ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

Μαθηματικά Ι

ΘΕΩΡΙΑ
ΑΠΑΝΤΑ

ΕΠΑ.Λ.

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

1. Τι ονομάζεται πληθυσμός μιας στατιστικής έρευνας;

Ονομάζεται το σύνολο των αντικειμένων (έμψυχων ή άψυχων) για τα οποία συλλέγονται στοιχεία.

2. Τι ονομάζεται άτομο ενός πληθυσμού ή ενός δείγματος;

Ονομάζεται κάθε στοιχείο του πληθυσμού ή του δείγματος.

3. Τι ονομάζεται δείγμα ενός πληθυσμού;

Ονομάζεται ένα μέρος (υποσύνολο) του πληθυσμού, που είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού και από την εξέταση του οποίου βγάζουμε συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό.

4. Τι ονομάζεται μέγεθος ενός πληθυσμού ή ενός δείγματος και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του και συμβολίζεται με το γράμμα **ν**.

5. Τι ονομάζεται μεταβλητή μιας στατιστικής έρευνας;

Ονομάζεται το χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού, ως προς το οποίο αυτός εξετάζεται.

6. Σε πόσα είδη διακρίνονται οι μεταβλητές μιας έρευνας;

Διακρίνονται σε δύο είδη: τις ποιοτικές και τις ποσοτικές μεταβλητές.

7. Ποιες μεταβλητές ονομάζονται ποιοτικές;

Ονομάζονται οι μεταβλητές εκείνες που δεν επιδέχονται μέτρηση, πχ. χρώμα ματιών, μόρφωση, θρήσκευμα, κλπ.

8. Ποιες μεταβλητές ονομάζονται ποσοτικές;

Ονομάζονται οι μεταβλητές εκείνες που μπορούν να μετρηθούν, πχ. ύψος, μισθός, ώρες εργασίας, τιμή, κλπ.

9. Σε πόσα είδη διακρίνονται οι ποσοτικές μεταβλητές και τι σημαίνει κάθε είδος;

Οι ποσοτικές μεταβλητές χωρίζονται στις διακριτές και τις συνεχείς μεταβλητές.

Διακριτές είναι εκείνες, στις οποίες κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές, πχ. αριθμός παιδιών, μέρες διακοπών, κλπ.

Συνεχείς είναι εκείνες, στις οποίες κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, που ανήκει σε διάστημα (ή ένωση διαστημάτων) πραγματικών αριθμών, πχ. ύψος, βάρος, κλπ.

10. Τι ονομάζεται συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού (ή του δείγματος) για τα οποία η μεταβλητή παίρνει την τιμή x_i και συμβολίζεται με $\mathbf{\nu_i}$.

Απλούστερα: ονομάζεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές συναντάμε την τιμή x_i μέσα στον πληθυσμό ή το δείγμα.

11. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα των συχνοτήτων των τιμών x μιας μεταβλητής Χ;

Γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή :

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$$

12. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ;

Ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας προς το μέγεθος του δείγματος και συμβολίζεται με $\mathbf{f_i}$. Είναι δηλαδή:

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$$

13. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων;

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$$

$$f_1\% + f_2\% + \ldots + f_\kappa\% = 100$$

14. Τι ονομάζεται αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται το άθροισμα των συχνοτήτων ν_i των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή και συμβολίζεται με $\mathbf{N_i}$.

15. Τι ονομάζεται σχετική αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων $\mathbf{f_i}$ των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή και συμβολίζεται με $\mathbf{F_i}$.

16. Τι ονομάζεται επικρατούσα τιμή μιας μεταβλητής Χ και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα και συμβολίζεται $\mathbf{M_o}$. Είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μία επικρατούσες τιμές, στην περίπτωση που δύο ή περισσότερες τιμές έχουν τη μέγιστη συχνότητα.

17. Τι ονομάζεται διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων και πώς συμβολίζεται;

Διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ονομάζεται:

Η **μεσαία** παρατήρηση αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό.

Το **ημιάθροισμα** των μεσαίων παρατηρήσεων αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο.

Συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα **δ**.

18. Τι ονομάζεται μέση τιμή ενός δείγματος ν παρατηρήσεων και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται το πηλίκο του αθροίσματος των παρατηρήσεων προς το πλήθος τους και συμβολίζεται $\overline{\mathbf{X}}$. Δηλαδή:

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{x}_i}{\nu} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_\nu}{\nu}$$

Αν οι μεταβλητές είναι ταξινομημένες σε πίνακα συχνοτήτων με κ διαφορετικές τιμές, τότε:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu}$$

19. Τι ονομάζεται εύρος των τιμών μιας μεταβλητής και πώς συμβολίζεται;

Ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα **R**.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

20. Τι ονομάζεται διακύμανση μιας μεταβλητής X που παίρνει ν το πλήθος τιμές x_i , i = 1, 2, ..., ν με μέση τιμή $\overline{X}$ και πώς συμβολίζεται;

Συμβολίζεται με **s²** και είναι το πηλίκο:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} (\overline{X} - x_i)^2}{\nu} = \frac{(\overline{X} - x_1)^2 + (\overline{X} - x_2)^2 + \ldots + (\overline{X} - x_\nu)^2}{\nu}$$

Αν οι μεταβλητές είναι ταξινομημένες σε πίνακα συχνοτήτων με κ διαφορετικές τιμές, τότε:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i (\overline{X} - x_i)^2}{\nu} = \frac{\nu_1(\overline{X} - x_1)^2 + \nu_2(\overline{X} - x_2)^2 + \ldots + \nu_\kappa(\overline{X} - x_\kappa)^2}{\nu}$$

21. Τι ονομάζεται τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X που παίρνει ν το πλήθος τιμές x_i , i = 1, 2, ..., ν με μέση τιμή $\overline{X}$ και πώς συμβολίζεται;

Συμβολίζεται με **s** και είναι το πηλίκο:

$$s = \sqrt{\frac{(\overline{X} - x_1)^2 + (\overline{X} - x_2)^2 + \ldots + (\overline{X} - x_\nu)^2}{\nu}}$$

ή

$$s = \sqrt{\frac{\nu_1(\overline{X} - x_1)^2 + \nu_2(\overline{X} - x_2)^2 + \ldots + \nu_\kappa(\overline{X} - x_\kappa)^2}{\nu}}$$

Πιο απλά, η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης:

$$\mathbf{s = \sqrt{s^2}}$$

22. Τι ονομάζεται συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας μιας ποσοτικής μεταβλητής X που παρουσιάζει μέση τιμή $\overline{X}$ και τυπική απόκλιση s;

Ονομάζεται το πηλίκο:

$$\mathbf{CV = \frac{s}{\overline{X}} \cdot 100\%}$$

23. Πότε ένας πληθυσμός (ή δείγμα) θα ονομάζεται ομοιογενής (ή ομογενής) και πότε όχι;

Θα ονομάζεται ομοιογενής αν $CV < 10\%$ και ανομοιογενής στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή $CV \geq 10\%$.

Απ' το αντίστοιχο βιβλίο του Ενιαίου Λυκείου συνάγεται ότι:
Θα ονομάζεται ομοιογενής αν $CV \leq 10\%$ και ανομοιογενής στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή $CV > 10\%$.

Ο Ρ Ι Α - Σ Υ Ν Ε Χ Ε Ι Α

1. Πότε θα λέμε ότι υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f(x) σε κάποιο x_o;

Το όριο μιας συνάρτησης θα υπάρχει μόνο αν τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή, αν:

$$\lim_{x\to x_o-} f(x) = \lim_{x\to x_o+} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)$$

Διαφορετικά, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_o-} f(x) \neq \lim_{x\to x_o+} f(x)$ *τότε θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει.*

2 Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ορίων;

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to x_o} g(x) = \ell_2$ τότε:

α. $\lim_{x\to x_o} [\, f(x) \pm g(x)\,] = \ell_1 \pm \ell_2$

β. $\lim_{x\to x_o} [\, f(x) \cdot g(x)\,] = \ell_1 \cdot \ell_2$

γ. $\lim_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$

δ. $\lim_{x\to x_o} |f(x)| = |\ell_1|$

ε. $\lim_{x\to x_o} [\, f(x)\,]^\nu = \ell_1^{\,\nu}$

στ. $\lim_{x\to x_o} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq 2$

3. Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται συνεχής σε κάποιο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Θα ονομάζεται **συνεχής**, σε κάποιον αριθμό $\mathbf{x_o}$, αν:

α. υπάρχει το όριο της στο x_o , δηλαδή :

$$\lim_{x\to x_o-} f(x) = \lim_{x\to x_o+} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)$$

β. κι επίσης, το όριο αυτό ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο x_o , δηλαδή :

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

4. Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται συνεχής σε ένα διάστημα (α, β);

Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του (α, β).

5. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων;

Αν οι συναρτήσεις f, g: $A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$, τότε:

α. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

β. Η συνάρτηση $h(x) = \kappa \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 (με $\kappa \in \mathbb{R}$).

γ. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

δ. Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 (με $g(x) \neq 0$).

ε. Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0.

στ. Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[\kappa]{f(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 (με $f(x) \geq 0$).

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται παραγωγίσιμη σε κάποιο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** (ή ότι έχει παράγωγο) σε ένα σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό **f ΄(x_o)** και το ονομάζουμε **παράγωγο** της f στο x_o.

Εναλλακτικά:

Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός. Δηλαδή, αν συμβαίνει:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

2. Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_o που ανήκει στο στο (α, β).

3. Τι ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης f: (α, β) → ℝ και πότε αυτή ορίζεται;

Παράγωγος συνάρτηση ονομάζεται η συνάρτηση **f ΄: (α, β) →** ℝ και ορίζεται μόνο στην περίπτωση που η f(x) είναι παραγωγίσιμη σε κάθε x_o του (α, β).

4. Τι σχέση υπάρχει μεταξύ παραγώγισης και συνέχειας;

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 δε θα είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σε αυτό.

5. Ποιες είναι οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων;

Συνάρτηση f(x)	Παράγωγος f΄(x)
c	0
x	1
x^{α} $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, x > 0$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$ $x > 0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
ημx	συνx
συνx	− ημx
εφx	$\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$
σφx	$-\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x}$
e^x	e^x
lnx $x > 0$	$\dfrac{1}{x}$

6. Ποιοι είναι οι βασικοί κανόνες παραγώγισης;

α. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

β. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

γ. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

δ. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

ε. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

7. Ποιος είναι ο κανόνας παραγώγισης μια σύνθετης συνάρτησης g(f(x));

$$\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Εναλλακτικά, επειδή η σύνθεση δύο συναρτήσεων συμβολίζεται και με διαφορετικό τρόπο, μπορούμε να γράψουμε:

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

8. Πότε μια συνάρτηση θα ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα (α, β) και πώς συμβολίζεται;

Μια συνάρτηση θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα (α, β), αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Γράφουμε: f $\nearrow$

9. Πότε μια συνάρτηση θα ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα (α, β) και πώς συμβολίζεται;

Μια συνάρτηση θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα (α, β), αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Γράφουμε: f $\searrow$

10. Πότε μια συνάρτηση θα ονομάζεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα (α, β);

Όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

11. Αν f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη, τότε ποια είναι η σχέση της παραγώγου της f(x) με τη μονοτονία της;

α. Αν **f ΄(x) > 0** για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο (α, β).

β. Αν **f ΄(x) < 0** για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο (α, β).

γ. Αν **f ΄(x) = 0** για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι **σταθερή** στο (α, β).

12. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_0;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x = x_0$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

13. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x = x_0$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

14. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο x_0;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 αν παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε αυτό.

15. Σε ποια σημεία αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης;

α. Στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f.

β. Στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Τα σημεία αυτά καλούνται **γωνιακά**.

γ. Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f, όπου η παράγωγός της υπάρχει και είναι ίση με μηδέν, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση **f ΄(x) = 0**. Τα σημεία αυτά καλούνται **στάσιμα**.

16. Ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f;

Κρίσιμα ονομάζονται τα γωνιακά και τα στάσιμα σημεία μαζί.

17. Διατυπώστε το θεώρημα του Fermat.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

18. Διατυπώστε το κριτήριο της 1ης παραγώγου.

Έστω συνεχής συνάρτηση f: $(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ και x_0 **κρίσιμο** σημείο της.

α. Αν $\mathbf{f'(x) > 0}$ **στο** $\mathbf{(\alpha, x_0)}$ και $\mathbf{f'(x) < 0}$ **στο** $\mathbf{(x_0, \beta)}$, τότε το $f(x_0)$ είναι **τοπικό μέγιστο** της f.

β. Αν $\mathbf{f'(x) < 0}$ **στο** $\mathbf{(\alpha, x_0)}$ και $\mathbf{f'(x) > 0}$ **στο** $\mathbf{(x_0, \beta)}$, τότε το $f(x_0)$ είναι **τοπικό ελάχιστο** της f.

γ. Αν η $\mathbf{f'(x)}$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο στα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε ελάχιστο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

19. Διατυπώστε το κριτήριο της 2ης παραγώγου.

Έστω συνεχής συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

α. αν $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0.

β. αν $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0.

20. Τι ονομάζουμε παράγουσα συνάρτηση μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Ονομάζουμε, αν υπάρχει, μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F: $\Delta \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\mathbf{F'(x) = f(x)}$, για κάθε $x \in \Delta$.

21. Πόσες παράγουσες έχει μια συνάρτηση;

Αν **F** είναι μία παράγουσα της f: $\Delta \to \mathbb{R}$, με Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f θα είναι της μορφής $\mathbf{F + c}$, όπου c κάποιος σταθερός αριθμός.

Άρα, έχει άπειρες παράγουσες που όλες διαφέρουν απλά κατά ένα σταθερό πραγματικό αριθμό.

22. Ποιες είναι οι παράγουσες των βασικών συναρτήσεων;

Συνάρτηση f(x)	Παράγουσα F(x)
0	c
1	$x + c$
x^{α} $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, x > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$-\dfrac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$	$\dfrac{1}{x} + c$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$	$\sqrt{x} + c$ $2\sqrt{x} + c$
$συνx$	$ημx + c$
$ημx$	$-συνx + c$
$\dfrac{1}{συν^2x}, \quad x \neq κπ + \dfrac{π}{2}$	$εφx + c$
$\dfrac{1}{ημ^2x}, \quad x \neq κπ$	$-σφx + c$
e^x	$e^x + c$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f: [α, β] → ℝ από το α έως και το β και πώς συμβολίζεται;

Αν F είναι παράγουσα συνάρτηση της f, τότε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β ονομάζεται η σταθερή διαφορά:

$$\mathbf{F(\beta) - F(\alpha)}$$

και το συμβολίζουμε ως:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx}$$

Επειδή η διαφορά F(β) – F(α) συμβολίζεται και ως $\left[\mathbf{F(x)}\right]_\alpha^\beta$ έχουμε τελικά:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} = \left[\mathbf{F(x)}\right]_\alpha^\beta = \mathbf{F(\beta) - F(\alpha)}$$

2. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

α. $\int_\alpha^\beta c\,dx = c\cdot(\beta-\alpha)$, όπου $c\in\mathbb{R}$.

β. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$

γ. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$, όπου $\alpha < \gamma < \beta$.

δ. $\int_\alpha^\beta \lambda\cdot f(x)\,dx = \lambda\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

ε. $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

στ. $\int_\alpha^\beta [\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)]\,dx = \lambda\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \mu\cdot\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

ζ. $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_\alpha^\beta$

η. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$.

θ. Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

3. Να εκφράσετε τον κανόνα της παραγοντικής ή κατά παράγοντες ολοκλήρωσης.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x)\,dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

4. Ποια είναι τα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων;

Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int_{\alpha}^{\beta} 0\,dx$	0
$\int_{\alpha}^{\beta} 1\,dx$	$[x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu}\,dx$	$\left[\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{x}\,dx$	$[\ln x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}\,dx$	$[e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x\,dx$	$[-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\,dx$	$[\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}$

5. Ποια είναι τα ολοκληρώματα των σύνθετων συναρτήσεων;

Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\left[\ln\lvert f(x)\rvert\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$	$\left[2\sqrt{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta}e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx$	$\left[e^{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta}f^{\nu}(x)\cdot f'(x)\,dx$	$\left[\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(x)}{f^{2}(x)}\,dx$	$\left[-\frac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

6. Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις κατακόρυφες ευθείες x = α, x = β;

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] τότε:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}\lvert f(x)\rvert dx$$

7. Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f και τον άξονα x΄x;

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης **f(x) = 0** (δηλαδή, τα σημεία τομής της C_f και του άξονα x΄x) τότε:

$$E(\Omega) = \int_{x1}^{x2}\lvert f(x)\rvert dx$$

8. Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f, g και τις κατακόρυφες ευθείες x = α, x = β;

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] τότε:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

9. Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f, g;

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) - g(x) = 0$ (δηλαδή, τα σημεία τομής των C_f και C_g) τότε:

$$E(\Omega) = \int_{x1}^{x2} |f(x) - g(x)| dx$$

Δ Ι Α Φ Ο Ρ Α

1. Οι βασικές αλγεβρικές ταυτότητες

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ Τετράγωνο αθροίσματος
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ Τετράγωνο διαφοράς
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ Διαφορά τετραγώνων
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ Κύβος αθροίσματος
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ Κύβος διαφοράς
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ Άθροισμα κύβων
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ Διαφορά κύβων

2. Η εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	**Πλήθος ριζών**
$\Delta > 0$	Το τριώνυμο έχει 2 ρίζες, πραγματικές και άνισες, έστω x_1 και x_2, τις οποίες βρίσκουμε από τον τύπο: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα, έστω ρ, την οποία βρίσκουμε από τον τύπο: $\rho = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

3. Η ανίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή < 0

α. αν **$\Delta > 0$**, δηλαδή υπάρχουν 2 ρίζες πραγματικές και άνισες, έστω x_1, x_2 τότε:

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	ετερόσημο του α	ομόσημο του α

β. αν **$\Delta = 0$**, δηλαδή υπάρχει 1 διπλή ρίζα, έστω ρ τότε:

x	$-\infty$ ρ	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	ομόσημο του α

γ. αν **$\Delta < 0$**, δηλαδή δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες τότε:

x	$-\infty$ $+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α

4. Οι βασικές γνώσεις και ιδιότητες των λογάριθμων

α. **$\ln 1 = 0$** *αντίστοιχα:* $\log 1 = 0$

β. **$\ln e = 1$** *αντίστοιχα:* $\log 10 = 0$

γ. **$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$** *αντίστοιχα:* $\log x + \log y = \log(x \cdot y)$

δ. **$\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$** *αντίστοιχα:* $\log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right)$

ε. **$\kappa \cdot \ln x = \ln(x^{\kappa})$** *αντίστοιχα:* $\kappa \cdot \log x = \log(x^{\kappa})$

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
σφ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
0	1	0	−1
1	0	−1	0
0	–	0	–
–	0	–	0

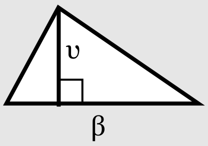
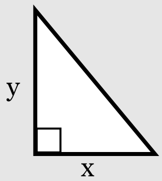
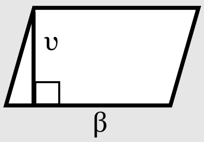
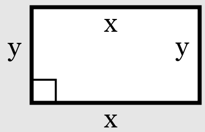
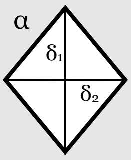
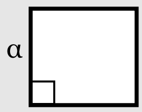
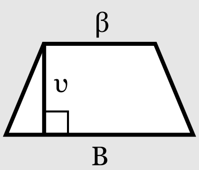
$\frac{\pi}{6} = 30^o$ $\frac{\pi}{4} = 45^o$ $\frac{\pi}{3} = 60^o$ $\frac{\pi}{2} = 90^o$ $\pi = 180^o$ $\frac{3\pi}{2} = 270^o$

6. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

α. $ημ^2x + συν^2x = 1$

β. $εφx = \frac{ημx}{συνx}$

7. Εμβαδά & περίμετροι βασικών σχημάτων

Σχήμα	Εμβαδό	Περίμετρος
Τρίγωνο 	$\mathbf{E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}}$ (β = βάση, υ = ύψος)	–
Τρίγωνο τρίγωνο 	$\mathbf{E = \frac{x \cdot y}{2}}$ (x, y = κάθετες πλευρές)	–
Παραλληλόγραμμο 	**Ε = β·υ** (β = βάση, υ = ύψος)	**Π = 2x + 2y** (x = μήκος, y = πλάτος)
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 	**Ε = β·υ** (β = βάση, υ = ύψος) **Ε = x·y** (x = μήκος, y = πλάτος)	**Π = 2x + 2y** (x = μήκος, y = πλάτος)
Ρόμβος 	$\mathbf{E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}}$ (δ_1, δ_2 = διαγώνιοι)	**Π = 4α** (α = πλευρά)
Τετράγωνο 	$\mathbf{E = \alpha^2}$ (α = πλευρά)	**Π = 4α** (α = πλευρά)
Τραπέζιο 	$\mathbf{E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}}$ (Β = μεγάλη βάση, β = μικρή βάση, υ = ύψος)	–