



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ



## Ταυτότητες

### Τετράγωνο Αθροίσματος – Διαφοράς

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α.  $(\alpha + 3)^2$

β.  $(10 + \kappa)^2$

γ.  $(\mu - 4)^2$

δ.  $(4 - x)^2$

ε.  $(\alpha + 2\beta)^2$

στ.  $(6\kappa - 5)^2$

ζ.  $(3\alpha + 4\beta)^2$

η.  $(2\alpha - 7\beta)^2$

θ.  $(-\alpha - \beta)^2$

ι.  $(-x + y)^2$

2. Ομοίως:

α.  $(\alpha^2 + \beta)^2$

β.  $(\alpha - \beta^3)^2$

γ.  $(x^2 - y^3)^2$

δ.  $(3\alpha^2 + 4\alpha\beta)^2$

ε.  $(x^3 + 3xy^2)^2$

στ.  $(x^v - y^v)^2$

ζ.  $(\alpha + \frac{1}{2}\beta)^2$

η.  $(\frac{3\alpha}{2} - \frac{4\beta}{3})^2$

θ.  $(x - \sqrt{3})^2$

ι.  $(\sqrt{2x} - \sqrt{5y})^2$

ια.  $(\frac{2\alpha}{\sqrt{5}} - \beta\sqrt{5})^2$

### Κύβος Αθροίσματος – Διαφοράς

3. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α.  $(x + 1)^3$

β.  $(x - 2)^3$

γ.  $(3 - 2x)^3$

δ.  $(2\alpha + 3\beta)^3$

ε.  $(\kappa^2 - \lambda)^3$

στ.  $(\alpha + \frac{\beta}{2})^3$

$$\zeta. \left(\frac{x-y}{3-2}\right)^3 \qquad \eta. \left(x^2 - \frac{y}{3}\right)^3$$

$$\theta. \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^3$$

### Άθροισμα επί διαφορά / Διαφορά τετραγώνων

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α.	$(x-9)(x+9)$	β.	$(x+4)(x-4)$
γ.	$(3-\alpha)(3+\alpha)$	δ.	$(2\kappa-\lambda)(2\kappa+\lambda)$
ε.	$(2x-3y)(2x+3y)$	στ.	$(x^2-y)(x^2+y)$
ζ.	$(\kappa^2+\lambda^3)(\kappa^2-\lambda^3)$	η.	$(\alpha^3-3\beta)(\alpha^3+3\beta)$
θ.	$(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)$	ι.	$(2x^2y+6)(2x^2y-6)$
ια.	$(3xy^v-\omega^v)(\omega^v+3xy^v)$	ιβ.	$(0,4\alpha+0,5\beta)(0,4\alpha-0,5\beta)$
ιγ.	$(\kappa\lambda+\mu)(\mu-\kappa\lambda)$	ιδ.	$(\alpha^2-\beta)(\beta+\alpha^2)$
ιε.	$\left(\frac{x}{\alpha}+2\right)\left(\frac{x}{\alpha}-2\right)$	ιστ.	$\left(\frac{x}{11}+\frac{5y}{12}\right)\left(\frac{x}{11}-\frac{5y}{12}\right)$
ιζ.	$(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$	ιη.	$(\sqrt{5\alpha}-\sqrt{3\beta})(\sqrt{5\alpha}+\sqrt{3\beta})$

5. Να υπολογίσετε με τον συντομότερο τρόπο το γινόμενο:

$$(3x-2y)(9x^2+4y^2)(3x+2y)$$

### Συμπλήρωση Κενών

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

α.  $(\dots + \dots)^2 = 9x^2 + 12x + \dots$

β.  $(\dots - \dots)^2 = 25x^2 - \dots + 4y^2$

γ.  $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$

δ.  $(\dots - \frac{1}{2})^2 = 16x^4 - 4x + \dots$

ε.  $(5 + \dots)(5 - \dots) = \dots - 16x^2$

στ.  $(2\alpha + \dots)^3 = \dots + 3 \cdot \dots + 3 \cdot \dots + 27$

ζ.  $x^2 + \dots + 16y^2 = (\dots + \dots)^2$

η.  $\dots + 6\alpha\beta + \beta^2 = (\dots + \dots)^2$

θ.  $\dots - 12xy + 9y^2 = (\dots - \dots)^2$

ι.  $\alpha^2 x^4 + \dots + \dots = (\dots + \frac{1}{2}\beta y)^2$   
 ια.  $x^{2v} + y^{2v} + \dots = (\dots + \dots)^2$   
 ιβ.  $\dots - 8\alpha^2 \beta + \dots = (\alpha + \dots)^2$   
 ιγ.  $\dots - \dots + \dots - 8y^3 = (10x - \dots)^3$

## Παραστάσεις με ταυτότητες

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α.  $(1 - \alpha)(1 + \alpha) + \alpha^2$   
 β.  $2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$   
 γ.  $2(\kappa + 4)^2 - 3(\kappa + 2)(\kappa - 2)$   
 δ.  $2(2 - \beta)^2 - 3(\beta - 2)^2$   
 ε.  $-9\alpha^2 + (3\alpha + 4\beta)^2 - 24\alpha\beta$   
 στ.  $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$   
 ζ.  $2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$   
 η.  $(x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$   
 θ.  $(\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha - 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$   
 ι.  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - 2)^2$   
 ια.  $(x + 3)(5 + 2x)(2x - 5) - 2x(1 - 4x)^2$

8. Ομοίως:

α.  $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$   
 β.  $2(x - 1)^3 - (3x + 2)^2 + (5x + 2)(5x - 2)$   
 γ.  $(x - 2)^3 - 2x(x + 1)^2 + 3(x + 1)(x - 1)$   
 δ.  $(x - 2)^3 - x(3 - 2x)(3 + 2x) + 2x(3 + 2x)^2$   
 ε.  $(\alpha^3 + 1)^2 - (\alpha^2 + 1)^3 + 3\alpha^2(\alpha + 1)^2$   
 στ.  $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$   
 ζ.  $(2x + 1)^3 - (3x - 1)^2 + (2x + 8)(2x - 8)$   
 η.  $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^3 - (\alpha - \frac{1}{\alpha})^3$

9. Ομοίως:

α.  $(6x^{v-1} + y^{3v})(6x^{v-1} - y^{3v})$   
 β.  $(x + y)^3 + 3(x + y)^2(x - y) + 3(x + y)(x - y)^2 + (x - y)^3$   
 γ.  $(4x + 3y + 5\omega)^2 - (2x - y + 3\omega)^2 - (x + 3y - 2\omega)^2$

$$\delta. -2x(x-1)(x+2) + 3x(3x^2-2x)^3 + 5x^2(2x^4-x)^2$$

$$\epsilon. 2\alpha^3(4\alpha^2+3)^2 - 5(2\alpha+1)^3 - 3\alpha(4\alpha^3-\alpha^2)(4\alpha^3+\alpha^2)$$

10. Εάν  $x = 2\sqrt{3}+1$  και  $y=2\sqrt{3}-1$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

11. Εάν  $x + y = 6$  και  $x \cdot y = 8$ , να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha. x^2 + y^2 \qquad \beta. x^3 + y^3 \qquad \gamma. (x+3)(x-3)$$

$$\delta. (x-y)^2 \qquad \epsilon. x^4 + y^4$$

12. Εάν  $x - y = 5$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (x + y)^2 - 4xy$$

### Αποδεικτικές

13. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$\beta. (\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha^2$$

$$\gamma. (4x + 3y)^2 + (3x - 4y)^2 = 25(x^2 + y^2)$$

$$\delta. (2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 = 24xy$$

$$\epsilon. \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$$

$$\sigma\tau. (2x - y)^2 - (x - 2y)^2 = 3(x + y)(x - y)$$

$$\zeta. (x^2 + 1)(y^2 + 1) - (xy + 1)^2 = (x - y)^2$$

$$\eta. (\alpha + \beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\theta. (\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

$$\iota. \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-y}{2}\right)^2 = 2xy$$

$$\text{ια.} \frac{(3\sqrt{7}-1)^2 - (1+3\sqrt{7})^2}{4\sqrt{7}} = -3$$

### Διάφορες

14. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \qquad \beta. 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$$

$$\gamma. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$$

15. Αν  $\alpha + \beta = 7$  και  $\alpha\beta = 10$  τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \alpha^4 + \beta^4$$

16. Αν  $(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ , να αποδείξετε ότι  $x = y$ .

17. Αν  $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta$ .

18. Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ , να αποδείξετε ότι:

$$(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

19. Αν  $x + y = 7$  και  $xy = 12$  τότε να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$x^2 + y^2 \text{ και } (x + 2)(y + 2)$$

20. α. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2]$$

β. Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ .

21. Αν  $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$  να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι ισόπλευρο.

