

2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $3(x + 2) - 4x = -3(1 - 2x) + 5$

β. $\frac{x-5}{3} = \frac{x}{2}$

γ. $\frac{7-2x}{3} + \frac{5x}{4} = 1$

δ. $\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{4x-7}{4} - 5$

ε. $\sqrt{3x+4} = x + \sqrt{48}$

2. Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η εξίσωση: $(\alpha + 1)x + 5 = x + 3\alpha$ να έχει ως λύση τον αριθμό 1.

3. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση: $(2\mu + 1)x + 1 = x + 4\mu$ είναι αδύνατη και για ποιες τιμές είναι αδύνατη;

Προβλήματα

4. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, ώστε να έχουν άθροισμα 24.

5. Το άθροισμα της ηλικίας ενός πατέρα και της κόρης του είναι 50 έτη. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Να βρεθεί η σημερινή τους ηλικία.

6. Να βρείτε τα ζεύγη των λύσεων της εξίσωσης: $3x + 2y = 15$ όταν ο x παίρνει ακέραιες τιμές στο διάστημα από 1,5 έως 4,2 .



Εξισώσεις 2ου Βαθμού

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 + 1 = 0$

γ. $x^2 - 6 = 0$

ε. $5x^2 - 7x = 0$

ζ. $-4x^2 = 6$

θ. $x^2 - 1 = 0$

ια. $3x^2 + x = 0$

ιγ. $16x^2 = 100$

ιε. $2x^2 + 8 = 0$

β. $-2x^2 + 8 = 0$

δ. $-3x^2 - 7 = 0$

στ. $2x^2 = -5$

η. $2x^2 + 4x = 0$

ι. $4x^2 = 64$

ιβ. $2x^2 + x = 0$

ιδ. $x^2 = 5x$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 + 6x + 8 = 0$

γ. $x^2 + x + 1 = 0$

ε. $x^2 - 6x + 9 = 0$

ζ. $x^2 + 3x - 10 = 0$

β. $x^2 - 4x + 4 = 0$

δ. $x^2 - 5x + 6 = 0$

στ. $x^2 - x - 12 = 0$

η. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} = 0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x + 2)^2 + 5 = 0$

β. $(3x - 1)^2 = 9$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x + 2)^2 + (x - 7)^2 = 0$

β. $(x + 1)^2 + (3x + 7)^2 = 0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x - 1)^2 = -x$

β. $(4x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 9$

γ. $(x + 4)^2 - (x + 6)^2 = -8$

δ. $(x - 2)(x - 1) = 2x^2 + 4$

ε. $2(9 - x^2) - 4x = 3x(1 - x) + 1$

στ. $(x - 2)^2 + 2x(x + 2) = 2(3x + 10)$

ζ. $(2x - 1)^2 - (3 - x)^2 = (x + 1)(2x - 1)$

η. $(x^2 - 2)^2 - 5(x^2 - 2) + 6 = 0$

θ. $(x - 2)(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$

ι. $(4x - 1)^2 - 9 = (x - 1)^2$

ια. $(x - 2)(x + 5) = (x - 3)(x + 3) + 5$

ιβ. $(5x - 3)(x^2 + 5x + 2) = -10x + 6$

ιγ. $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$

ιδ. $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$

ιε. $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 29$

ιστ. $5(x^2 - 2x) - 3(x - 2)^2 = 28$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x + 1)(2x - 3) = 0$

β. $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$

γ. $(4x^2 - 9)(2x^2 + 4x) = 0$

δ. $x^2(x^2 + x + 4) = 0$

ε. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$

στ. $x(x^2 + 1)(x - 3) = 0$

ζ. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 6x + 9) = 0$

η. $(x + 5)(x - 1)(x + 2) = 0$

θ. $(3x^2 + 6)(3x^2 - 6)(3x^2 + 6x) = 0$

ι. $x^4 - 36 = 0$

ια. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

ιβ. $2x^3 + 8x^2 - 24x = 0$

ιγ. $3x^8 - 27x^6 = 0$

ιδ. $(x + 4)^2 - (x + 6)^2 = 0$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 + |x| = 0$

β. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

γ. $x^6 - 9x^3 = -8$

δ. $\sqrt{2}x^2 + 5x + 2\sqrt{2} = 0$

ε. $x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

στ. $2x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

ζ. $2x^2 + (1 + 2\sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$

η. $x^2 + (\alpha + 1)x - 2\alpha^2 + \alpha = 0$

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(\alpha\beta - 1) = 0$. Αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

15. Για ποιες τιμές των κ, λ η παρακάτω εξίσωση έχει μοναδική λύση το 0 ;

$$5x^2 + (2\kappa - 1)x + \lambda + 4 = 0$$

16. Για τις διάφορες τιμές του λ , να βρεθεί το πλήθος των ριζών της παρακάτω εξίσωσης:

$$(1 - \lambda)x^2 + (3 + 2\lambda)x - \lambda = 0$$

17. Για ποιες τιμές των κ, λ η παρακάτω εξίσωση έχει διπλή ρίζα; Κατόπιν να βρεθεί η ρίζα αυτή.

$$x^2 + (\kappa - 1)x + \lambda^2 = 0$$

18. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση: $x^2 + 9 = 4\alpha x$ είναι αδύνατη ενώ η εξίσωση: $4x^2 + 4x + \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες;

19. Να δείξετε ότι αν $\beta \neq 0$ και $\alpha > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ τότε η παρακάτω εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες:

$$x^2 + 2\sqrt{\alpha}x + \beta = 0$$

20. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^2 - 9$ και $B(x) = (x - 1)^2$.
- α. Να βρείτε το πολυώνυμο $\Gamma = A - B$.
- β. Να λύσετε τις εξισώσεις: $A = 0$, $B = 0$ και $\Gamma = 0$.
21. α. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Αν $\alpha + \gamma = \beta$ τότε να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = -1$ και $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$.
- β. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Αν $\alpha + \gamma = -\beta$ τότε να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 1$ και $x = \frac{\gamma}{\alpha}$.
22. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 6x + \lambda = 0$.
- α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει λύση;
- β. Να λυθεί η εξίσωση, όταν το λ πάρει την μεγαλύτερη τιμή από τις παραπάνω.

Προβλήματα

23. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 15 και γινόμενο 56.
24. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $x + 2$, x , $x - 2$. Να βρείτε τον αριθμό x , καθώς και το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου.
25. Σε διψήφιο αριθμό το ψηφίο των δεκάδων είναι μεγαλύτερο κατά 3 από το ψηφίο των μονάδων. Να βρεθεί ο αριθμός αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων είναι 29.
26. Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσα με τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου.
27. Βρείτε δύο αριθμούς, που να έχουν άθροισμα 9 και το άθροισμα των αντιστροφών τους να είναι $\frac{9}{20}$.
28. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, που η διαφορά των αντιστροφών τους να είναι ίση με το $\frac{1}{12}$.

29. Μια διάσταση ενός ορθογώνιου είναι 18m και η άλλη του διάσταση είναι ίση με το μήκος πλευράς τετραγώνου. Αν το εμβαδό του ορθογώνιου είναι ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου, τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

Κλασματικές Εξισώσεις

30. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{5}{x-2} = 4$$

$$\beta. \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+2}{3x-6}$$

$$\gamma. x - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{x}$$

$$\delta. \frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-1+5x}{x^2+1}$$

$$\epsilon. \frac{4x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{8x}{x^2-4} = 0$$

$$\sigma\tau. \frac{8}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{x}{9x^2-1}$$

$$\zeta. \frac{x+1}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} - \frac{2x-1}{2x+2}$$

$$\eta. \frac{4x+2}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3-x}$$

$$\theta. \frac{2x}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{x-2}$$

$$\iota. \frac{3}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} = \frac{-2}{x+2}$$

$$\iota\alpha. \frac{x-1}{x^2+2} - \frac{3}{x^2-4} = 0$$

31. Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{2x+1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = 1 + 7 \cdot \frac{x-1}{x^2-4x+3}$$

$$\beta. \frac{3x-1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{1-x}{x-2}$$

$$\gamma. \frac{x}{2x-4} - \frac{x+2}{3x+3} = \frac{x^2}{6(x-2)(2x-1)}$$

$$\delta. \frac{3}{y} - \frac{2}{y+3} = \frac{y}{y^2-9}$$

$$\epsilon. \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{(2x+3)(2x-1)}$$

$$\sigma\tau. \frac{8}{2x^2-x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{x}$$

$$\zeta. \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$$

$$\eta. \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

$$\theta. \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x}$$

$$\iota. \frac{x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x}{2 \cdot (x^2-1)}$$

$$\iota\alpha. \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{2x-5}{x^2-x-12} = \frac{7x-10}{x^2-6x+8}$$

$$\text{ιβ. } \frac{3x}{x^2 - x - 2} + \frac{2x + 5}{x^2 - 2x - 3} = \frac{5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{ιγ. } \frac{3x - 5}{2x - 3} - \frac{2x + 3}{3x + 5} + \frac{5x^2 + 2x}{(3x + 5)(3 - 2x)} = 0$$

$$32. \text{ Να λυθεί η εξίσωση: } \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = -1$$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \quad 2x^{-2} - 5x^{-1} + 3 = 0$$

$$\beta. \quad x^{-2} - 4x^{-1} + 3 = 0$$

$$34. \text{ Να λυθεί η εξίσωση: } \left(x - \frac{3}{x} \right)^2 - \left(x - \frac{3}{x} \right) - 2 = 0$$

35. Αν $A = 4x^2 + 12x + 9$, $B = 4x^2 - 2x$ και $\Gamma = (x - 2)^2 - 9$, τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \quad A = 0$$

$$\beta. \quad B = 0$$

$$\gamma. \quad \Gamma = 0$$

$$\delta. \quad \frac{\Gamma}{B} = 0$$

36. Αν είναι:

$$\bullet \quad A = (8x - 6)(4 - 2x) + (6x - 3)(4 - 2x)$$

$$\bullet \quad B = (10x - 6)^2 - (4x - 3)^2$$

τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \quad A = 0$$

$$\beta. \quad B = 0$$

$$\gamma. \quad \frac{A}{B} = 0$$

$$\delta. \quad \frac{B}{A} = 0$$

37. Αφού απλοποιήσετε την παράσταση A, να λύσετε την εξίσωση $A = 9$.

$$A = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x} - \frac{20x}{9 - 4x^2}$$

38. Αφού απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις A και B, να λύσετε την εξίσωση $A - B = 0$.

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}, \quad B = \frac{9 \cdot (2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4 \cdot (x^2 + 4x + 4)}$$

39. Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ και $B = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$.

α. Να βρείτε πότε ορίζονται.

β. Να τα απλοποιήσετε.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $A = B$.

40. Ομοίως για τα κλάσματα $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$ και $B = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 9}$.

41. Δίνονται τα κλάσματα $K = \frac{4x^3 + 8x^2}{4x^3 - 16x}$ και $\Lambda = \frac{9x^2 - 36}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$. Αφού τα απλοποιήσετε, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $K - \Lambda = \frac{8}{x^2 - 4}$.

