ΟΡΙΟ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Συνέχεια Συνάρτησης

1. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω;

Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται συνεχής σε κάποιο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ;

Μια συνάρτηση θα ονομάζεται συνεχής, σε κάποιον αριθμό x_o του πεδίου ορισμού της, αν:

α. υπάρχει το όριό της στο x_o , δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)$$

β. κι επίσης, το όριο αυτό ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο x_o , δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται συνεχής σε ένα διάστημα (α, β) ;

Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_o του (α, β).

Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] ;

Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_o του (α, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων;

Αν οι συναρτήσεις f, g: $A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x_o \in A$, τότε:

α. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_o.

β. Η συνάρτηση $h(x) = \kappa\cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_o (με $\kappa\in\mathbb{R}$).

γ. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_o.

δ. Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 (με $g(x) \neq 0$).

ε. Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0.

στ. Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[\kappa]{f(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 (με $f(x) \geq 0$).

2. Ποιες σχέσεις / τύπους πρέπει να ξέρω ;

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

3. Τι άλλο πρέπει να γνωρίζω για τη συνέχεια ;

- Η συνέχεια μιας συνάρτησης σε κάποιο x είναι ένα βήμα «παραπάνω» απ' την ύπαρξη του ορίου στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι κάνουμε ό,τι ακριβώς κάναμε για να υπολογίσουμε το όριο **και** κάτι ακόμα.

  Αυτό το «κάτι ακόμα» σημαίνει ότι δε μας ενδιαφέρει μόνο πότε είναι $x < x_0$ ή $x > x_0$, αλλά και πότε $\mathbf{x = x_0}$. Θυμόμαστε πως, όταν εξετάζαμε τα όρια, αδιαφορούσαμε παντελώς για το ποιος κλάδος περιείχε την ισότητα. Τώρα, όμως, είναι ζωτικής σημασίας.

- Επειδή 99 στις 100 ασκήσεις, μας ζητείται να εξετάσουμε τη συνέχεια σε μια συνάρτηση με κλάδους, στο x_0 εκείνο στο οποίο αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης, θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι χρειάζεται να υπολογίζουμε 3 πράγματα:

  ▶ το όριο στο x_0 από τ' αριστερά,

  ▶ το όριο στο x_0 από τα δεξιά και

  ▶ την τιμή της συνάρτησης στο x_0 .

  κι ότι θα πρέπει και τα 3 αυτά να είναι μεταξύ τους ίσα, δηλαδή:

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

  Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

- Το ξέρω ότι το ξέρετε ότι το ξέρω ότι το ξέρετε, αλλά ας το επαναλάβουμε: το $f(x_0)$ **δεν** είναι όριο! Σημαίνει απλή αντικατάσταση, στον τύπο της συνάρτησης (στον κατάλληλο κλάδο), με x_0 στη θέση του x κι εκτέλεση όλων των δυνατών πράξεων.

4. Άλλο συνεχής στο x_0 κι άλλο συνεχής «σκέτο» ;

Σε κάποιες περιπτώσεις, πιθανόν, να ερωτηθούμε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής, χωρίς όμως να διευκρινίζεται κάποιο ιδιαίτερο x_0 .

- Μια τέτοια εκφώνηση υπονοεί ότι θα πρέπει να εξασφαλίσουμε τη συνέχεια **σε κάθε** x_0 του πεδίου ορισμού. Αυτό, φυσικά, δε σημαίνει ότι θα πρέπει να εξετάσουμε καθένα ξεχωριστά, από τα άπειρα σημεία, τα οποία αποτελούν οποιοδήποτε πραγματικό διάστημα. Συνεπώς, τι κάνουμε;

- Αν παρατηρήσουμε καλά, θα διαπιστώσουμε ότι σε κάθε συνάρτηση με κλάδους υπάρχουν μόνο ένα ή δύο «επικίνδυνα» σημεία - εκείνα στα οποία αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης - ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση η συνάρτηση συμπεριφέρεται «ομαλά». Αυτό που κάνουμε είναι ότι, στα ένα ή δύο «επικίνδυνα» σημεία, εξετάζουμε τη συνέχεια με τις γνωστές μεθόδους, ενώ για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις ξεμπερδεύουμε μ' ένα τυποποιημένο «ποιηματάκι».

  Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό:

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x+2} & , x<-2 \\ 9x^2-7x & , x\geq -2 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$. Στο μυαλό μας όμως, το χωρίζουμε σε τρία κομμάτια:

▪ $x<-2$ ▪ $x>-2$ ▪ $x=-2$

Στις πρώτες δύο περιπτώσεις, παραθέτουμε το «ποιηματάκι» μας:

- Για κάθε $x<-2$ η συνάρτηση f είναι συνεχής, γιατί «είναι πηλίκο συνεχών συναρτήσεων».
- Για κάθε $x>-2$ η συνάρτηση f είναι συνεχής, γιατί «είναι πολυωνυμική».
- Εξετάζουμε, τέλος, τη συνέχεια και στο $x_0=-2$, κατά τα γνωστά. Εξετάζουμε, δηλαδή, αν είναι ίσα τα: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ και $f(x_0)$.

Οι πλέον συνηθισμένες προτάσεις, που χρησιμοποιούμε συνήθως και βασίζονται στις ιδιότητες της συνέχειας, τις οποίες αναφέραμε στη θεωρία, είναι:

- Συνεχής ως πολυωνυμική.
- Συνεχής ως τριγωνομετρική.
- Συνεχής ως εκθετική.

- Συνεχής ως λογαριθμική.
- Συνεχής ως άθροισμα ή διαφορά συνεχών.
- Συνεχής ως γινόμενο ή πηλίκο συνεχών.

6. Ποιες είναι μερικές από τις βασικότερες ασκήσεις ;

1. Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} & , x > 1 \end{cases}$$

2. Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x^3+8} & , x \neq -2 \\ -\dfrac{8}{3} & , x = -2 \end{cases}$$

3. Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στα $x_0 = -1$ και $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 & , x < -1 \\ x^2 & , -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & , x \geq 2 \end{cases}$$

4. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-8}{x^2+x-6} & , x < 2 \\ -\dfrac{1}{2} & , x = 2 \\ \dfrac{\sqrt{2x}-2}{2-x} & , x > 2 \end{cases}$$

β. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+10x+3}{x^3+27} & , x > -3 \\ 5 & , x = -3 \\ \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{2x+6} & , x < -3 \end{cases}$$

γ. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 4x^3-2 & , x = 1 \end{cases}$$

δ. $$f(x) = \begin{cases} 2\ln x - 1 & , x > e \\ e^{x-e} & , x \leq e \end{cases}$$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{2x-6} & , x<3 \\ \lambda^2 x-2 & , x\geq 3 \end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x-2x^2+2}{x-2} & , x>2 \\ 2\lambda - x & , x\leq 2 \end{cases}$

γ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-x} & , x\neq 0, \dfrac{1}{2} \\ \lambda & , x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ δ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4} & , x\neq 2 \\ \lambda x+5 & , x=2 \end{cases}$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & , x>4 \\ \alpha & , x=4 \\ x^2+\beta & , x<4 \end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & , x>1 \\ \alpha-2 & , x=1 \\ \alpha x^2+\beta x & , x<1 \end{cases}$

7. Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ ώστε η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-(\lambda^2-1)x+1 & , x<1 \\ 2x^3-(\lambda^2-\mu)x+\lambda & , x\geq 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο Α (2, 16) .

Εναλλακτικά: Για ακόμα απαιτητικότερους λύτες, θέστε όπου:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-(\lambda^3+1)x+1 & , x<1 \\ 2x^3-(\lambda^2+\mu)x+\lambda & , x\geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad A\,(2, 15)$$

8. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases} 3x+4 & , x\leq 1 \\ 7\eta\mu\dfrac{\pi x}{2} & , x>1 \end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x & , x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\sqrt{2}}{2} & , x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

9. Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β $\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} -2\eta\mu x & , \ x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha\cdot\eta\mu x+\beta & , \ -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x & , \ x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$