ΟΡΙΟ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όριο Συνάρτησης

1. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω;

Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f: $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο x_0 ;

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f: $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο x_0 , αν οι τιμές της f(x) βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον αριθμό ℓ , όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0 (αλλά δε γίνεται απαραίτητα ίσο με το x_0).

Το όριο αυτό συμβολίζεται ως: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ορίων ;

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ τότε:

α. $\lim\limits_{x \to x_0} [\, f(x) \pm g(x) \,] = \ell_1 \pm \ell_2$

β. $\lim\limits_{x \to x_0} [\, f(x) \cdot g(x) \,] = \ell_1 \cdot \ell_2$

γ. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$

δ. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$

ε. $\lim\limits_{x \to x_0} [\, f(x) \,]^\nu = \ell_1^{\,\nu}$

στ. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq 2$

Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ του ορίου μιας συνάρτησης και των πλευρικών ορίων, σε κάποιο x_o ;

Το όριο μιας συνάρτησης θα υπάρχει μόνο αν τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή, αν:

$$\lim_{x\to x_o-} f(x) = \lim_{x\to x_o+} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)$$

Διαφορετικά, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_o-} f(x) \neq \lim_{x\to x_o+} f(x)$ τότε θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει.

2. Ποιες σχέσεις / τύπους πρέπει να ξέρω ;

$$\lim_{x\to x_o-} f(x) = \lim_{x\to x_o+} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)$$

3. Τι άλλο πρέπει να γνωρίζω για τα όρια ;

- Το πρώτο πράγμα που κάνουμε, κάθε φορά που μας δίνουν να υπολογίσουμε ένα όριο, είναι:
  - ▶ αντικατάσταση όπου x με x_o και
  - ▶ εκτέλεση όλων των δυνατών πράξεων.

  Αν οι πράξεις μας φαίνονται δύσκολες ή, στην πορεία, προκύψει απροσδιόριστη μορφή, δεν είναι κάτι που μας απασχολεί ή το γνωρίζουμε από την αρχή. Στην αρχή λοιπόν, αμέσως και πάντα, αντικατάσταση και κατόπιν πράξεις.

- Πρέπει να «χωνέψουμε» καλά, στο μυαλό μας, πως όταν λέμε ότι «το x τείνει πχ. στο $x_o = 3$» , τότε το x **δεν** είναι 3 , αλλά πλησιάζει το 3 απεριόριστα. Το γεγονός ότι - προκειμένου να υπολογίσουμε ένα όριο - αντικαθιστούμε στη θέση του x το x_o , είναι θέμα τακτικής και μεθοδολογίας και δεν υπονοεί, σε καμία περίπτωση, ότι το $x = x_o$.

- Αφού κάνουμε αντικατάσταση με το x_o **δεν** ξαναγράφουμε πλέον την έκφραση $\lim_{x\to x_o}$.

Πλευρικά Όρια

- Τα πλευρικά όρια είναι απαραίτητα στην περίπτωση, που έχουμε συνάρτηση με κλάδους, και μόνο για τον αριθμό x_o , στον οποίο αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης. Σε κάθε άλλη περίπτωση, επιλέγουμε τον κατάλληλο κλάδο και υπολογίζουμε απλά ένα - και μόνον ένα - όριο.

- Θυμάμαι τις ισοδυναμίες:
  - $x \to x_0^{+} \iff$ x τείνει στο x_0 **από δεξιά** $\iff$ $x > x_0$
  - $x \to x_0^{-} \iff$ x τείνει στο x_0 **από αριστερά** $\iff$ $x < x_0$

Απόλυτες Τιμές

- Αν το όριο, που πρέπει να υπολογίσουμε, περιέχει απόλυτες τιμές, τότε προσέχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:
  - Αν το x_0 μηδενίζει μία απόλυτη τιμή, τότε φτιάχνουμε πίνακα προσήμων και υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο x_0 . Ως γνωστόν, το όριο θα υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια ταυτίζονται.
  - Αν το x_0 **δεν** μηδενίζει καμία απόλυτη τιμή, τότε προχωρούμε σε απλή αντικατάσταση και πράξεις, χωρίς περιπτώσεις ή παγίδες.

4. Τι πρέπει να γνωρίζω για τις συναρτήσεις με κλάδους ;

Μια συνάρτηση με κλάδους (αυτές, κυρίως, που μας αφορούν) μπορεί να έχει μία από τις παρακάτω μορφές, οι οποίες δίνονται υπό μορφή παραδειγμάτων, για ευκολότερη κατανόηση:

α. $$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & , x<3 \\ x^2-4x+7 & , x\geq 3 \end{cases}$$

$\mathbf{x \to 3^-}$: 1ος κλάδος
$\mathbf{x \to 3^+}$: 2ος κλάδος

Στο παράδειγμα αυτό, πλευρικά όρια απαιτούνται μόνο για τον αριθμό $x_0 = 3$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, επιλέγουμε απλά τον κατάλληλο κλάδο και υπολογίζουμε μόνο ένα όριο.

β. $$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & , x<0 \\ 4 & , 0\leq x<2 \\ 2x^2-4 & , x\geq 2 \end{cases}$$

$\mathbf{x \to 0^-}$: 1ος κλάδος
$\mathbf{x \to 0^+}$: 2ος κλάδος

$\mathbf{x \to 2^-}$: 2ος κλάδος
$\mathbf{x \to 2^+}$: 3ος κλάδος

Στο παράδειγμα αυτό, πλευρικά όρια απαιτούνται για τους αριθμούς $x_0 = 0$ και $x_0 = 2$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, επιλέγουμε τον κατάλληλο κλάδο και υπολογίζουμε μονάχα ένα όριο.

γ. $$f(x)=\begin{cases} -10x^2-3 & , x>1 \\ 3 & , x=1 \\ 6x-11 & , x<1 \end{cases}$$

$\mathbf{x \to 1^-}$: 3ος κλάδος
$\mathbf{x \to 1^+}$: 1ος κλάδος

Στο παράδειγμα αυτό, πλευρικά όρια απαιτούνται μονάχα για τον αριθμό $x_0 = 1$. Ότι το $x_0 = 1$, βρίσκεται σε ξεχωριστό κλάδο δεν μας απασχολεί στο παραμικρό. Αυτό μας απασχολεί, μονάχα, στην περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε τη Συνέχεια της συνάρτησης.

δ. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x+2} & , x \neq -2 \\ 9x^2-7x & , x=-2 \end{cases}$

$x \to -2^-$: $1^{ος}$ κλάδος
$x \to -2^+$: $1^{ος}$ κλάδος

Στο παράδειγμα αυτό, πλευρικά όρια απαιτούνται μονάχα για τον αριθμό $x_0 = -2$. Ωστόσο, επειδή το $x \neq -2$ καλύπτει και τις δύο περιπτώσεις: $x < 2$ και $x > 2$, τα πλευρικά όρια ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται να υπολογίσω μόνο ένα όριο, στον 1^o κλάδο.

ε. $f(x)=\begin{cases} 3x^2+3 & , x \in (-\infty,\ 5] \\ \ln x-9 & , x \in (5,\ +\infty) \end{cases}$

$x \to 5^-$: $1^{ος}$ κλάδος
$x \to 5^+$: $2^{ος}$ κλάδος

Εδώ, πρέπει να καταλάβουμε ότι απλά:

- $x \in (-\infty, 5]$ σημαίνει: $x \leq 5$, ενώ
- $x \in (5, +\infty)$ σημαίνει: $x > 5$.

Συνεπώς, πλευρικά όρια απαιτούνται μονάχα για τον αριθμό $x_0 = 5$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, υπολογίζουμε μόνο ένα όριο, αναλόγα με τον κλάδο.

5. Η Απροσδιόριστη Μορφή 0/0

Είναι προφανές, αλλά να τονίσουμε ξανά ότι η απροσδιόριστη μορφή 0/0 εμφανίζεται όταν έχουμε κλασματική παράσταση. Διαφορετικά, δεν έχουμε κανένα απολύτως πρόβλημα.

Θυμόμαστε, λοιπόν, πως η απροσδιοριστία 0/0 άρεται με δύο βασικούς τρόπους:

Α. Παραγοντοποίηση με Σχήμα Horner ...

... αν ο αριθμητής κι ο παρονομαστής του κλάσματος είναι απλά πολυώνυμα.

Παρατηρήσεις

α. Για τη χρήση του Σχήματος Horner, επιλέγουμε πάντα το x_0 του ορίου.

β. Πρέπει να επισημάνουμε ότι συχνά η παραγοντοποίηση γίνεται πολύ συντομότερα, ευκολότερα και κομψότερα με χρήση:

- κοινού παράγοντα ή
- ταυτοτήτων

Ωστόσο, πολλοί μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί με αυτά, στη διάρκεια της σχολικής τους ζωής. Αντιθέτως, όλοι σχεδόν οι μαθητές, χρησιμοποιούν το Σχήμα Horner με σχετική αξιοπρέπεια, σχεδόν σαν παιχνίδι.

Είναι πάντως κρίμα και χάσιμο χρόνου, για ένα μαθητή, αντί να βγάλει έναν απλό κοινό παράγοντα ή να εκτελέσει μια παιδαριώδη διαφορά τετραγώνων, να προχωρά μηχανικά σε εφαρμογή Σχήματος Horner.

Β. Παραγοντοποίηση με Συζυγείς Παραστάσεις …

… αν ο αριθμητής ή/και ο παρονομαστής περιέχουν τετραγωνικές ρίζες.

Παρατήρησεις

α. Η μέθοδος των συζυγών παραστάσεων στηρίζεται, απλά, στην ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» :

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

β. Δεν ξεχνούμε ότι πρέπει να πολλαπλασιάζουμε **και** αριθμητή, **και** παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση, αλλιώς καταστραφήκαμε!

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Δεν προχωράμε, σαν καλά παπαγαλάκια, σε Σχήμα Horner ή Συζυγείς Παραστάσεις, μόνο και μόνο, γιατί βλέπουμε μπροστά μας κλάσματα και τετραγωνικές ρίζες. Θυμίζουμε ότι **πρώτα** κάνουμε αντικατάσταση με το x_0 και, μόνον, αφού ολοκληρώσουμε τις πράξεις καταλαβαίνουμε αν έχουμε να κάνουμε με απροσδιόριστη μορφή ή όχι.

6. Ποιες είναι μερικές από τις βασικότερες ασκήσεις ;

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -1}\left(e^{x+1} - \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{x}\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^4 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - x}\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{x\ln x}{x - 2e}\right)$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3 - 8}{2x^2 - 7x + 6}\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4}\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3 - 5x + 4}{3x^2 - 3}\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\frac{9x^2 + 6x + 1}{3x^2 + x}\right)$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}\right)$

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x^2 - 4}\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4x}\right)$

γ. $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}\right)$ **δ.** $\lim_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-5x}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right)$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x<-1 \\ x^2-x+2 & , x\geq -1 \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to -3} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 0} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 1} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to -1} f(x)$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} & , x>1 \\ 13 & , x=1 \\ \dfrac{3x-3}{x-1} & , x<1 \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to -2} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 0} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 1} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 3} f(x)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-2x+1} & , x<0 \\ 4-x^2 & , 0\leq x<2 \\ \dfrac{x^2-4}{x} & , x\geq 2 \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to -1} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 0} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 1} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 2} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 3} f(x)$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x+2} & , x\neq -2 \\ 9x^2-7x & , x=-2 \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια: $\lim_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -2} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 2} f(x)$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & , x\in(-\infty,\ 1] \\ \ln x-9x & , x\in(1,\ +\infty) \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to -2} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 0} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 1} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 3} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to e} f(x)$$

10. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\alpha+5 & , x<1\\ 6\alpha x-1 & , x\geq 1\end{cases}$$

11. Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών α και β, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$ και να είναι ίσο με 10 .

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+2\beta & , x<2\\ 3\beta x-2 & , x\geq 2\end{cases}$$

12. Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών α και β, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = -1$ και στο $x_0 = 3$.

$$f(x)=\begin{cases}-\alpha+2\beta x & , x\leq -1\\ \alpha x^2+2 & , -1<x<3\\ x^2-\beta-1 & , x\geq 3\end{cases}$$

13. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1-|5-x|}{1+|x|}\right)$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\left(|x-1|+3\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{|4x|}{2x}\right)$

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+|x|}{|x|}\right)$