

3

Άλγεβρα

Γραμμικές Εξισώσεις

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + \beta$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$. Να βρείτε τον αριθμό β .

2. Δίνεται η ευθεία $y = 3x + (2\alpha - 1)$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να είναι μια ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Για ποια τιμή του λ η ευθεία με εξίσωση $y = (2\lambda + 3)x + 2\lambda + 8$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ποια είναι τότε η εξίσωση της;

4.
 - α. Δίνεται η ευθεία $y = ax + 3$. Να προσδιορίσετε τον a , αν είναι γνωστό ότι η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$.
 - β. Ομοίως για την $y = 3x + (5\alpha - 1)$ αν διέρχεται από το σημείο $(-3, 5)$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο :
 - α. $A(1, 3)$
 - β. $B(2, 4)$
 - γ. $\Gamma(-3, 1)$
 - δ. $\Delta(-\frac{1}{2}, 4)$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(0, 3)$ και διέρχεται, επίσης, από το σημείο $\Lambda(-2, 11)$.

7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $3x - 6y = 4$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

8. Να βρείτε το λ αν είναι γνωστό ότι το σημείο $A(2\lambda, -1,5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2,5x$.

9. Να σχεδιάσετε τις ευθείες που έχουν εξισώσεις :

α. $x - 2y = 4$

β. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

γ. $2(1 - x) + 4(y + 2) = 14$

10. Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλες:

• $\epsilon_1: y = -x + 2$

• $\epsilon_2: 2y = -2x + 6$

• $\epsilon_3: y = \frac{1}{2}x + 3$

• $\epsilon_4: 4y = 2x + 16$

11. Για ποιες τιμές του λ είναι παράλληλες οι ευθείες:

α. $y = 3\lambda x + 2$ και $y = 9x - 2$

β. $y = 2\lambda(\lambda - 2)x + 3$ και $y = (\lambda + 3)x - 4$

γ. $y = (\lambda - 1)x + 3$ και $y = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x - 1$

δ. $y = (2\lambda + 1)x + \lambda$ και $2x + 3y = 5$

ε. $y = \frac{1 - \lambda}{12}x + 8$ και $y = \frac{\lambda + 1}{2}x - 6$

στ. $y = (\lambda^2 - 7\lambda)x + 3$ και $y = -12x + \lambda + 4$

$$\zeta. \quad y = \frac{\lambda}{\lambda+2}x+1 \quad \text{και} \quad y = \frac{\lambda-2}{3}x-6$$

12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $(\epsilon_1) y = (5\lambda + 1)x$ εάν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ και ότι η (ϵ_1) διέρχεται από το $B(1, 6)$.

13. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου OAB που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία A, B που η ευθεία $2x + 3y = 6$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

14. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) : y = 2\lambda x + 5$ και $(\epsilon_2) : y = \lambda^2 x + 8$, με $\lambda \neq 0$.

α. Σε ποια σημεία τέμνει κάθε ευθεία τους άξονες;

β. Για ποια τιμή του λ είναι μεταξύ τους παράλληλες;

γ. Αν $\lambda = 1$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζει η (ϵ_1) με τους άξονες.

15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = x + 2$, καθώς και των ευθειών $x = 1$ και $x = 4$. Να βρείτε το εμβαδό του τραapeζιού που σχηματίζεται από τις άνω ευθείες και τον άξονα $x'x$.

Γ ρ α μ μ ι κ ά Σ υ σ τ ή μ α τ α

16. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα: **(α)** με τη μέθοδο της αντικατάστασης και **(β)** με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\alpha. \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\beta. \quad \begin{cases} 2(x + y) - 7 = y \\ x + 2y = 2(x - 1) \end{cases}$$

$$\gamma. \quad \begin{cases} 2x = 5y + 1 \\ 24 - 7x = 3y \end{cases}$$

$$\delta. \quad \begin{cases} 0,6x - 0,8y = -1,2 \\ -0,3x + 0,4y = 0,8 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 24 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

17. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα (με όποια μέθοδο επιθυμείτε):

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{7} - \frac{y}{5} = 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{2x}{3} + y = 16 \\ x + \frac{y}{4} = 14 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \frac{x}{2} + 7y = -8 \\ x - \frac{y}{5} = -9 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} 3x - 2y = y + 3 \\ x + y - 1 = 2(x - 1) \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x + 4y}{6} = x \\ \frac{2(x - 1)}{3} + \frac{x - y}{4} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} 5(x + 2y) (3x + 13y) = 14 \\ 7x + 6y - 3(x + 4y) = 38 \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x + 2}{4} - \frac{y - 3}{6} = 2 \end{cases}$$

$$\theta. \begin{cases} \frac{2x - 1}{3} = 4 - \frac{y + 2}{4} \\ \frac{x + 3}{2} - \frac{x - y}{3} = 3 \end{cases}$$

18. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

19. Να βρείτε για ποια τιμή του a το σύστημα είναι αδύνατο:

$$\begin{cases} x + ay = 5 \\ (a-1) \cdot x + 2y = 1 \end{cases}$$

20. Να βρείτε για ποια τιμή των a, β είναι αδύνατο το σύστημα :

$$\begin{cases} ax + 6y = \beta \\ 2y - 3x = 5 \end{cases}$$

21. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών:

$\alpha.$ $y = 3x - 7$ και $y = 12x + 11$

$\beta.$ $x - y = 2$ και $2y - x = 1$

22. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) y = 2x + 3$ και $(\varepsilon_2) 3x + 6y = 12$.

$\alpha.$ Να δικαιολογήσετε γιατί οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.

$\beta.$ Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται.

23. Να δείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις :

• $\varepsilon_1 : 5x + 6y = 60$

• $\varepsilon_2 : 6y - x = 24$

• $\varepsilon_3 : 2x - y = 7$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

24. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τις ευθείες :

- $\varepsilon_1 : x - 2y = -6$
- $\varepsilon_2 : 3x + 4y = 2$
- $\varepsilon_3 : x = 2$

Αν Α, Β, Γ είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών ανά δυο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

25. Να βρεθεί η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την ευθεία που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 5$ και διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $y = \frac{3}{2}x - 3$ και $y = -\frac{5}{2}x + 5$.

26. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- α.** Α (-2, -8) και Β (4, 10) **β.** Α (0, -6) και Β (2, -4)
-

27. Να βρείτε ένα κλάσμα τέτοιο ώστε αν προσθέσουμε το 1 στον αριθμητή γίνεται ίσο με $\frac{1}{5}$, ενώ αν προσθέσουμε το 1 στον παρονομαστή γίνεται ίσο με $\frac{1}{7}$.

28. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές έχουν εξισώσεις : $2x - 3y = 1$, $x + y = 3$, $x - 3y = 3$

29. Να βρείτε δυο ετερόσημους αριθμούς με άθροισμα 9 και άθροισμα απόλυτων τιμών 25.

Μη Γραμμικά Συστήματα

30. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x - y = -1 \\ 3xy = x + 1 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} x^2 - x \cdot y + y^2 = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} y + x^2 - 4 = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

31. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x^2 - 3y = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 57 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy = y^2 - 1 \end{cases}$$

32. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} \frac{2x - 3y}{5} - \frac{2y - 3x}{11} = \frac{112}{55} \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3(x-y) - 4x + 5 = 6(2x+1) - 55 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 28 \end{cases}$$

33. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους -1 και 2 . Να βρείτε τα a και β .

34. Να λύσετε :

α. την εξίσωση : $x^2 - 5x + 6 = 0$

β. το σύστημα :
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

Τι παρατηρείτε;

35. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ αν ξέρουμε ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 6)$.

36. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x^2$ και $y = -3x + 2$ και να βρείτε τα κοινά σημεία τους.

37. α. Να βρεθεί το a , αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $y = ax - 4$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 8)$.

β. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραπάνω ευθείας με την παραβολή $y = -4x^2$.

38. Η παραβολή $y = x^2 - 3x + 4$ και η ευθεία $y = a \cdot x$ έχουν κοινό σημείο το $A(1, 2)$. Να βρεθεί το δεύτερο κοινό τους σημείο.

39. Δίνεται η παραβολή $y = x^2$ και η ευθεία $y = 3x - 2$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, σημεία στα οποία τέμνονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Αν υπάρχουν, τότε να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας γραφικά σχεδιάζοντας τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

40. Θεωρούμε την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$ και την ευθεία $y = x + \lambda$.

- α.** Για ποιες τιμές του λ η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία;
- β.** Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των δύο σημείων συναρτήσει του λ .
- γ.** Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων όταν $\lambda = \frac{3}{2}$;

41. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 - 6x + 9$ και η ευθεία $y = 2x + \kappa$. Να βρείτε το κ , ώστε η ευθεία να έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την παραβολή. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου και να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

42. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = ax^2 - 2x + 3$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 6)$, με την ευθεία που έχει εξίσωση $y = \kappa x + \lambda$, η οποία διέρχεται από το σημείο $B(0, 3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2$.

