είναι μοναδικό.



Άσκηση 6

Αν $z_1, z_2 \in C$ και $|z_1+\overline{z}_2|=|\overline{z}_1-z_2|$ να δείξετε ότι ο $z_1 \cdot z_2$ είναι φανταστικός αριθμός.

Λύση

Επειδή $|z_1+\overline{z}_2|=|\overline{z}_1-z_2|$ έχουμε $|z_1+\overline{z}_2|^2=|\overline{z}_1-z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$(z_1+\overline{z}_2)(\overline{z_1+\overline{z}_2})=(\overline{z}_1-z_2)(\overline{\overline{z}_1-z_2}) \Leftrightarrow (z_1+\overline{z}_2)(\overline{z}_1+z_2)=(\overline{z}_1-z_2)(z_1-\overline{z}_2)$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z}_1+z_1z_2+\overline{z}_1\overline{z}_2+\overline{z}_2z_2=z_1\overline{z}_1-z_2z_1-\overline{z}_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow 2z_1z_2=-2\overline{z}_1\overline{z}_2 \Leftrightarrow z_1z_2=-\overline{z_1z_2}.$$

Άρα $z_1z_2 \in I$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις:

$$|z|=1 \quad (1) \ \textbf{και} \ |z-1|=2|z+1| \quad (2)$$

Λύση

Θέτουμε $z=x+yi$, $x,y\in R$. Από την (1) έχουμε $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \quad (3)$.

Από την (2) έχουμε $|(x-1)+yi|=2|(x+1)+yi| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4\left[(x+1)^2+y^2\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=4(x^2+2x+1+y^2)$ που λόγω της (3) γράφεται $1-2x+1=4(1+2x+1)$.

Άρα $x=-\frac{3}{5}$ οπότε $y^2=\frac{16}{25} \Leftrightarrow y=\frac{4}{5}$ ή $y=-\frac{4}{5}$.

Έτσι οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι $z_1=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ ή $z_2=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

Άσκηση 8

Αν $\left|z+\frac{1}{|z|}\right|=1$, $z\in C$ με $z\neq 0$, να δειχθεί ότι $|z|+\frac{1}{|z|}\leq\sqrt{5}$.

Λύση

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$|z|+\frac{1}{|z|}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(|z|+\frac{1}{|z|}\right)^2\le\sqrt{5}^2\Leftrightarrow|z|^2+\frac{1}{|z|^2}+2|z|\frac{1}{|z|}\le 5\Leftrightarrow|z|^2+\frac{1}{|z|^2}\le 3\quad(1)$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (1).

Από υπόθεση έχουμε $\left|z+\frac{1}{|z|}\right|=1$ και επειδή $\left|z+\frac{1}{|z|}\right|\ge\left||z|-\left|\frac{1}{z}\right|\right|$ έχουμε $1\ge\left(|z|-\left|\frac{1}{z}\right|\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\ge|z|^2+\frac{1}{|z|^2}-2\Leftrightarrow 3\ge|z|^2+\frac{1}{|z|^2}$. Επομένως η (1) ισχύει.

Άσκηση 9

Αν $z_1, z_2\in C$ και $z_1, z_2\ne 0$ να δειχθεί ότι $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}>0$.

Λύση

α΄ τρόπος (γεωμετρικά)

Έστω $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2, τότε:

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\right|=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|+\left|\overrightarrow{OM_2}\right|\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OM_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM_1}=\kappa\overrightarrow{OM_2}\text{ με }\kappa>0\Leftrightarrow z_1=\kappa z_2\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=\kappa>0\text{, με }\kappa\in R.$$

β΄ τρόπος (αλγεβρικά)

Είναι $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$

$$|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=2|z_1||z_2|\quad(1)$$

Υψώνουμε τα μέλη της (1) στο τετράγωνο: $z_1^2\overline{z}_2^2+z_2^2\overline{z}_1^2+2|z_1|^2|z_2|^2=4|z_1|^2|z_2|^2$

$$z_1^2\overline{z}_2^2+z_2^2\overline{z}_1^2-2z_1^2\overline{z}_2^2z_2^2\overline{z}_2^2=0\Leftrightarrow(z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1})^2=0\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}=0\Leftrightarrow$$

$\frac{z_1}{z_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}\in R$. Έστω τώρα $\frac{z_1}{z_2}=\kappa\in R\Leftrightarrow z_1=\kappa z_2$ ή $\overline{z_1}=\kappa\overline{z_2}$.

Η (1) γίνεται $\kappa z_2\cdot\overline{z_2}+z_2\kappa\overline{z_2}=2|z_1||z_2|\Leftrightarrow\kappa|z_2|^2+\kappa|z_1|^2=2|z_1||z_2|\Leftrightarrow$

$\kappa\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=2|z_1z_2|\Leftrightarrow\kappa=\frac{2|z_1z_2|}{|z_1|^2+|z_2|^2}$. Άρα $\kappa>0$.

Άσκηση 10

α. Αν $z \in C-\{i\}$ **να δείξετε ότι** $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|<1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)<0$

β. Αν $z_1, z_2, ..., z_\nu \in C-\{i\}$ **και ισχύει η σχέση** $\left|\frac{z_1+i}{z_1-i}\right|+\left|\frac{z_2+i}{z_2-i}\right|+...+\left|\frac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right|<1$

να δείξετε ότι $\left|\frac{(z_1+z_2+...+z_\nu)+i}{(z_1+z_2+...++z_\nu)-i}\right|<1$.

Λύση

α. $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|<1 \Leftrightarrow |z+i|<|z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2<|z-i|^2 \Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i)<(z-i)(\overline{z}+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1<z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1 \Leftrightarrow 0<2iz-2i\overline{z} \Leftrightarrow 0<2i(z-\overline{z})$

$\Leftrightarrow 0<2i[2\operatorname{Im}(z)]i \Leftrightarrow 0<-4\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)<0$

β. Αφού $\left|\frac{z_1+i}{z_1-i}\right|+\left|\frac{z_2+i}{z_2-i}\right|+...+\left|\frac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right|<1$ συνεπάγεται ότι

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{z_1+i}{z_1-i}\right|<1 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_1<0\\ \left|\frac{z_2+i}{z_2-i}\right|<1 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_2<0\\ \left|\frac{z_\nu+i}{z_\nu-i}\right|<1 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_\nu<0\end{array}\right\} \text{Άρα } \operatorname{Im}(z_1)+...+\operatorname{Im}(z_\nu)<0 \Leftrightarrow$$

$\operatorname{Im}(z_1+...+z_\nu)<0 \Leftrightarrow \left|\frac{(z_1+...+z_\nu)+i}{(z_1+...+z_\nu)-i}\right|<1$ (λόγω του **α.** ερωτήματος)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις, που αφορούν τους μιγαδικούς αριθμούς z, z_1 και z_2.

i. $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$, **ii.** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, **iii.** $|z|=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\overline{z}}$, **iv.** $|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow z_1=z_2$

v. Αν $|z|=k$ και $k\neq 0$ τότε $\overline{z}=\frac{k^2}{z}$, **vi.** Αν $z_1^2+z_2^2=0$ τότε: **α.** $z_1=z_2=0$ **β.** $|z_1|=|z_2|$,

vii. Αν $z=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}+i+\frac{\pi}{8}$ τότε $z=\frac{1}{z}$

(Απ.: v. Σ, **vi. α.** Λ **β.** Σ, **vii.** Σ)

2. Αν $|z| = 2$, $z \in C$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών $\omega = z + 3$.

α. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (2,0) και ακτίνα 3

β. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (3,0) και ακτίνα 2.

γ. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο (3,0) και ακτίνα 3.

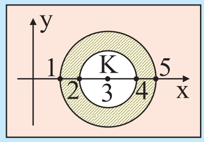
δ. βρίσκονται σε ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$.

3. Οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση $|z - 10| = |z + 10|$ βρίσκονται πάνω στη ευθεία.

α. $x = 0$ **β.** $y = x$ **γ.** $y = 0$ **δ.** $y = -x$

(**Απ.:** Σωστή απάντηση α)

4. Οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή (δακτύλιος ομόκεντρων κύκλων κέντρου Κ) ικανοποιούν τις σχέσεις



α. $|z - 3| < 2$ και $|z - 3| < 1$ **β.** $|z - 3| > 2$ και $|z - 3| < 1$

γ. $|z - 3| < 2$ και $|z - 3| > 1$ **δ.** $|z - 2| > 3$ και $|z - 1| < 3$

(**Απ.:** Σωστή απάντηση γ)

5. Να κάνετε τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Α. $\left|\frac{x+i}{-x+i}\right| + \left|\frac{x-i}{-x-i}\right|$, $x \in R$ **1.** 2

β. $\left|\frac{\left(\frac{2+2i}{i}\right)}{1+i}\right|^{\nu}$ **2.** $\frac{3}{5}$

Γ. $\left|\frac{(\overline{z})^6}{-z^2 \cdot (\overline{z})^4}\right|$ **3.** $\frac{5}{3}$

Δ. $\frac{5 \cdot z \cdot \overline{z}}{3|z|^2}$ **4.** 1

5. 2^{ν}

(**Απ.:** Α $\to$ 1, Β $\to$ 5, Γ $\to$ 4, Δ $\to$ 3)

6. Έστω $z = x + yi$, $z \in C$ με $|z = 2|$. Αν $w = 2z - 2$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού αριθμού w.

(**Απ.:** Η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο Κ(–2, 0) και ακτίνα 4)

7. Αν $z \in C$, $z \neq 1$ και $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2$ να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο.

(**Απ.:** Η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο Κ(0, 0) και ακτίνα 2)

8. Αν M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 που είναι λύσεις της εξίσωσης

$|z|^2 - 5z + 6 = 0$, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα M_1 και M_2 και έχει το κέντρο του στην ευθεία με εξίσωση $-3x-5y+15=0$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}\right)$

9. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+1-i|=2$ να βρείτε:

i. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii. Τους μιγαδικούς αριθμούς του γεωμετρικού τόπου με το μικρότερο και το μεγαλύτερο μέτρο.

(**Απ.: i.** κύκλος $k(-1,1)$, $\rho=2$, **ii.** $z_1=\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)i$ $z_2=\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)i$)

10. Αν $|z_1|=|z_2|=1$ με $z_1,z_2\in C$ αποδείξτε ότι ο $\omega=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}$ (με $z_1\cdot z_2\neq -1$) ανήκει στο R.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι $\overline{\omega}=\omega$. Αποδείξτε και χρησιμοποιείστε ότι $\overline{z_k}=\dfrac{1}{z_k}$)

11. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2,z_3. Αν $z_1=\dfrac{\lambda z_2+\mu z_3}{\lambda+\mu}$ (1), $\lambda,\mu\in R$ και $\lambda\mu>0$ να αποδείξετε ότι $|z_2-z_1|+|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

(**Υπ.:** Να αντικαταστήσετε στο πρώτο μέλος την (1). Θα βρείτε $\dfrac{|z_2-z_3|(|\lambda|+|\mu|)}{|\lambda+\mu|}$. Προσέξτε ότι λ,μ ομόσημοι.)

12. Αν $z\in C$ και ισχύει $\left|\sqrt{2}z-3\sqrt{2}\right|=|z-5|$ να αποδείξετε ότι $|z-1|=2\sqrt{2}$.

(**Υπ.:**Υψώστε τη δοθείσα σχέση στο τετράγωνο και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα. $|w|^2=w\cdot\overline{w}$.)

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1-\lambda i)^\nu=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1) με $\lambda\in R$ και $\nu\in N^*$ δεν έχει λύση.

(**Υπ.:** Θεωρήστε ότι υπάρχει $\lambda\in R$ ώστε να ισχύει η (1). Από την ισότητα των μέτρων της (1) καταλήξτε σε άτοπο.)

14. Αν $\omega=1+(1-i)+(1-i)^2+...+(1-i)^\nu$, $\nu\in N^*$ να δείξετε ότι $2^{\frac{\nu+1}{2}}-1\le|\omega|\le 2^{\frac{\nu+1}{2}}+1$

(**Υπ.:** Προσέξτε ότι ο ω είναι το άθροισμα $\nu+1$ πρώτων όρων γεωμ. προόδου.)

15. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την ισότητα $|z-20|=24+|z+20|$

(**Απ.:** Κλάδος της υπερβολής $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{256}=1$ με $x<0$)

16. Αν $z\in C$ και $z^2+z=-1$ να δείξετε ότι $|z+1|=|z|=1$

(**Υπ.:** $|z+1|=\left|-z^2\right|=|z|^2=1$)

17. Αν $|z-2i|=1$ και $|z-i|\le 1$ να δείξετε ότι $1\le|z|\le\sqrt{3}$

(**Απ.:** Ο μιγαδικός με μικρότερο μέτρο είναι ο $z_3=i$ του οποίου η εικόνα είναι σημείο Γ(0,1) σημείο τομής του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ με τον άξονα y΄y)

18. Να δείξετε ότι ισχύει $|z_1 - z_2|^2 \le \left(1+|z_1|^2\right)\cdot\left(1+|z_2|^2\right)$ για κάθε $z_1, z_2 \in R$

(**Απ.:** $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right)$

19. i. Να δείξετε ότι $z + w - z\cdot w = -1 \Leftrightarrow z + w + z\cdot w = 1$ όπου z, w μιγαδικοί με $|z| = |w| = 1$

ii. Αν θέσουμε $z_1 = z + w + kzw + 1$ να δείξετε ότι: **α.** $z_1 = zw\overline{z}_2$ **β.** $|z_1| = |z_2|$

(**Απ.: i.** $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$ **ii. α.** $\overline{w + z + kzw} = ...$ **β.** $|\overline{z}_1| = |zw\bar{z}_2| = ...$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. **Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$ και M_1, M_2, M_3, M_4 οι εικόνες τους αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο.**

α. Να δείξετε ότι: $M_1M_2 // M_3M_4 \Leftrightarrow \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in R$.

β. Να δείξετε ότι: $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in I$.

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3 είναι συνευθειακά όταν $I_M\left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = 0$.

δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία οι εικόνες των 1, z , $1 + z^2$ είναι συνευθειακά σημεία.

Β. Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τέσσερα σημεία A, B, C, D τα οποία είναι εικόνες των αριθμών 1, i, -1, -i αντιστοίχως. Έστω M το σημείο που είναι εικόνα κάποιου μιγαδικού z.

α. Να εκφράσετε συναρτήσει του z τον πραγματικό αριθμό: $p = MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD$.

β. Υποθέτουμε ότι $\rho^{i\theta} = συνθ + iημθ$ με $r \ge 0$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Να βρείτε αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να είναι: $p = 1$.

γ. Αναζητήστε τους αριθμούς που έχουν εικόνες τα σημεία M του πραγματικού άξονα που είναι λύσεις της εξίσωσης $p = 1$. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν εικόνες σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που είναι ταυτόχρονα λύσεις της εξίσωσεις $p = 1$.