ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
Ορισμένο Ολοκλήρωμα

1. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω ;

Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f: [α, β] → ℝ από το α έως και το β και πώς συμβολίζεται ;

Αν F είναι παράγουσα συνάρτηση της f, τότε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β ονομάζεται η σταθερή διαφορά:

$$\mathbf{F(\beta) - F(\alpha)}$$

και το συμβολίζουμε ως:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx}$$

Επειδή η διαφορά F(β) – F(α) συμβολίζεται και ως $\left[\mathbf{F(x)}\right]_\alpha^\beta$ έχουμε τελικά:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} = \left[\mathbf{F(x)}\right]_\alpha^\beta = \mathbf{F(\beta) - F(\alpha)}$$

2. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων ;

1. $\int_\alpha^\beta c\,dx = c\cdot(\beta-\alpha)$, όπου $c\in\mathbb{R}$.

2. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$

3. $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$

4. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$, όπου $\alpha < \gamma < \beta$.

5. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

6. $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

7. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x)+\mu \cdot g(x)]\,dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

8. $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx = [f(x)]_{\alpha}^{\beta}$

9. Αν f(x) ≥ 0, για κάθε x∈[α, β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$.

10. Αν f(x) ≥ g(x), για κάθε x∈[α, β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

3. Ποια είναι τα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων ;

Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int_{\alpha}^{\beta} 0\,dx$	0
$\int_{\alpha}^{\beta} 1\,dx$	$[x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu}\,dx$	$\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}\,dx$	$[\ln x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}\,dx$	$[e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} ημx\,dx$	$[-συνx]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} συνx\,dx$	$[ημx]_{\alpha}^{\beta}$

4. Ποια είναι τα ολοκληρώματα των σύνθετων συναρτήσεων ;

Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\left[\ln\lvert f(x)\rvert\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$	$\left[2\sqrt{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx$	$\left[e^{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} f^{\nu}(x) \cdot f'(x)\,dx$	$\left[\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f^{2}(x)}\,dx$	$\left[-\frac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

5. Παραγοντική ολοκλήρωση / Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x)\,dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

6. Τι άλλο πρέπει να γνωρίζω για τα ορισμένα ολοκληρώματα ;

- Γενικά, αν κάποιος έχει εξοικειωθεί με την εύρεση της παράγουσας μιας συνάρτησης, δεν πρόκειται να συναντήσει καμια δυσκολία στον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Αρκεί, φυσικά, να έχει κατανοήσει τον ορισμό του. Το ορισμένο ολοκλήρωμα - δεν ξεχνάμε ότι - είναι απλά ένας αριθμός και το μόνο που χρειάζεται για να τον υπολογίσουμε είναι μια παράγουσα και διάθεση για... αρκετές πράξεις.
- Τα **σύνθετα** ολοκληρώματα και η **παραγοντική** ολοκλήρωση παρουσιάζουν σαφώς μεγαλύτερη δυσκολία στον υπολογισμό τους, από τα ολοκληρώματα των απλών συναρτήσεων. Γενικά, δεν προτιμώνται ως θέματα ασκήσεων, παρά μόνο σε ερωτήσεις θεωρίας τύπου «Σωστό-Λάθος» ή συμπλήρωσης κενών. Με αυτή τη σκέψη ως βάση, υπάρχει το πλεονέκτημα ότι ακόμη και στην «δυστυχή» περίπτωση να επιλεγούν ως υπο-ερώτημα μιας άσκησης, θα είναι τελικά κάποιας πολύ απλής μορφής.

7. Ποιες είναι μερικές βασικές ασκήσεις ;

1. Αν $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 6$ και $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx = 8$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-3}^{3} \left[3f(x) - 4g(x)\right]dx$$

2. Αν $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = -5$ και $\int_{2}^{1} 2 \cdot g(x)\,dx - 10 = 4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{1}^{2} f(x) + g(x)\,dx$.

3. Αν $\int_{-3}^{2} 12f(x)\,dx - \int_{2}^{-3} 7f(x)\,dx + \int_{2}^{8} 5f(x)\,dx = 80$ τότε να υπλογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος: $\int_{-3}^{8} f(x)\,dx$.

4. Να αποδείξετε ότι: $5\int_{-1}^{7} \frac{x^3+1}{x^3+4}\,dx - \int_{7}^{-1} \frac{15}{x^3+4}\,dx = 40$

5. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\int_{1}^{\alpha} \frac{x^2 - x}{2x+6}\,dx - \int_{\alpha}^{1} \frac{2x+3-x^2}{2x+6}\,dx = 7$$

6. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

α. $\int_{1}^{2} 3\,dx$ **β.** $\int_{1}^{3} x\,dx$ **γ.** $\int_{1}^{4} 3x\,dx$

δ. $\int_{0}^{1} x^2\,dx$ **ε.** $\int_{1}^{2} x^{-3}\,dx$ **στ.** $\int_{2}^{3} x^{\frac{1}{3}}\,dx$

ζ. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx$ **η.** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$ **θ.** $\int_{1}^{2} \frac{x}{x^3}\,dx$

ι. $\int_{0}^{1} \sqrt{x}\,dx$ **ια.** $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ **ιβ.** $\int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ιγ. $\int_{1}^{2} \sqrt[3]{x}\,dx$ **ιδ.** $\int_{1}^{2} \sqrt[5]{x^2}\,dx$ **ιε.** $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

7. Ομοίως:

α. $\int_{1}^{2} \frac{4x^2+6x+2}{2x}\,dx$ **β.** $\int_{1}^{3} \frac{3x^4+x^3+2}{x^3}\,dx$

γ. $\int_{1}^{4} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

8. Ομοίως:

α. $\int_1^2 (x-2)^2\,dx$ **β.** $\int_1^2 \frac{x+1}{x}\,dx$

γ. $\int_1^2 (x-1)^3\,dx$ **δ.** $\int_1^2 (2x-1)(2x+1)\,dx$

9. Ομοίως:

α. $\int_0^1 \left(e^x-2014\right)dx$ **β.** $\int_1^4 \frac{x\cdot\sqrt{x}}{x^{-2}}\,dx$

β. $\int_1^3 x^2\cdot\left(2x-\frac{x}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

10. Να υπολογιστούν τα παρακάτω σύνθετα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+1}\,dx$ **β.** $\int_0^1 \frac{x}{2x^2+7}\,dx$

γ. $\int_1^2 \frac{3x+1}{2\sqrt{x^3+x}}\,dx$ **δ.** $\int_1^2 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+2}}\,dx$

ε. $\int_{-2}^1 (2x+5)\cdot e^{x^2+5x+6}\,dx$ **στ.** $\int_{-1}^1 (x+2)\cdot e^{x^2+4x-3}\,dx$

η. $\int_0^1 2(x^3+3x+2)\cdot(3x^2+3)\,dx$ **θ.** $\int_0^1 (x^2+x+1)^2\cdot(2x+1)\,dx$

11. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α. $\int_1^e \ln x\,dx$ **β.** $\int_1^e x\cdot\ln x\,dx$

γ. $\int_1^e (x-1)\cdot\ln x\,dx$ **δ.** $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx$

ε. $\int_0^1 2x\cdot e^x\,dx$ **στ.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot ημx\,dx$

ζ. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot συνx\,dx$

12. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ και κατόπιν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx$.

13. Αν $f(x) = xe^{-x}$ και $g(x) = (αx + β)\,e^{-x}$, να βρεθούν τα α, β, έτσι ώστε η g να είναι παράγουσα της f και κατόπιν να υπολογισθεί το: $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.