



# Ασκήσεις

## Στοιχεία Συναρτήσεων

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α.  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

β.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$

γ.  $g(x) = \frac{3-x}{(x+6)(2x-5)}$

δ.  $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4}$

ε.  $h(x) = \sqrt{4-x}$

στ.  $h(x) = \sqrt{2x-4}$

ζ.  $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$

η.  $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 5}$

θ.  $r(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1-x}{\sqrt{x+2}}$

ι.  $r(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2}{\sqrt{x+2}}$

2. Στις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν τα  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(-2)$  και  $f(2)$  :

α.  $f(x) = 2x^2$

β.  $f(x) = 2x^2 - 1$

γ.  $f(x) = -2x^2$

δ.  $f(x) = -2x^2 - 1$

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την εξίσωση:  $2f(x+1) - f(x-1) = -6$

4. Αν  $f(x) = \frac{6}{x}$  και  $g(x) = 2x - 1$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α.  $A = f(2) \cdot g(1) - f(-3) \cdot g\left(\frac{-5}{2}\right)$

β.  $B = \frac{2}{f(-1)} - \frac{3}{2} \cdot g\left(\frac{-1}{4}\right)$

5. Ένας πλασιέ βιβλίων παίρνει ημερομίσθιο 30 € και για κάθε βιβλίο που πουλάει άλλο 1 €. Να εκφράσετε το ημερομίσθιο του ως συνάρτηση του αριθμού των βιβλίων που πουλάει.

6. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο M (2, 7). Να βρεθεί η συνάρτηση που έχει για γραφική παράσταση την ευθεία αυτή.

7. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ .

- α. Να βρείτε για ποιές τιμές του x ορίζεται.
- β. Για τις τιμές αυτές να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- γ. Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

8. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ .

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- γ. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

9. Αν  $-1 \leq x < 4$ , να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση:

- α.  $y = -2x + 7$
- β.  $y = \frac{2}{x + 3}$

10. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παρακάτω συναρτήσεις:

- α.  $y = -3x - 5, -1 \leq x \leq 3$
- β.  $y = \frac{1}{3x + 2}, 2 \leq x \leq 6$

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 6$ . Για ποιες τιμές του x είναι:

- α.  $f(x) = x$
- β.  $f(x) = f(-x)$
- γ.  $f(x) = f(x + 1)$
- δ.  $f(x) = -5$

12. Αν  $f(x) = a \cdot x$  να δείξετε ότι:

- α.  $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
- β.  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- γ.  $f(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) = \lambda \cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_2)$

13. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4x^2 - \lambda x + 4}{(x - 1)^2}$ . Να βρεθεί το  $\lambda$ , ώστε η συνάρτηση να διέρχεται από το σημείο (2, 10).

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(2\lambda - 3)x + 2\lambda + 2}{x - 1}$ . Να βρείτε το  $\lambda$  αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M(2, 14)$ .

## Παραβολή

### Γραφικές Παραστάσεις

15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2 - 3x + 2$  και να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης και τον άξονα συμμετρίας της.
16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x + 1$ .
- α. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα  $x'x$ ;
  - β. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα  $y'y$ ;
  - γ. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής;
  - δ. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής;
  - ε. Να γίνει η γραφική παράσταση.
17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ .
- α. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα  $x'x$ ;
  - β. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα  $y'y$ ;
  - γ. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής;
  - δ. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής;
  - ε. Να γίνει η γραφική παράσταση.
18. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ .
- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
  - β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.
  - γ. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
  - δ. Να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας της.
19. Να σχεδιάσετε την παραβολή  $y = \alpha \cdot x^2$  αν αυτή διέρχεται από το σημείο:
- α.  $A(2, -6)$
  - β.  $B(-1, 4)$
20. Να σχεδιάσετε την παραβολή  $y = \alpha \cdot x^2 + \beta$  αν αυτή διέρχεται από το σημείο  $A(2, 2)$  και την αρχή των αξόνων.

21. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2 + \alpha \cdot x + \beta$ , αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο  $(1, 3)$  και από την αρχή των αξόνων.
22. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \alpha \cdot x^2 + \beta$ , αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από τα σημεία  $A(0, 2)$  και  $B(1, 1)$ .

### Κορυφή & Ακρότατα

23. Αν είναι γνωστό ότι η παραβολή  $y = x^2 + kx + \lambda$  διέρχεται από τα σημεία  $O(0, 0)$  και  $A(1, 4)$ , τότε:
- Να υπολογίσετε τα  $k, \lambda$ .
  - Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ ;
  - Παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο και σε ποιο σημείο;
  - Ποια ευθεία αποτελεί άξονα συμμετρίας της παραβολής;
24. Δίνεται η παραβολή  $y = \left(\frac{\alpha-1}{2} - 3\right) \cdot x^2$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  η παραβολή έχει ελάχιστο.
25. Δίνεται η παραβολή  $y = \left(\frac{\kappa-1}{2} - \frac{2\kappa-3}{3}\right) \cdot x^2$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\kappa$  η παραβολή έχει μέγιστο.
26. Δίνεται η παραβολή  $y = (2\lambda - 1)x^2 - 3x + 7$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  έχει μέγιστο.
27. Για ποια τιμή του  $\lambda$  η συνάρτηση  $y = 2x^2 - 2(2\lambda + 1)$  έχει γραφική παράσταση παραβολή, με κορυφή την αρχή των αξόνων;
28. Να βρεθεί ο  $\lambda$  ώστε η συνάρτηση  $y = \frac{3}{2}x^2 - 7\left(2\lambda + \frac{\lambda-11}{5}\right)$  να έχει γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων.
29. Δίνεται η παραβολή  $y = \left(\frac{1-3\alpha}{6} - 1\right) \cdot x^2$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .
30. Δίνεται η συνάρτηση  $y = x^2 - 2kx + k^2 + k + 1$ . Να βρείτε τον  $k$  αν η συνάρτηση έχει ελάχιστο τον αριθμό  $-4$ . Στη συνέχεια, να βρείτε την κορυφή της.
31. Να βρείτε το μέγιστο ή ελάχιστο και την κορυφή των συναρτήσεων :
- $f(x) = x^2 - 2x$
  - $f(x) = x^2 - 3x + 2$
  - $y = -x^2 + 2x + 8$

32. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε οι εξισώσεις  $y = (\lambda - 1)x^2$  και  $y = (2\lambda + 3)x^2$  να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .

### Διάφορες

33. Για ποιές τιμές των  $\lambda, \kappa$  η παραβολή  $y = (\lambda - 1)x^2 - 5x + 2\kappa - 6$  διέρχεται από τα σημεία  $\Delta(1, 2)$  και  $E(0, 6)$ .

34. Δίνεται η παραβολή  $y = x^2 + \kappa x + \lambda$ .

- α. Να βρείτε τους  $\kappa, \lambda$  αν είναι γνωστό ότι τα σημεία  $O(0, 0)$  και  $A(4, 4)$  βρίσκονται πάνω στην γραφική παράσταση της παραβολής.
- β. Ποιά η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από την κορυφή της παραπάνω παραβολής;

35. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή το  $O(0, 0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(2, -8)$ . Στη συνέχεια, να βρεθεί η εξίσωση της συμμετρικής της, ως προς τον άξονα  $x'x$ , και να γίνει η γραφική της παράσταση για  $-5 \leq x \leq -3$ .

36. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο 12 και μήκος  $x$ .

- α. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του  $x$ .
- β. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
- γ. Πότε το ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν;

37. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μήκη  $x$  και  $4 - x$ .

- α. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του  $x$ .
- β. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου.