ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο “**ΒΙΒΛΙΟμαθήματα**” δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό “**Εξετάσεις**” της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.
Γι’ αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ’έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα “**εργαλείο δουλειάς**” για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **20 ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το “**ξεχωριστό θέμα**”.

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι’ αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

Η συγγραφική ομάδα

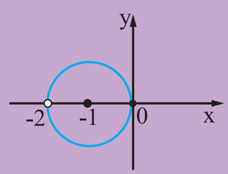
Περιεχόμενα

Α΄ Μέρος (Άλγεβρα)

Β΄ Μέρος (Ανάλυση)

1ο μάθημα

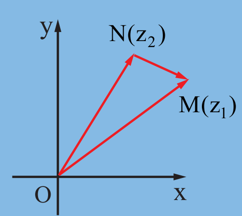
Μιγαδικοί αριθμοί



Α΄ Μέρος (Άλγεβρα)
2ο Κεφάλαιο

2ο μάθημα

Μέτρο Μιγαδικού αριθμού



Μάθημα 1

Μιγαδικοί αριθμοί

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης $x^2+1=0$ στο R δημιούργησε ένα νέο σύνολο, υπερσύνολο του R, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C στο οποίο θεωρήθηκε η ύπαρξη ενός νέου στοιχείου του i με την ιδιότητα $i^2=-1$ και το οποίο ονομάστηκε φανταστική μονάδα. Στο νέο σύνολο C οι βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που γνωρίσαμε στο R διατηρούνται με τους κανόνες λογισμού (π.χ. επιμεριστική, αντιμεταθετική ιδιότητα) και επιπλέον κάθε στοιχείο του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $z=\alpha+\beta i$ όπου $\alpha,\beta\in R$ (κανονική μορφή). Το α λέγεται **πραγματικό μέρος** και συμβολίζεται $\mathbf{Re(z)=\alpha}$ ενώ το β λέγεται **φανταστικό μέρος** και συμβολίζεται $\mathbf{Im(z)=\beta}$. Οι μιγαδικοί της μορφής $z=\alpha+0i$ αποτελούν το σύνολο R (πραγματικοί αριθμοί). Οι μιγαδικοί της μορφής $z=0+\beta i$ αποτελούν το σύνολο I (φανταστικοί αριθμοί). Είναι φανερό ότι τα σύνολα R,I είναι γνήσια υποσύνολα του συνόλου C (μιγαδικοί αριθμοί)

Συζυγείς μιγαδικοί

Έστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$. Ονομάζουμε συζυγή του z και συμβολίζουμε με $\overline{z}$ τον $\overline{z}=\alpha-\beta i$.

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$. Τότε: $z_1=z_2 \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

Ειδικά: αν $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$

Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών

1. Πρόσθεση: $z_1+z_2=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

2. Πολλαπλασιασμός: $z_1z_2=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=$

$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

3. Διαίρεση: Η διαίρεση εκτελείται με τη βοήθεια του συζυγούς του μιγαδικού του παρονομαστή.

Έστω $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i\neq 0$.

Τότε: $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\ldots=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Όμοια όπως στο R ορίζουμε για τον μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$:

i. $z^1=z$ **ii.** $z^0=1\ ,\ z\neq 0$

iii. $z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}\ ,\ \nu\in N^*\ ,\ z\neq 0$ **iv.** $z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z\ ,\ \nu\in N\ ,\ \nu>1$

Για τις δυνάμεις του i ειδικά ορίζουμε:
$i^1=i\ ,\ i^2=-1\ ,\ i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i\ ,\ i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$
Γενικότερα, $i^\nu=i^{4\pi+\upsilon}=\left(i^4\right)^\pi\cdot i^\upsilon=1\cdot i^\upsilon=i^\upsilon$ όπου π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4. Επειδή $\upsilon=0,1,2,3$ έχουμε: $i^\nu=i^\upsilon=\begin{cases}1, & \text{αν } \upsilon=0\\ i, & \text{αν } \upsilon=1\\ -1, & \text{αν } \upsilon=2\\ -i, & \text{αν } \upsilon=3\end{cases}$

Ιδιότητες συζυγών

I. Για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ ισχύουν:

i. $z\overline{z}=\alpha^2+\beta^2$ **ii.** $z+\overline{z}=2\alpha=2\,\mathrm{Re}(z)$ **iii.** $z-\overline{z}=2\beta i=2\left(\mathrm{Im}(z)\right)i$

II. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$. Τότε:

i. Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\overline{z}=z$
ii. Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\overline{z}=-z$

III. Για τους μιγαδικούς $z,\ z_1,\ z_2$ ισχύουν

i. $\overline{\overline{z}}=z$

ii. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_\nu}$

iii. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ και γενικότερα $\overline{z_1\cdot z_2\ldots z_\nu}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ldots\overline{z_\nu}$ για κάθε $\nu\in N^*$.

iv. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$ **v.** $\overline{\left(z^\nu\right)}=\left(\overline{z}\right)^\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

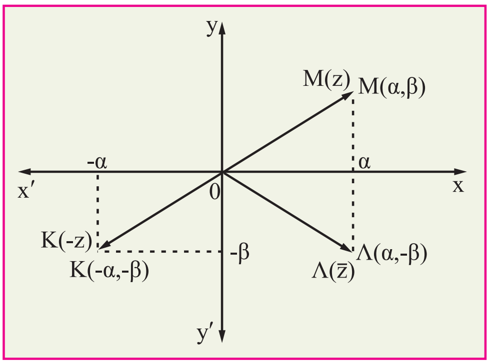
Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών

Έστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$. Στο μιγαδικό αριθμό z μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως σε κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$. Το σημείο Μ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού z συμβολίζεται τότε και με $\mathbf{M}(z)$ ή ακόμα με την διανυσματική ακτίνα $\overline{OM}$ του σημείου $M(\alpha,\beta)$.

Ένα επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών λέγεται μιγαδικό επίπεδο. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού σ' αυτόν ανήκουν τα σημεία $M(\alpha,0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $z=\alpha+0i=\alpha$ ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού σ' αυτόν ανήκουν τα σημεία $M(0,\beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών αριθμών $z=0+\beta i=\beta i$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των συζυγών μιγαδικών αριθμών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $M(\alpha,\beta)$ και $\Lambda(\alpha,-\beta)$ που είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών $z=\alpha+\beta i$ και $-z=-\alpha-\beta i$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $M(\alpha,\beta)$ και $K(-\alpha,-\beta)$ που είναι συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.



Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ (1) στο C με α, β, γ ∈ R, και $\alpha\neq 0$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ (διακρίνουσα της (1))

- Αν $\Delta>0$ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες : $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- Αν $\Delta=0$ η (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $z=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

- Αν $\Delta<0$ (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικούς συζυγείς: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Ισχύουν οι τύποι Vieta, δηλαδή $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται να γραφεί στην κανονική μορφή $\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta\in R$ ένας μιγαδικός αριθμός.
Εκτελούμε τις πράξεις όπως τις ορίσαμε στη θεωρία (Δυνάμεις - Ταυτότητες κ.λ.π)

Παράδειγμα 1

Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$ το μιγαδικό $z=\frac{5}{6}\left(\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}\right)$

Λύση

Είναι $z=\frac{5}{6}\left(\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}\right)=\frac{5}{6}\left[\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}\right]=\frac{5}{6}\left[\frac{4+4i-1+4-4i-1}{4+1}\right]=$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{8-2}{5}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=1=1+0i$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι δύο μιγαδικοί z_1, z_2 είναι ίσοι ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι ίσοι.
Γράφουμε τους z_1, z_2 στην κανονική τους μορφή $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ και διαπιστώνουμε ότι $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$ ή απαιτούμε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$ όταν ζητούνται συνθήκες, ώστε να είναι ίσοι.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1=(-2\alpha+3\beta)+(2\alpha+\beta)i$ **και** $z_2=(3-i)i$ **να είναι ίσοι.**

Λύση

Είναι $z_2=(3-i)i=3i+1=1+3i$, $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases}-2\alpha+3\beta=1\\ 2\alpha+\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\ 2\alpha+1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \alpha=1\end{cases}$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Υπολογισμός παραστάσεων με δυνάμεις του i (ακέραιος εκθέτης).

Η παράσταση i^ν ισούται με i^υ όπου υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν δια 4.
Επομένως οι δυνατές τιμές της παράστασης i^ν είναι $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τις τιμές της παράστασης Α για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου ν με

$A = \dfrac{i^{10} + i^{50}}{i^{\nu+1}}$.

Λύση

Είναι $i^{10} = i^{4\cdot 2+2} = i^2 = -1$, $i^{50} = i^{4\cdot 12+2} = i^2 = -1$, $i^{\nu+1} = i^{\nu} \cdot i = i^{4\pi+\upsilon} i = i^{\upsilon} \cdot i$

-Για $\upsilon = 0$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{i} = \dfrac{-2}{i} = \dfrac{-2(-i)}{-i^2} = 2i$

-Για $\upsilon = 1$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{-1} = 2$

-Για $\upsilon = 2$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{-i} = \dfrac{-2}{-i} = \dfrac{-2i}{-i^2} = -2i$

-Για $\upsilon = 3$ $\quad A = \dfrac{-1-1}{-i \cdot i} = \dfrac{-2}{-i^2} = -2$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις όπου ζητείται να δείξουμε ότι δύο μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι συζυγείς.

Γράφουμε τους z_1, z_2 στην κανονική μορφή $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ και διαπιστώνουμε ότι $\alpha = \gamma$ και $\beta + \delta = 0$ ή απαιτούμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$ να έχει λύση στην περίπτωση συνθήκης ώστε οι z_1, z_2 να είναι συζυγείς.

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι $x, y \in R$ ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + i^3(ix - 2y)$ και $z_2 = x^2 + 2yi^{11}$ να είναι συζυγείς.

Λύση

Είναι $z_1 = 2 - i(ix - 2y) = (2 + x) + 2yi$ και $z_2 = x^2 + 2yi^{4\cdot 2+3} = x^2 + 2yi^3 = x^2 - 2yi$.

Απαιτούμε $\begin{cases} 2 + x = x^2 \\ 2y - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad ή \quad x = 2 \\ y \in R \end{cases}$

Άρα $(x, y) = (-1, \lambda), \lambda \in R$ ή $(x, y) = (2, \kappa), \kappa \in R$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις όπου ζητείται να δειχθεί ότι ένας μιγαδικός έστω z είναι πραγματικός ή φανταστικός ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι z πραγματικός ή z φανταστικός.

α΄ τρόπος: Γράφουμε τον z στη μορφή $z = x + yi$ και διαπιστώνουμε ότι $y = 0$ ή $x = 0$ αντίστοιχα.

β΄ τρόπος: Διαπιστώνουμε ότι $z=\overline{z}$ ή απαιτούμε $z=\overline{z}$ όταν ζητούνται οι συνθήκες, ώστε $z\in R$ ή $z=-\overline{z}$, αν ζητείται ο z να είναι φανταστικός.

Παράδειγμα 5

i. Να δείξετε ότι για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και $\nu\in N^*$ ο $(\overline{z})^\nu+z^\nu$ είναι πραγματικός.

ii. Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε ο αριθμός $\omega=\dfrac{3+\alpha i}{\beta-3i}$ να είναι φανταστικός.

Λύση

i. Έστω $\omega=(\overline{z})^\nu+z^\nu$, τότε $\overline{\omega}=\overline{(\overline{z})^\nu+z^\nu}=\left(\overline{\overline{z}}\right)^\nu+(\overline{z})^\nu=z^\nu+(\overline{z})^\nu=\omega$. Άρα $\omega\in R$.

ii. Είναι $\omega=\dfrac{3+\alpha i}{\beta-3i}=\dfrac{(3+\alpha i)(\beta+3i)}{(\beta-3i)(\beta+3i)}=...=\dfrac{3\beta-3\alpha}{\beta^2+9}+\dfrac{9+\alpha\beta}{\beta^2+9}i$

Ο ω είναι φανταστικός αν $\dfrac{3\beta-3\alpha}{\beta^2+9}=0$ δηλαδή αν $\alpha=\beta$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Λύση εξίσωσης της μορφής $\alpha z=\beta,\ \alpha,\beta\in R$ ή $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ ή άλλης μορφής.

Η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ λύνεται με τη βοήθεια της διακρίνουσας όπως αναφέραμε στη θεωρία.

Για τις άλλες μορφές θέτουμε $z=x+yi$, εκτελούμε τις πράξεις και καταλήγουμε στη μορφή $\alpha+\beta i=0$. Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$. Επίσης η $\alpha z=\beta$ με $\alpha,\beta\in C$ μπορεί να λυθεί όπως ακριβώς και στο R.

Παράδειγμα 6

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(1+2i)(i-z)-(4i-3)(1-iz)=1+7i$

ii. $z^2-3\sqrt{3}\cdot z+9=0$

iii. $\overline{z}=3z-1$

Λύση

i. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$i-z+2i(i-z)-\left(4i-4i^2z-3+3iz\right)=1+7i \Leftrightarrow i-z-2-2iz-4i-4z+3-3iz=1+7i$$

$$\Leftrightarrow -3i-2+3+z(-1-2i-4-3i)=1+7i \Leftrightarrow z(-5-5i)=10i \Leftrightarrow -5z(1+i)=10i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{10i}{-5(1+i)}=\frac{-2i}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i+2i^2}{1+1}=\frac{-2-2i}{2}.$$ Άρα $z=-1-i$.

ii. Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 9=27-36=-9<0$ οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z_{1,2}=\frac{3\sqrt{3}\pm i\sqrt{9}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\pm 3i}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pm\frac{3}{2}i$$

iii. Θέτουμε $z=x+yi$. Η εξίσωση $\overline{z}=3z-1$ γίνεται $x-yi=3(x+yi)-1\Leftrightarrow$

$$1+x-yi-3x-3yi=0\Leftrightarrow 1-2x-4yi=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x=0\\-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=0\end{cases}.$$

Άρα η λύση είναι $z=\dfrac{1}{2}$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις που ζητείται ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού αριθμού z τα $\mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(z)$ του οποίου δίνονται παραμετρικά ή δίνεται ισότητα που μας οδηγεί σε παραμετρικά $\mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(z)$.

Γράφουμε τον μιγαδικό z στην κανονική του μορφή και απαλείφουμε την παράμετρο από τα $\mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(z)$.

Παράδειγμα 7

Να βρείτε στο μιγαδικό επίπεδο το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z=(1+5i)\lambda+2-3i,\ \lambda\in R$.

Λύση

Ο μιγαδικός z γράφεται $z=\lambda+5\lambda i+2-3i=(\lambda+2)+(5\lambda-3)i$. Αν $z=x+yi$ τότε $x=\lambda+2$ και $y=5\lambda-3$. Προκύπτει λοιπόν $\lambda=x-2$ και $y=5(x-2)-3=5x-13$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία με εξίσωση $y=5x-13$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να λυθούν οι ανισώσεις $P_1(z)\le P_2(z)$ ή $P_1(z)\ge P_2(z)$ όπου $P_1(z)$, $P_2(z)$ παραστάσεις του z με $z\in C$.

Θέτουμε $z=\alpha+\beta i$. Φέρνουμε την ανίσωση στην μορφή $x+yi\ge 0$ ή $x+yi\le 0$ και απαιτούμε $y=0$ διότι η διάταξη δεν έχει νόημα στο C.

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η ανίσωση $3z-1\ge z+7$ (1), $z\in C$.

Λύση

Αν $z=x+yi$ τότε $3(x+yi)-1\ge(x+yi)+7\Leftrightarrow(2x-8)+2yi\ge 0$ Πρέπει $y=0$ και η ανίσωση (1) γράφεται $2x-8\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$. Άρα λύση της (1) είναι $z=x+oi$ με $x\ge 4$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9

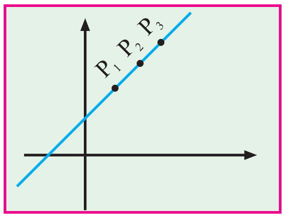
Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να καταλήξουμε από ισότητα μιγαδικών σε ισοδύναμη ισότητα διανυσμάτων

Παίρνουμε υπόψιν μας την εξής βασική πρόταση:
Αν ο λόγος δύο μιγαδικών z_1, z_2 είναι πραγματικός τότε οι εικόνες τους M_1, M_2 και η αρχή των αξόνων O είναι σημεία συνευθειακά.

Απόδειξη: $\frac{z_1}{z_2} = k,\ k \in R \Leftrightarrow z_1 = kz_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM_2}$ άρα τα O, M_1, M_2 συνευθειακά.

Παράδειγμα 9

Αν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα συνευθειακά σημεία P_1, P_2, P_3 να δείξετε ότι $w = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in R$ **.**



Λύση

Είναι $\overrightarrow{P_1P_2} = \kappa\overrightarrow{P_1P_3}$, $\kappa \in R \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \kappa\left(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}\right) \Leftrightarrow$

$z_2 - z_1 = \kappa(z_3 - z_1) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \kappa$ είναι προφανές ότι $w \in R$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο

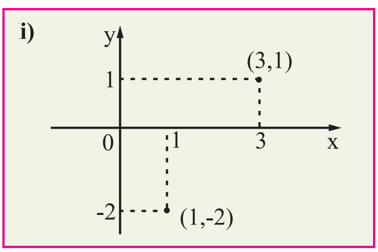
i. τους μιγαδικούς: $z_1 = 1 - 2i,\ \ z_2 = 3 + i$

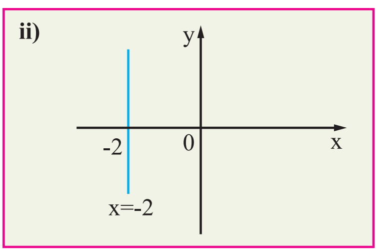
ii. τους μιγαδικούς z με $\mathrm{Re}(z) = -2$

iii. τους μιγαδικούς z με $\mathrm{Im}(z) = 1$

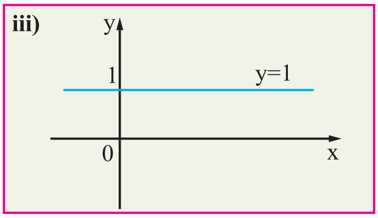
iv. τους μιγαδικούς z με $-2 \le \mathrm{Re}(z) \le 2$

Λύση

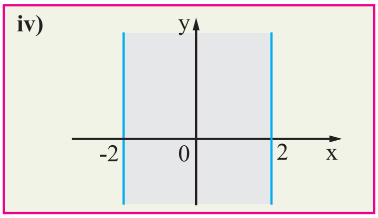




Οι μιγαδικοί με $\mathrm{Re}(z) = -2$ είναι οι αριθμοί της μορφής $-2 + yi$, με $y \in R$. Άρα, ανήκουν στην ευθεία $x = -2$



Οι μιγαδικοί με $\mathrm{Im}(z)=1$ είναι της μορφής $x+i$, $x\in R$ άρα παριστάνονται με τα σημεία $(x,1)$, όπου $x\in R$. Είναι δηλαδή τα σημεία της ευθείας $y=1$.



$-2\le \mathrm{Re}(z)\le 2 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$. Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών βρίσκονται μεταξύ των ευθειών $x=-2$ και $x=2$ ή πάνω στις δύο ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τον $\alpha\in R$ **ώστε να ισχύει:** $1+2\sqrt{2}\,i=3\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$.

Λύση

Είναι $1+2\sqrt{2}\,i=3\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}\,i=3\dfrac{(1+\alpha i)^2}{(1-\alpha i)(1+\alpha i)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}\,i=3\frac{1-\alpha^2+2\alpha i}{1+\alpha^2}\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}\,i=\frac{3(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2}+\frac{6\alpha}{1+\alpha^2}i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2}=1\\[2mm] \dfrac{6\alpha}{1+\alpha^2}=2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-3\alpha^2=1+\alpha^2\\ 6\alpha=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha^2=2\\ 2\sqrt{2}\alpha^2-6\alpha+2\sqrt{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2\sqrt{2}\alpha^2-6\alpha+2\sqrt{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ή}\ \alpha=\sqrt{2}\end{cases}$$

Άρα $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Άσκηση 3

Αν $z_1,z_2\in C$ **τότε** $z_1\cdot z_2=0$ **αν και μόνο αν** $z_1=0$ **ή** $z_2=0$

Λύση

Έστω $z_1\cdot z_2=0$. Αν $z_1\in C$ και $z_1\neq 0$ τότε ορίζεται ο $\dfrac{1}{z_1}$.

Επειδή $z_1\cdot z_2=0$, έχουμε $z_2=\dfrac{1}{z_1}\cdot(z_1\cdot z_2)=\dfrac{1}{z_1}\cdot 0=0$.

Όμοια αν $z_2 \neq 0$ τότε $z_1 = 0$. Άρα $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$.

Αντίστροφα αν $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$ τότε προφανώς $z_1 z_2 = 0$.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta i)^{2002} + (\beta-\alpha i)^{2002} = 0 \quad (1)$

Λύση

Προφανώς σε τέτοιες ασκήσεις πρέπει να αναζητηθεί κάποιος μετασχηματισμός ώστε να δειχθεί ότι πρόκειται για άθροισμα αντίθετων αριθμών.

Έχουμε: $(\beta-\alpha i)^{2002} = [-(\alpha i-\beta)]^{2002} = (\alpha i-\beta)^{2002} = (\alpha i+\beta i^2)^{2002} =$

$= [i(\alpha+\beta i)]^{2002} = i^{2002}(\alpha+\beta i)^{2002}$ Όμως $i^{2002} = i^{2000}\cdot i^2 = (i^4)^{500}\cdot i^2 = i^2 = -1$

Άρα $(\beta-\alpha i)^{2002} = -(\alpha+\beta i)^{2002}$. Οπότε η ισότητα (1) ισχύει.

Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση $z^2 = \dfrac{20\sqrt{3}-12i}{\sqrt{3}-9i}$ (1)**, με** $z \in C$**.**

Λύση

Έστω $z = x+yi$. Τότε η (1) γράφεται $(x+yi)^2 = \dfrac{20\sqrt{3}-12i}{\sqrt{3}-9i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = \frac{(20\sqrt{3}-12i)(\sqrt{3}+9i)}{(\sqrt{3}-9i)(\sqrt{3}+9i)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = 2+2\sqrt{3}i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ 2xy = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=2 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{x^2}=2 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x^4-2x^2-3=0 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{x} \end{cases}$$

Οι λύσεις της $x^4-2x^2-3=0$ είναι $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$. Άρα $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases}$.

Επομένως οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι: $z_1 = \sqrt{3}+i$ ή $z_2 = -\sqrt{3}-i$

Άσκηση 6

Αν $z = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **και** $\alpha,\beta \in R$ **να δείξετε ότι ο** $z_1 = (\alpha z^2+\beta z)\cdot(\beta z^2+\alpha z)$ **είναι πραγματικός.**

Λύση

Είναι $z^2 = \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z}$

Άρα, $z_1=(\alpha\overline{z}+\beta z)\cdot(\beta\overline{z}+\alpha z)=\alpha\beta\overline{z}^2+\alpha^2\cdot z\overline{z}+\beta^2\cdot z\overline{z}+\alpha\beta z^2=\alpha\beta\left(\overline{z}^2+z^2\right)+z\overline{z}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ (1)

Όμως $\overline{z}^2=\left(\overline{z^2}\right)=\left(\overline{\overline{z}}\right)=z$ οπότε $\overline{z}^2+z^2=z+\overline{z}$

Αν $z=x+yi$ τότε $z+\overline{z}=2x\in R$ ενώ $z\overline{z}=x^2+y^2\in R$

Επειδή και $\alpha\beta,\alpha^2+\beta^2\in R$ από την (1) προκύπτει ότι ο z_1 ανήκει στο R.

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z) στο μιγαδικό επίπεδο αν ισχύει $z^3\geq 1$.

Λύση

Έστω $z=x+yi$. Τότε $z^3=(x+yi)^3=x^3+3x^2yi+3x(yi)^2+(yi)^3=$

$=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i=\left(x^3-3xy^2\right)+\left(3x^2y-y^3\right)i$

Επειδή $z^3\geq 1$ απαιτούμε $z^3\in R$.

Σχόλιο: Όπου τίθεται θέμα διάταξης γίνεται παραπομπή στο R αφού στο C δεν έχει νόημα η διάταξη.

Για να ισχύει $z^3\in R$ πρέπει $3x^2y-y^3=0\Leftrightarrow y\left(3x^2-y^2\right)=0\Leftrightarrow y=0$ ή $3x^2-y^2=0$.

i. Αν $y=0$ τότε $z^3=x^3$ και επειδή $z^3\geq 1$ πρέπει $x^3\geq 1$, άρα $x\geq 1$.

Άρα σ' αυτήν την περίπτωση ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ημιευθεία $y=0$ με $x\geq 1$.

ii. Αν $3x^2-y^2=0$ τότε $y^2=3x^2$ (1). Άρα $y=\sqrt{3}x$ ή $y=-\sqrt{3}x$ και επειδή $z^3\geq 1$ πρέπει $x^3-3xy^2\geq 1$ και λόγω (1) $x^3-9x^3\geq 1$. Άρα $-8x^3\geq 1$, άρα $x\leq -\frac{1}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός τόπος είναι οι ημιευθείες $y=\sqrt{3}x$ με $x\leq -\frac{1}{2}$ και $y=-\sqrt{3}x$ με $x\leq -\frac{1}{2}$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε το μιγαδικό $\omega=\frac{z}{z+2}$ όπου $z=x+yi$ με $x,y\in R$.

α. Να γράψετε τον ω στη μορφή $\alpha+\beta i$ όπου $\alpha,\beta\in R$

β. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία

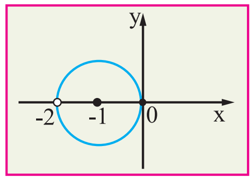
i. ο ω είναι φανταστικός, ii. ο ω είναι πραγματικός

Λύση

α. Για να γράψουμε τον ω στη μορφή $\alpha+\beta i$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγή του παρονομαστή. Πρέπει $z\neq -2$ δηλαδή με $z=x+yi$ είναι $x\neq -2$ ή $y\neq 0$.

Έχουμε: $\omega=\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{x+yi}{x+2+yi}=\dfrac{(x+yi)\left[(x+2)-yi\right]}{(x+2+yi)(x+2-yi)}=\dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}+\dfrac{2y}{(x+2)^2+y^2}i$

β.i. Ο ω είναι φανταστικός αν $\text{Re}(\omega)=0$.



Είναι $\text{Re}(\omega)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1$.
Άρα, ο ω είναι φανταστικός όταν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $(x+1)^2+y^2=1$ με κέντρο $(-1,0)$ και ακτίνα 1, από τον οποίο εξαιρείται το σημείο $(-2,0)$, διότι, αν $x=-2$ και $y=0$ είναι $z=-2$.

ii. Ο ω είναι πραγματικός αν $\text{Im}(\omega)=0 \Leftrightarrow 2y=0 \Leftrightarrow y=0$ δηλαδή η εικόνα Μ του μιγαδικού z ανήκει στην ευθεία $y=0$ (ο άξονας $x'x$) με εξαίρεση το σημείο $(-2,0)$.

Άσκηση 9

Έστω το πολυώνυμο $P(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0$. Να δείξετε ότι αν το P(z) έχει ρίζα το z_0 τότε έχει ρίζα και το συζυγή του, δηλαδή τον $\overline{z_0}$.

Λύση

Επειδή ο z_0 είναι ρίζα του $P(z)$ ισχύει $P(z_0)=0$.

Έχουμε $P\left(\overline{z_0}\right)=\alpha_\nu \overline{z_0}^{\,\nu}+\ldots+\alpha_1\overline{z_0}+\alpha_0=\overline{\alpha_\nu z_0^{\nu}+\ldots+\alpha_1 z_0+\alpha_0}=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0$.

Άρα ο $\overline{z_0}$ είναι ρίζα του $P(z)$.

Άσκηση 10

Έστω το τριώνυμο $P(z)=\alpha z^2+\beta z+\gamma$ με $\alpha\neq 0$, διακρίνουσα $\Delta<0$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ενώ ο $z\in\mathbb{C}$. Αν z_1, z_2 είναι οι λύσεις της $P(z)=0$:

α. Να δείξετε ότι $(z_1+z_2)\in\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι $\left(z_1^\nu+z_2^\nu\right)$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι πραγματικός αριθμός.

γ. Με $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι $d(A,B)=\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$.

δ. Αν $\Gamma(z_1+z_2)$ η εικόνα του z_1+z_2 τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$E_{(AB\Gamma)}=\frac{|\beta|\sqrt{|\Delta|}}{4\alpha^2}.$$

Λύση

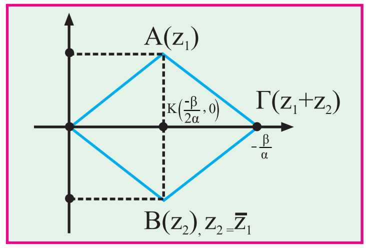
α. Τρόπος 1: $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ που ανήκει στο R από υπόθεση

Τρόπος 2: Οι z_1, z_2 είναι συζυγείς (δηλαδή $\overline{z_1}=z_2$) άρα $z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}=2\text{Re}(z_1)$

β. $z_1^{\nu} + z_2^{\nu} = z_1^{\nu} + \bar{z}_1^{\nu} = z_1^{\nu} + \overline{z_1^{\nu}} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1^{\nu}\right) \in R$

γ. $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$ άρα $A = \left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}, \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)$ και

$B = \left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}, \dfrac{-\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)$ συνεπώς



$$d(A,B) = \left|\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} - \left(\frac{-\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)\right| = \left|\frac{2\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right| = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$$

δ. $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ οπότε είναι $E_{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{2} AB \cdot K\Gamma = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}\left|-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right| = \dfrac{|\beta|\sqrt{|\Delta|}}{4\alpha^2}$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σ(σωστό) ή Λ(Λάθος).

A. Έστω $z = \alpha + \beta i$ τότε ισχύουν

i. $z + \bar{z} = 2\beta i$ **ii.** $z - \bar{z} = 2\alpha$ **iii.** $\left(\overline{\bar{z}}\right) = z$

iv. $(\alpha + \beta i)^2 = -i(\beta - \alpha i)^2$ **v.** $(\alpha + \beta i)^2 = \overline{(\alpha - \beta i)^2}$

B. Αν $z \in C$ και $z + 2i = 5 + \lambda i,\ \lambda \in R$ τότε $z = 5$ και $\lambda = -2$

Γ. i. $i^{2003} = i$ **ii.** $\dfrac{i^3}{i} = 1$ **iii.** $\dfrac{i^{22}+1}{i^{\nu}} = 0$

(**Απ: A. i.** Λ, **ii.** Λ, **iii.** Σ, **iv.** Λ, **v.** Σ, **B.** Λ, **Γ. i.** Λ, **ii.**Λ, **iii.** Σ)

2. Ο μιγαδικός $z = \dfrac{2-i}{1+2i}$ είναι ίσος με:

α. $2i$ **β.** i **γ.** $-i$ **δ.** $-2i$ **ε.** $3i$

(**Απ: γ.**)

3. Οι εικόνες των z, $-\bar{z}$, $\bar{z}$, $-z$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές

α. τετραγώνου **β.** ρόμβου **γ.** τραπεζίου **δ.** ορθογωνίου

(**Απ: δ.**)

4. Να γράψετε σε κανονική μορφή τους μιγαδικούς.

α. $\dfrac{5-2i}{1-2i}$ **β.** $\dfrac{2+3i}{4+i}$ **γ.** $\dfrac{3i}{i-7}$

(**Απ: α.** $\dfrac{9}{5} + \dfrac{8}{5}i$, **β.** $\dfrac{11}{17} + \dfrac{10}{17}i$, **γ.** $\dfrac{3}{50} - \dfrac{21}{50}i$)

5. Αν $z_1 = 2+i$ και $z_2 = 3-2i$ να βρείτε τους μιγαδικούς:

i. $z_1 + z_2$ **ii.** $z_1 \cdot z_2$ **iii.** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **iv.** $\dfrac{z_1^{\,2}}{z_2^{\,2}}$

(**Απ: i.** $5-i$, **ii.** $8-i$, **iii.** $\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i$, **iv.** $\dfrac{-33}{169}+\dfrac{56}{169}i$)

6. Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι μιγαδικοί $z = -3+(2\alpha-\beta)i$ και $w = \alpha - 5\beta - 3i$ να είναι συζυγείς.

(**Απ:** $\alpha = 2$, $\beta = 1$)

7. Αν $z \in C$ και $z^2 = \overline{z}^2$ να δείξετε ότι $z \in I$ ή $z \in R$.

8. Να βρείτε τους $\alpha,\beta \in R$ ώστε να ισχύει $(i-\alpha)^2 - (i+\alpha)^2 + \beta + 1 = \dfrac{1}{i}$.

(**Απ:** $\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\beta = -1$)

9. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 + z_2 \neq 0$ και $z = \dfrac{z_1}{z_1 + z_2}$. Να δείξετε ότι $z \in R \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z}_2 \in R$.

10. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:

i. $z^2 - 2z + 2 = 0$ **ii.** $4z^2 + 4z + 5 = 0$ **iii.** $2z + \overline{z} - 1 = 0$ **iv.** $2z + 1 = 3\overline{z}$

(**Απ: i.** $z_2 = 1-i$ **ii.** $z_2 = -\dfrac{1}{2} - i$ **iii.** $z = \dfrac{1}{3} + 0i$ **iv.** $z_3 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{35}4}{i}$ και $z_4 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{35}}{4}i$)

11. Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{1-z_1}{1-\overline{z}_1}$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να βρεθούν οι z_1 και z_2 ώστε $z_1 - z_2$ και z_2^2 να είναι πραγματικοί.

(**Απ:** $\beta = 0$ και $\alpha \in R, \alpha \neq -1$ ή $\alpha = -1$ και $\beta = \pm\sqrt{3}$)

12. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z = 5\text{συν}\varphi + 3\text{ημ}\varphi i$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(**Απ:** Έλλειψη $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$)

13. Έστω $z \in C$ με $z \neq 2$. Αν $w = \dfrac{z-4i}{z-2}$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $w \in R$.

(**Απ:** $2x + y = 4$ εκτός του (2, 0))

14. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z = x + yi$ αν $z\overline{z} - \left(z^2 + \overline{z}^2\right) + 1 = 0$.

(**Απ:** Υπερβολή $x^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$)

15. Έστω $z \in C$ με $z \neq i$. Αν ο αριθμός $w = \frac{z}{z^2+1}$ είναι φανταστικός. Να βρεθεί ο γ. τόπος του z.

(**Απ:** ο άξονας y΄y, εκτός των σημείων (0, 1) και (0, -1))

16. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = (1+2i)k + 1 - i,\ k \in R$ και M(z) η εικόνα του z

i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M(z)

ii. Να βρεθεί το k ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

(**Απ:** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ και $k = \frac{1}{5}$)

17. Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in R$. Αν $w = \frac{z+8i}{z+6}$ και $Re(w) = 0$ να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος που περνά από την αρχή των αξόνων.

18. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει: $z^2 - 1 \geq 0$.

(**Απ:** $z \in R$, $z \leq -1$ ή $z \geq 1$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Έστω $z \in C$ με $z = \varepsilon\varphi\theta + i\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ όπου $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

Β. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 = z_2 + \frac{1}{z_2}$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho \neq 1$ τότε να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z_1 ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

Γ. Αν $z^3 = 1$ και $z \notin R$ τότε

α. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z.

β. Να δείξετε ότι $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2) = 4$

γ. Να δείξετε ότι $(1-z)(1-z^2)(1-z^4)(1-z^5) = 9$

(**Απ.: Α.** Το τμήμα της ισοσκελούς υπερβολής $y^2 - x^2 = 1$ πάνω από τον $x'x$,

Β. $\frac{x^2}{\left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\rho^2-1}{\rho}\right)^2} = 1,\ E'(-2,0),\ E(2,0)$, **Γ.** $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$)