

# 2

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

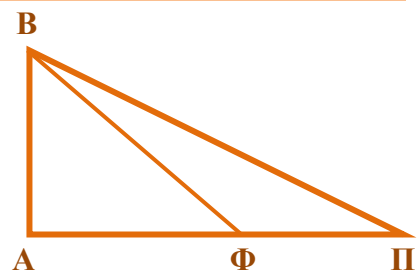
## Τριγωνομετρία

1. Να αποδείξετε ότι :  $\epsilon\phi(90^\circ - \omega) = \frac{1}{\epsilon\phi\omega}$
2. Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, αν ΑΓ= 9 cm και  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ .
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου στο οποίο χορδή μήκους 10 cm είναι η απέναντι πλευρά τριγώνου από γωνία  $120^\circ$  με κορυφή το κέντρο του κύκλου.
4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 
$$A = \frac{\epsilon\phi 60^\circ - \epsilon\phi 30^\circ}{\epsilon\phi 45^\circ + \epsilon\phi 30^\circ + \epsilon\phi 60^\circ}$$

$$B = \frac{\eta\mu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 30^\circ + 2 \cdot \eta\mu 60^\circ}{1 - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ}$$

$$\Gamma = \eta\mu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ - \eta\mu 70^\circ$$

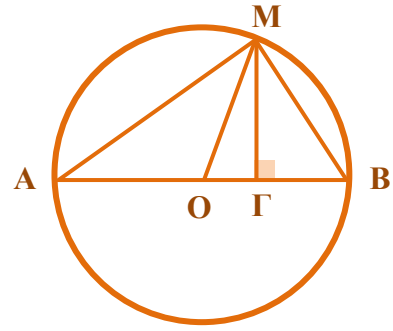
$$\Delta = \eta\mu 1^\circ + \eta\mu 2^\circ + \dots + \eta\mu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 46^\circ - \sigma\upsilon\nu 47^\circ - \dots - \sigma\upsilon\nu 89^\circ$$
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) να φέρετε τη διάμεσο ΓΔ και να συγκρίνετε τις  $\epsilon\phi B$  και  $\epsilon\phi \Delta$ .
6. Ένας παρατηρητής απέχει 12 m από ένα δέντρο και βλέπει την κορυφή του δέντρου υπό γωνία  $24^\circ$ . Να βρείτε το ύψος του δέντρου αν ξέρετε ότι τα μάτια του παρατηρητή απέχουν από το έδαφος 1,5 m.
7. Να υπολογίσετε την απόσταση ΦΠ όταν δίνεται  $BA = 100 \text{ m}$ ,  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Phi} = 60^\circ$ ,  $\hat{\Phi}\hat{B}\hat{\Pi} = 10^\circ$ .



8. Στο κάτω σχήμα  $OA = 1 \text{ cm}$ , ενώ η  $MG \perp AG$ . Να αποδείξετε ότι:

$$1 + \text{συν}\alpha = 2\text{συν}^2\alpha$$

$$(\alpha = \widehat{OAM}, \beta = \widehat{GOM}).$$



9. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \text{συν}^2 0^\circ + \text{συν}^2 30^\circ + \text{συν}^2 45^\circ + \text{συν}^2 60^\circ + \text{συν}^2 90^\circ$$

$$B = \frac{2 \cdot \text{συν}180^\circ - 3 \cdot \eta\mu270^\circ + \epsilon\phi0^\circ}{2 - 3 \cdot \eta\mu180^\circ}$$

10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $210^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $330^\circ$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\eta\mu^2x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \text{συν}^2x - 2 \cdot \text{συν}x - 3 = 0$$

όταν δίνεται ότι:  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

12. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

$$A = 2\eta\mu x - 5, \quad B = 3 - 4\text{συν}x$$

13. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο M, εάν  $\widehat{xOM} = \omega$  και:

α.  $\eta\mu\omega \cdot \text{συν}\omega > 0$

β.  $\text{συν}\omega \cdot \epsilon\phi\omega < 0$

14. Από όλα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  με  $\beta = 6 \text{ cm}$  και  $\gamma = 7 \text{ cm}$ , ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό;

15. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $150^\circ$ ,  $120^\circ$

16. Να υπολογίσετε τη γωνία  $x$ , αν  $0^\circ < x < 180^\circ$  και:

α.  $\epsilon\phi x = -2,05$

β.  $\text{συν}x = -0,97$

17. Αν  $0^\circ < x < 180^\circ$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu x \cdot \text{συν}(180^\circ - x) + \text{συν}x \cdot \eta\mu(180^\circ - x)$$

18. Αν  $0^\circ < x < 180^\circ$ , να λύσετε τις εξισώσεις:

$$2 \cdot \eta\mu^2x - 2\sqrt{2} \eta\mu x + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 2 \cdot \text{συν}^2x - 3 \cdot \text{συν}x - 2 = 0$$

19. Να εξηγήσετε γιατί είναι:

$$\eta\mu(90^\circ + x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu(90^\circ + x) = -\eta\mu x$$

20. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(90^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi\theta}{\epsilon\phi(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$B = \frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) \cdot \epsilon\phi\theta}{\epsilon\phi(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ - \theta)}$$

21. Να αποδείξετε ότι:

- $\eta\mu^2 27^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 153^\circ = 1$
- $\sigma\upsilon\nu^2 16^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 74^\circ = 1$

22. Αν  $2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$  και  $0^\circ < x < 360^\circ$  να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$ .

23. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει γωνία  $x$  τέτοια ώστε:

- $\eta\mu x = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu x = 0$
- $\eta\mu x = 1$  και  $\sigma\upsilon\nu x = 1$

24. Να υπολογίσετε την γωνία  $\omega$  εάν  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  και:

- $4\eta\mu x = -3\sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu^2 x = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

25. Να βρείτε τη γωνία  $x$  και τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς αν δίνεται ότι  $0^\circ < x < 180^\circ$  και:

- $5 \cdot \eta\mu^2 x - 2 = \sigma\upsilon\nu^2 x$
- $1 + \epsilon\phi^2 x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4\sigma\upsilon\nu^2 x}$

26. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

- $\eta\mu 90^\circ = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = \epsilon\phi 45^\circ$
- $\eta\mu 90^\circ = \frac{1}{2} \eta\mu 180^\circ$
- Αν  $270^\circ < x < 360^\circ$  τότε  $\eta\mu x = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$
- Αν  $180^\circ < x < 270^\circ$  τότε  $\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$
- $2 \cdot \eta\mu 45^\circ = \eta\mu 90^\circ$
- $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 150^\circ$
- $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \eta\mu 150^\circ$

- $\text{συν}30^\circ + \text{συν}45^\circ + \text{συν}60^\circ = \eta\mu120^\circ + \eta\mu135^\circ + \eta\mu150^\circ$
- Αν  $\text{συν}2x = 1$ , τότε  $\text{συν}x = \frac{1}{2}$
- Αν  $90^\circ < x < 180^\circ$ , τότε  $\text{συν}x = -\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\phi^2x}}$

Απάντηση  $\rightarrow$  Σωστές : 1, 4, 7, 8, 10

**27.** Να δείξετε ότι για κάθε γωνία  $x$  ισχύει:

$$-2 < \eta\mu x + \text{συν}x < 2$$

**28.** Αν  $\epsilon\phi\theta = \sqrt{2}$ ,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \epsilon\phi\theta + \eta\mu(180^\circ - \theta) - \text{συν}(90^\circ - \theta)$$

$$B = \eta\mu\theta + \eta\mu(90^\circ - \theta) - 2 \cdot \text{συν}(180^\circ - \theta)$$

**29.** Να αποδείξετε ότι:

- $\eta\mu^4x - \text{συν}^4x = \eta\mu^2x - \text{συν}^2x = 1 - 2\text{συν}^2x = 2\eta\mu^2x - 1$
- $\eta\mu^2x = \frac{\epsilon\phi^2x}{1+\epsilon\phi^2x}$
- $(1 - \eta\mu^2x)(1 + \epsilon\phi^2x) = 1$
- $1 - \frac{\text{συν}^2x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$
- $(2x \cdot \text{συν}\theta \cdot \eta\mu\theta)^2 + x^2 \cdot (\text{συν}^2\theta - \eta\mu^2\theta)^2 = x^2$
- $(x \cdot \eta\mu\omega \cdot \text{συν}\phi)^2 + (x \cdot \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\phi)^2 + (x \cdot \text{συν}\omega)^2 = x^2$
- $\eta\mu^3\omega + \text{συν}^3\omega = (\eta\mu\omega + \text{συν}\omega) \cdot (1 - \eta\mu\omega \cdot \text{συν}\omega)$
- $\frac{\text{συν}^2\omega - \eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega \cdot \text{συν}\omega} = \frac{1 - \epsilon\phi^2\omega}{\epsilon\phi\omega}$
- $\eta\mu^3\theta \cdot \text{συν}\theta - \eta\mu^5\theta \cdot \text{συν}\theta = \eta\mu^3\theta \cdot \text{συν}^3\theta$
- $\epsilon\phi^2x - \eta\mu^2x = \epsilon\phi^2x \cdot \eta\mu^2x$
- $\frac{\text{συν}x}{\text{συν}x - \eta\mu x} = \frac{1}{1 - \epsilon\phi x}$
- $\frac{\eta\mu x}{1 + \text{συν}x} = \frac{1 - \text{συν}x}{\eta\mu x}$
- $\frac{1 + \eta\mu x}{\text{συν}x} = \frac{\text{συν}x}{1 - \eta\mu x}$
- $\frac{\text{συν}x}{1 + \eta\mu x} + \epsilon\phi x = \frac{1}{\text{συν}x}$

- $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\eta\mu x}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\epsilon\varphi\theta}$
- $\frac{\eta\mu^3\omega + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \epsilon\varphi\omega$
- $\frac{1}{1 - \eta\mu\omega} + \frac{1}{1 + \eta\mu\omega} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$
- $\epsilon\varphi\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$

**30.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2$$

$$B = \frac{\epsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ - \theta)}$$

$$\Gamma = \eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

**31.** Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ όταν:

- $\hat{B} = 86^\circ, \hat{\Gamma} = 48^\circ, \beta = 7,24 \text{ cm}$
- $\hat{A} = 40^\circ, \hat{B} = 52^\circ, \alpha = 30,2 \text{ cm}$
- $\hat{A} = 30^\circ, \alpha = 7 \text{ cm}, \gamma = 12 \text{ cm}$
- $\hat{\Gamma} = 94^\circ, \hat{B} = 38^\circ, \alpha = 12 \text{ cm}$
- $\hat{A} = 38^\circ, \alpha = 7,1 \text{ cm}, \beta = 4,2 \text{ cm}$
- $\hat{B} = 49^\circ, \alpha = 31,2 \text{ cm}, \beta = 22,7 \text{ cm}$

**32.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\frac{\alpha}{\eta\mu B} = \frac{\beta}{\eta\mu A}$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**33.** Αν ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι:  $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

**34.** Να βρείτε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, στον οποίο μια χορδή μήκους 8 cm φαίνεται από το κέντρο του υπό γωνία 106°.

**35.** Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ στο οποίο:

$$\hat{A} = 40^\circ, \alpha = 5 \text{ cm}, \hat{B} - \hat{\Gamma} = 80^\circ$$

36. Ένα πλοίο Π απέχει από ένα λιμάνι Α 80 μίλια. Βόρεια και νότια του λιμανιού Α υπάρχουν τα λιμάνια Β και Γ αντίστοιχα (τα τρία λιμάνια είναι συνευθειακά). Εάν  $\widehat{A}PB = 50^\circ$ ,  $\widehat{A}PG = \frac{\pi}{4}$ , να υπολογίσετε πόσο απέχει το πλοίο από τα λιμάνια Β και Γ και την απόσταση ΒΓ.
37. Να επιλύσετε το τρίγωνο ΑΒΓ όταν:
- $\widehat{A} = 72^\circ$ ,  $\beta = 12 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 15 \text{ cm}$
  - $\alpha = 14 \text{ cm}$ ,  $\beta = 10 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 8 \text{ cm}$
38. Να βρείτε τις γωνίες ισοσκελούς τριγώνου με περίμετρο  $\Pi = 30 \text{ cm}$ , όταν κάθε μια από τις ίσες πλευρές είναι τα  $\frac{3}{4}$  της βάσης.
39. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι:
- Αν  $\widehat{A} < 90^\circ$  τότε  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$
  - Αν  $\widehat{A} > 90^\circ$  τότε  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
40. Τρεις κύκλοι με κέντρα Α, Β και Γ και ακτίνες 12 cm, 15 cm και 17 cm, αντίστοιχα, εφάπτονται ανά δυο εξωτερικά. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
41. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\Delta\Gamma = 6 \text{ cm}$ ,  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 3 \text{ cm}$  και  $\widehat{B} = 120^\circ$ . Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΔ και τις υπόλοιπες γωνίες του.
42. Να υπολογίσετε τις διαγωνίους ρόμβου με περίμετρο 32 cm και μια γωνία  $58^\circ$ .
43. Σε κύκλο ακτίνας 6 cm θεωρούμε χορδή  $AB = 9 \text{ cm}$ . Να υπολογίσετε την γωνία υπό την οποία φαίνεται η ΑΒ από το κέντρο του κύκλου.
44. Να αποδείξετε για το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:  $E = \frac{\gamma^2 \cdot \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{2 \cdot \eta\mu\gamma}$
45. Να υπολογίσετε τις γωνίες ρόμβου με περίμετρο 24 cm και μια διαγώνιο 5 cm.

