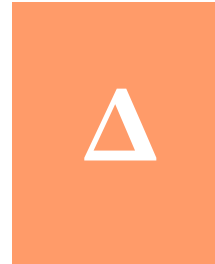




# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ



## Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

### Περιορισμοί

1. Για ποιες τιμές του  $x$  έχουν έννοια οι παραστάσεις:

α.  $\frac{2x+7}{x-3}$

β.  $\frac{4x-1}{1-3x}$

γ.  $\frac{1}{x^2-9}$

δ.  $\frac{3x+11}{x^2-3x}$

ε.  $\frac{3y-4}{(y-3)(1-2y)}$

στ.  $\frac{1}{x^2}$

ζ.  $\frac{1}{x^2+1}$

η.  $\frac{1}{x^2-5x+6}$

### Απλοποίηση

2. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α.  $\frac{5y-10}{y^2-2y}$

β.  $\frac{6\alpha^2\beta}{2\alpha^3\beta\gamma^2}$

γ.  $\frac{4\alpha-4\beta}{8\alpha-8\beta}$

δ.  $\frac{x^3-x}{x^2+x}$

ε.  $\frac{4\alpha^3-16\alpha}{2\alpha^3+4\alpha^2}$

στ.  $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-8x+15}$

ζ.  $\frac{3x-6}{4-x^2}$

η.  $\frac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}$

θ.  $\frac{x^2+4x+4}{3x^2-12}$

ι.  $\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta-\beta^4}$

ια.  $\frac{2x^2-6x}{2x^2-18}$

ιβ.  $\frac{x^2+10x+25}{3x^2-75}$

ιγ.  $\frac{x^3+x^2+2x+2}{x^5+x^4-4x-4}$

ιδ.  $\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

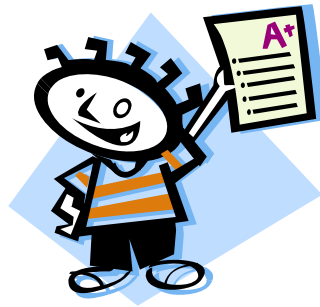
$$\text{Ιε. } \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^3 - xy^2}$$

$$\text{Ιστ. } \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma}$$

$$\text{Ιζ. } \frac{x^2 - 2x}{5x - 10}$$

$$\text{Ιη. } \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25}$$

$$\text{Ιθ. } \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$



## Πράξεις

3. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\text{α. } \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x - 1}$$

$$\text{β. } \frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{3x - 6} + \frac{x + 8}{3x^2 - 12}$$

$$\text{γ. } \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\text{δ. } \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\text{ε. } \frac{x + 2}{y - 4} \cdot \frac{y^2 - xy}{4 - x^2}$$

$$\text{στ. } (x + 4) \cdot \frac{x^2 y}{x^2 - 16}$$

$$\text{ζ. } \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\text{η. } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x + 3}{x - 3}$$

$$\text{θ. } \frac{\alpha^{2v} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^v + 1}$$

$$\text{ι. } \frac{x^4 - x^2 - 4x + 4}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x}$$

$$\text{ια. } \frac{\omega^2 - 9}{\omega + 3} : \frac{\omega + 3}{\omega^2 - 9}$$

$$\text{ιβ. } \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\text{ιγ. } \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} : \frac{x + y}{2}$$

$$\text{ιδ. } \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5xy^2}$$

$$\text{ιε. } \frac{4x}{3x} + \frac{1}{5x^3 y}$$

$$\text{ιστ. } \frac{1}{x + 3} - \frac{2}{x}$$

ιζ.	$\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x - 1}$	ιη.	$\frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{3x - 6} + \frac{x + 8}{3x^2 - 12}$
ιθ.	$\frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{2x}{x + 3}$	κ.	$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha + 2\beta} + \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha - 2\beta} - \frac{8\alpha\beta}{\alpha^2 - 4\beta^2}$
κα.	$\frac{2x + 4}{x^2 - 2x} + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4}$	κβ.	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$
κγ.	$\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x - 1}$	κδ.	$\frac{2x + 4}{x^2 - 2x} + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4}$
κε.	$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 1}$		
κστ.	$\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{\alpha - 1}$	κζ.	$\frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 + 4\alpha + 4} + \frac{\alpha - 3}{\alpha^2 + 2\alpha} - \frac{3}{\alpha + 2}$
κη.	$\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2 - 2\alpha\beta}$		
κθ.	$\frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$	λ.	$\frac{x^{2v}}{x^v - 1} - \frac{x^{2v}}{x^v + 1} - \frac{1}{x^v - 1} + \frac{1}{x^v + 1}$

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α.	$\frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$	β.	$\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{3}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha + \beta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right)$
----	--	----	--

γ.	$\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)$	δ.	$\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x} - 2\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)$
----	--	----	---

ε.	$\frac{1}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{2}{\frac{x}{3} - \frac{3}{x}}$	στ.	$\frac{x - \frac{y^2}{x^2}}{1 - \frac{y}{x}}$
----	---	-----	---

ζ.	$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$	η.	$\frac{3}{1 + \frac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \frac{3}{1 + \frac{\beta}{\gamma + \alpha}} + \frac{3}{1 + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}}$
----	---	----	---

θ.	$\frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$
----	--

ι.	$\frac{1}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$
----	--

$$\text{ια.} \quad \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 1}$$

$$\text{ιβ.} \quad \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\text{ιγ.} \quad \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) + \frac{x^2 - y^2}{x^2y - xy^2} \cdot (x+y)$$

$$\text{ιδ.} \quad \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(\frac{x}{y} + 1\right) \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - y^2}\right)$$

$$\text{ιε.} \quad \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) : \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

## Διάφορες

5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος. Ποιος είναι ο ακέραιος αυτός;

(Υπόδειξη: Ονομάστε  $333333 = x$ )

6. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

7. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $x$ ,  $y$  ισχύει ότι  $\alpha y = \beta x$ , να

αποδείξετε ότι η παράσταση  $A = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$  είναι ίση με 1.

8. Να αποδείξετε την ισότητα:  $\frac{x^{10}}{x^5 - 1} - \frac{x^{10}}{x^5 + 1} - \frac{1}{x^5 - 1} + \frac{1}{x^5 + 1} = 2$

9. Να αποδείξετε την ισότητα:  $\frac{x^v}{x^v + 1} + \frac{1}{x^v - 1} - \frac{2}{x^{2v} - 1} = 1$

10. Δίνονται τα κλάσματα  $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$  και  $B = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$ .

α. Να καθορίσετε τα πεδία ορισμού των κλασμάτων A και B.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση  $A - B$ .

11. Αν είναι  $x = 3\sqrt{2} - 2$  και  $y = 3\sqrt{2} + 2$  τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x \cdot y}$$

