ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

Μαθηματικά Ι

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΠΑ.Λ.

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

● ΟΡΙΣΜΟΣ

Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f: [α, β] → ℝ από το α έως και το β και πώς συμβολίζεται ;

Αν F είναι παράγουσα συνάρτηση της f, τότε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β ονομάζεται η σταθερή διαφορά:

$$\mathbf{F(\beta) - F(\alpha)}$$

και το συμβολίζουμε ως:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx}$$

Επειδή η διαφορά F(β) – F(α) συμβολίζεται και ως $\left[\mathbf{F(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$ έχουμε τελικά:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f(x)dx} = \left[\mathbf{F(x)}\right]_{\alpha}^{\beta} = \mathbf{F(\beta) - F(\alpha)}$$

● ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος ;

1. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c\cdot(\beta-\alpha)$, όπου $c\in\mathbb{R}$.

2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$

3. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

4. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$, όπου $\alpha < \gamma < \beta$.

5. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

6. $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

7. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)]\,dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

8. $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx = [f(x)]_{\alpha}^{\beta}$

9. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$.

10. Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

● ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης ή ολοκλήρωσης κατά παράγοντες ;

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

● ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Ποια είναι τα ολοκληρώματα των βασικών συναρτήσεων ;

Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int_{\alpha}^{\beta} 0\,dx$	0
$\int_{\alpha}^{\beta} 1\,dx$	$[x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu}\,dx$	$\left[\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{x}\,dx$	$[\ln x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}\,dx$	$[e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x\,dx$	$[-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\,dx$	$[\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}$

- **ΣΥΝΘΕΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ**

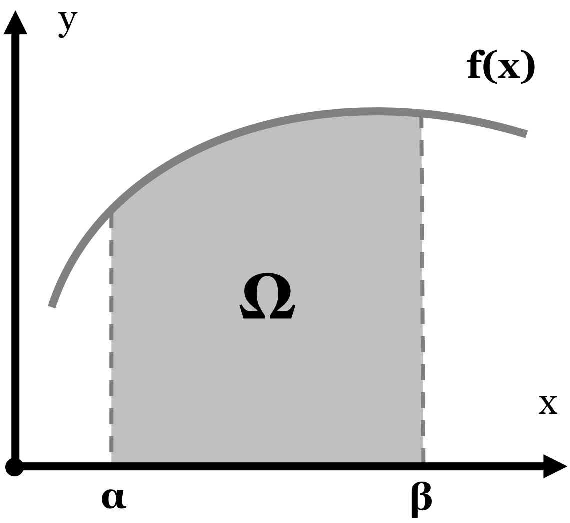
Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\left[\ln\lvert f(x)\rvert\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$	$\left[2\sqrt{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx$	$[e^{f(x)}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} f^{\nu}(x)\cdot f'(x)\,dx$	$\left[\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)}{f^{2}(x)}\,dx$	$\left[-\dfrac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις κατακόρυφες ευθείες x = α, x = β ;

1

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] τότε:

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx}$$

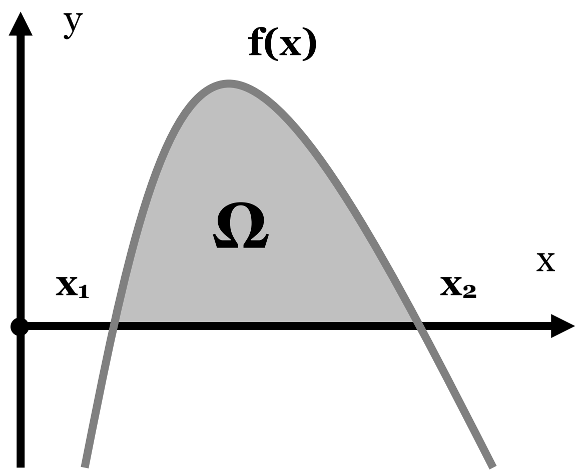


Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f και τον άξονα x΄x ;

2

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ οι ρίζες της εξίσωσης **f(x) = 0** (δηλαδή, τα σημεία τομής της C_f και του άξονα x΄x) τότε:

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{x1}^{x2} |f(x)|dx}$$

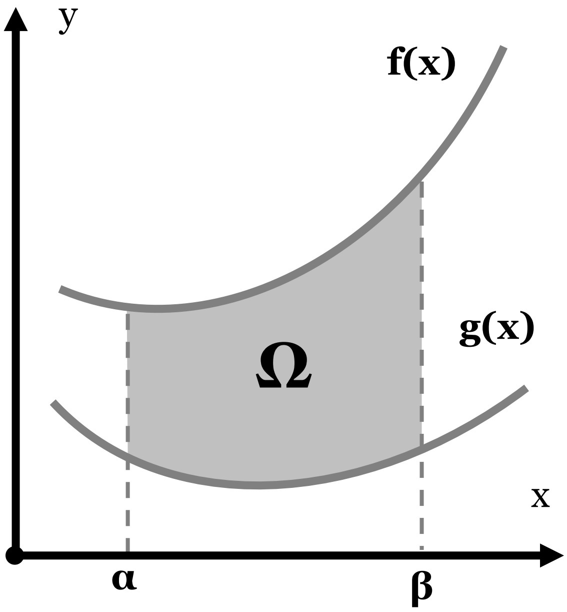


Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f, g και τις κατακόρυφες ευθείες x = α, x = β ;

3

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] τότε:

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx}$$

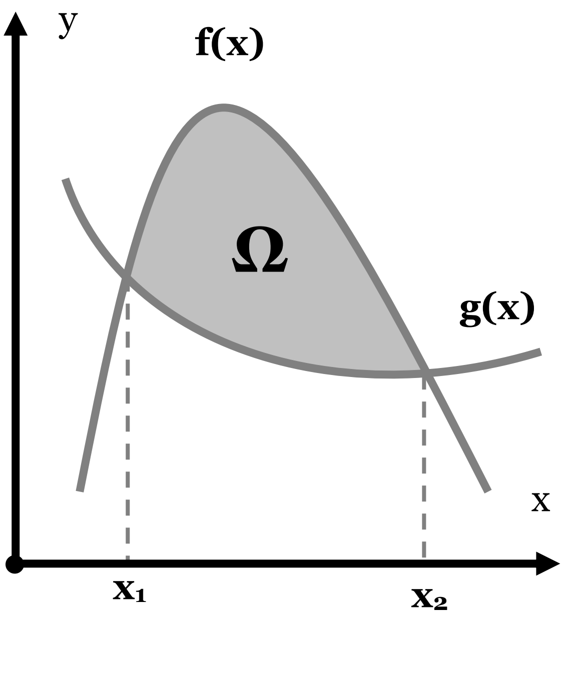


Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν ενός χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f, g ;

4

Αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ οι ρίζες της εξίσωσης **f(x) – g(x) = 0** (δηλαδή, τα σημεία τομής των C_f και C_g) τότε:

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{x1}^{x2} |f(x) - g(x)|\,dx}$$



Λ Υ Μ Ε Ν Ε Σ   Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

● ΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 (x^2 - 2x + 5)dx$.

1ος τρόπος

Όταν η συνάρτησή μας είναι απλά ένα άθροισμα απλούστερων συναρτήσεων (πχ. ένα πολυώνυμο), τότε μπορούμε να "σπάσουμε", με μανία, το ολοκλήρωμα σε κομματάκια και να υπολογίσουμε το καθένα ξεχωριστά.

▶ $\int_1^2 (x^2 - 2x + 5)dx \quad =$

▶ $\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 5\,dx \quad =$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε τόσα τμήματα, όσα και οι όροι της συνάρτησης.

▶ $\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[2\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[5x\right]_1^2 \quad =$

Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες παράγουσες, του κάθε όρου.

▶ $\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[x^2\right]_1^2 + \left[5x\right]_1^2 \quad =$

Απλοποιούμε, αν είναι εύκολο, κάποιες από τις παραστάσεις.

▶ $\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(2^2 - 1^2\right) + \left(5 \cdot 2 - 5 \cdot 1\right) \quad =$

Αντικαθιστούμε το x, διαδοχικά, με τις αντίστοιχες τιμές.

▶ $\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - (4 - 1) + (10 - 5) \quad =$

Ολοκληρώνουμε όλες τις δυνατές πράξεις.

▶ $\frac{7}{3} - 3 + 5 \quad = \quad \frac{7}{3} + 2 \quad = \quad \frac{13}{3}$

Αυτό ήταν !

2ος τρόπος

Αν είμαστε πολύ έξυπνοι ή πολύ τεμπέληδες, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγουσα ολόκληρης της παράστασης, απευθείας, δίχως δηλαδή να "κομματιάσουμε" το ολοκλήρωμα.

$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 5)dx \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^2 \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x\right]_1^2 \quad =$$

$$\frac{2^3}{3} - 2^2 + 5 \cdot 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 5 \cdot 1\right) \quad = \quad \frac{8}{3} - 4 + 10 - \left(\frac{1}{3} - 1 + 5\right) \quad =$$

$$\frac{8}{3}-4+10-\frac{1}{3}+1-5 \quad = \quad \frac{7}{3}+6-4 \quad = \quad \frac{7}{3}+2 \quad = \quad \frac{13}{3}$$

Επειδή και οι δύο μέθοδοι είναι εξίσου ορθές, ο καθένας μπορεί να επιλέγει εκείνη, που είναι περισσότερο της αρεσκείας του. Στη συνέχεια φυσικά, για να μην καλομαθαίνετε, τα ολοκληρώματα θα υπολογίζονται μονάχα με τον έναν τρόπο, από τους δύο.

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 3x\cdot(x^2+4x-1)dx$.

Όταν η συνάρτησή μας είναι γινόμενο, τότε δε μπορούμε να σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε κομμάτια, όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Πριν, όμως, πανικοβληθούμε κι αρχίσουμε να ψάχνουμε για πολύπλοκα και πονηρά τεχνάσματα, εξετάζουμε μήπως μπορούμε να τη γλιτώσουμε με μια απλή επιμεριστική ιδιότητα. Κατόπιν, συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

$$\int_0^2 3x\cdot(x^2+4x-1)dx \quad \overset{\text{επιμεριστική}}{\underset{\text{ιδιότητα}}{=}} \quad \int_0^2(3x^3+12x^2-3x)dx$$

Τώρα συνεχίζουμε, όπως και στο πρώτο παράδειγμα.

$$\left[3\frac{x^4}{4}+12\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \quad = \quad \left[3\frac{x^4}{4}+4x^3-3\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \quad =$$

$$3\frac{2^4}{4}+4\cdot 2^3-3\frac{2^2}{2}-\left(3\frac{0^4}{4}+4\cdot 0^3-3\frac{0^2}{2}\right) \quad = \quad 3\frac{16}{4}+4\cdot 8-3\frac{4}{2}-0 \quad =$$

$$3\cdot 4+32-\frac{12}{2} \quad = \quad 12+32-6 \quad = \quad 38$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^1 (x-3)^2\,dx$.

Συνήθως, οι παρουσία δυνάμεων είναι αιτία κι αφορμή για λιποθυμίες. Συχνά, όμως, πρόκειται για μία απλή ταυτότητα, την οποία και αναπτύσσουμε. Εκτός, βέβαια, κι αν δε θυμόμαστε τις ταυτότητες. Τότε, θα πρέπει απλά ν' ανοίξει η γη και να μας καταπιεί.

$$\int_{-1}^1 (x-3)^2\,dx \quad \overset{\text{ανάπτυγμα}}{\underset{\text{ταυτότητας}}{=}} \quad \int_{-1}^1 (x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2)dx$$

Η συνέχεια είναι πια παιχνιδάκι.

$$\int_{-1}^1 (x^2-6x+9)dx \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+9x\right]_{-1}^1 \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{-1}^1 \quad =$$

$$\frac{1^3}{3}+3\cdot 1^2-9\cdot 1-\left(\frac{(-1)^3}{3}+3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)\right) \quad =$$

$$\frac{1}{3}+3-9-\left(\frac{-1}{3}+3+9\right) \quad = \quad \frac{1}{3}+3-9+\frac{1}{3}-3-9 \quad = \quad \frac{2}{3}-18 \quad = \quad -\frac{52}{3}$$

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 \frac{x^3-3x^2-2x+4}{2x}dx$.

Τα κλάσματα δεν αρέσουν σε κανέναν, εκτός από τους μαθηματικούς, που ετοιμάζουν τις ασκήσεις. Εκτός κι αν το κλάσμα μπορεί να φύγει από τη μέση. Το πρώτο πράγμα, που προσπαθούμε, είναι να χωρίσουμε το κλάσμα σε μικρότερα, ομώνυμα κλάσματα, στα οποία μπορούμε να κάνουμε απλοποίηση.

$$\int_1^2 \frac{x^3-3x^2-2x+4}{2x}dx \quad =$$

$$\int_1^2\left(\frac{x^3}{2x}-\frac{3x^2}{2x}-\frac{2x}{2x}+\frac{4}{2x}\right)dx \quad =$$

Σπάμε το αρχικό κλάσμα σε τέσσερα μικρότερα κι ομώνυμα.

$$\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-1+\frac{2}{x}\right)dx \quad =$$

Απλοποιούμε τις δυνάμεις του x κι αν είναι δυνατόν και τα νούμερα.

$$\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1+2\frac{1}{x}\right)dx \quad =$$

Ξεχωρίζουμε τους αριθμητικούς συντελεστές από τις δυνάμεις του x, ώστε να υπολογίσουμε ευκολότερα τις αντίστοιχες παράγουσες.

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-x+2\ln x\right]_1^2 \quad =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2^2}{2}-2+2\ln 2-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1^2}{2}-1+2\ln 1\right) \quad =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}-2+2\ln 2-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-1+2\cdot 0\right) \quad =$$

Θυμάμαι ότι ln1 = 0.

$$\frac{8}{12}+3-2+2\ln 2-\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-1+0\right) \quad = \quad \frac{8}{12}+1+2\ln 2-\frac{1}{12}-\frac{3}{4}+1 \quad =$$

$$\frac{7}{12}-\overset{3}{\frac{3}{4}}+2+2\ln 2 \quad = \quad \frac{7}{12}-\frac{9}{12}+2+2\ln 2 \quad = \quad -\frac{2}{12}+2+2\ln 2 \quad =$$

$$-\frac{1}{6}+2+2\ln 2$$

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx$.

Το 1/x είναι το μόνο κλάσμα, για το οποίο ξέρουμε αμέσως πως έχει παράγουσα την lnx. Τι κάνουμε, λοιπόν, με τα υπόλοιπα κλάσματα; Κάνουμε ότι θα έκανε κάθε ψύχραιμος υποψήφιος και το οποίο θα έπρεπε να θυμόμαστε, ήδη, από τις παραγώγους. Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα των δυνάμεων:

$\boxed{\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}}$, αλλά και αντίστροφα $\boxed{\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{-\nu}}$

$$\int_1^3\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx =$$

$$\int_1^3\left(\frac{1}{x}+3x^{-2}-2x^{-3}\right)dx =$$

Αντιστρέφουμε τις δυνάμεις, αλλάζοντας το πρόσημο του εκθέτη, σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα.

$$\left[\ln x+3\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^3 =$$

$$\left[\ln x+3\frac{x^{-1}}{-1}-2\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 =$$

$$\left[\ln x-3x^{-1}+x^{-2}\right]_1^3 =$$

"Σουλουπώνουμε" τα πρόσημα και κάνουμε τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$\ln 3-3\cdot 3^{-1}+3^{-2}-(\ln 1-3\cdot 1^{-1}+1^{-2}) =$$

$$\ln 3-3\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-(0-3+1) =$$

Αντιστρέφουμε πάλι τις δυνάμεις με τους αρνητικούς εκθέτες, προκειμένου να τις υπολογίσουμε.

$$\ln 3-1+\frac{1}{9}+2 =$$

$$\ln 3+\frac{1}{9}+1 = \ln 3+\frac{10}{9}$$

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^4\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$.

Οι μόνες ρίζες, για τις οποίες ξέρουμε να υπολογίζουμε την παράγουσα, απευθείας, είναι οι $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ και $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Τώρα; Πανικός και καταστροφή! Ή μήπως όχι; Ή μήπως θα έπρεπε να το θυμόμαστε ΚΑΙ αυτό, από το προηγούμενο κεφάλαιο; Αρκεί να γνωρίζουμε, λοιπόν, τον παρακάτω κανόνα :

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx \quad =$$

$$\int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)dx \quad =$$

Μετατρέπουμε τις ρίζες του x σε δυνάμεις του x, κάνοντας χρήση του παραπάνω κανόνα.

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_1^4 \quad = \quad \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_1^4 \quad =$$

$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_1^4 \quad =$$

Για να γλιτώσουμε από τα σύνθετα κλάσματα, φέρνουμε τους παρονομαστές μπροστά και ταυτόχρονα τους αντιστρέφουμε.

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right]_1^4 \quad =$$

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς, μετατρέπουμε πάλι τις δυνάμεις σε ρίζες, με τον ίδιο κανόνα, αλλά αντίστροφα.

$$\frac{2}{3}\sqrt{4^3} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{4^5} - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{1^5}\right) \quad =$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{64} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{1024} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) \quad =$$

Μπορούμε ακόμη ν' απλοποιήσουμε και τη ρίζα του 1024, ως εξής:

$$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{512 \cdot 2} = \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{3}{5}\, 8 \cdot \sqrt[3]{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) \quad =$$

$$\frac{16}{3} + \frac{24}{5} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \quad = \quad \frac{14}{3} + \frac{24 \cdot \sqrt[3]{2} - 3}{5}$$

Δεν υπάρχει κανένας λόγος να συνεχίσουμε, κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα, καθώς η παράσταση αυτή δεν έχει καμία ελπίδα ν' απλοποιηθεί περισσότερο, με αυτή την άρρητη ρίζα μες στη μέση.

● ΕΜΒΑΔΑ

7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 2$, τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$ και τον άξονα x΄x.

Στην ουσία, η άσκηση ζητά να υπολογίσουμε, απλά, το ολοκλήρωμα:

$$\int_2^3 \left|x^2 - x - 2\right| dx$$

Εκείνο που δεν πρέπει, επ' ουδενί, να ξεχνάμε είναι ότι ένα εμβαδό είναι υποχρεωτικά ΘΕΤΙΚΟΣ αριθμός. Έτσι, στα εμβαδά, βάζουμε ΠΑΝΤΑ απόλυτη τιμή και όχι μόνο αν το θυμηθούμε ή αν έχουμε κατάλληλη διάθεση. Στη συνέχεια, προκειμένου να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, χρειάζεται να βγάλουμε ΠΡΩΤΑ την απόλυτη τιμή. Γι' αυτό, προχωράμε ως εξής:

Βήμα 1ο : Λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = 0$.

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Βήμα 2ο : Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την f(x), όπως ακριβώς κάναμε και με τις παραγώγους, στο προηγούμενο κεφάλαιο.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

Ο πίνακας αυτός, όμως, έχει μια πολύ σημαντική παράληψη. Εκτός από τις λύσεις της εξίσωσης f(x) = 0, χρειάζεται να γράψυμε ΚΑΙ τα όρια του ολοκληρώματος, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 3 , στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Άρα, ο σωστός πίνακας θα είναι κάπως έτσι:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+					

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα, που θέλουμε να ολοκληρώσουμε, η συνάρτησή μας είναι θετική. Άρα μπορούμε να βγάλουμε την απόλυτη τιμή, αφήνοντας την παράσταση ίδια κι απαράλλαχτη.

Βήμα 3ο : Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα...

$$\int_2^3 \left|x^2 - x - 2\right| dx = \int_2^3 (x^2 - x - 2)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 = \ldots \text{ και τα λοιπά } \ldots = \frac{11}{6} \text{ τ.μ.}$$

τετραγωνικές μονάδες

8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και τον άξονα $x'x$.

Ποια είναι η διαφορά με την προηγούμενη άσκηση; Δε μας δίνονται οι ευθείες $x = α$ και $x = β$, έτσι δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, εξαρχής, ποιους αριθμούς πρέπει να βάλουμε στα όρια του ολοκληρώματος.

$$\int_α^β \left|x^2 - 4x + 3\right| dx$$

Στην περίπτωση αυτή, οι λύσεις x_1, x_2 (έστω $x_1 < x_2$) που θα βρούμε από την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$ θα είναι, ταυτόχρονα, και τα όρια που αναζητούμε, δηλαδή:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left|x^2 - 4x + 3\right| dx$$

Βήμα 1ο : $f(x) = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $Δ = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = \ldots = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \ldots \Rightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 3$$

Άρα, τα όρια του ολοκληρώματος θα είναι 3 και 4 .

Βήμα 2ο :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\mathbf{x^2 - 4x + 3}$		+	0	−	0	+	

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα, που θέλουμε να ολοκληρώσουμε, η συνάρτησή μας είναι αρνητική. Άρα βγάζουμε την απόλυτη τιμή, αλλάζοντας ΟΛΑ τα πρόσημα.

Βήμα 3ο : $\int_1^3 \left|x^2 - 4x + 3\right| dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx =$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 = \ldots = \frac{4}{3} \text{ τ. μ.}$$

9. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = -x^2$, καθώς και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

Σα να μην έφταναν όλα μας τα προβλήματα, τώρα έχουμε ν' αντιμετωπίσουμε δύο συναρτήσεις, αντί για μία. Αλλά κι εδώ, υπάρχει λύση. Σχηματίζουμε τη διαφορά των δύο συναρτήσεων (δηλαδή, τις αφαιρούμε, για όσους κοιτάνε τη λέξη "διαφορά" με μάτια γουρλωμένα) και, μάλιστα, με όποια σειρά θέλουμε. Όταν μια διαφορά βρίσκεται μέσα σε απόλυτη τιμή, τότε το αποτέλεσμα δε μεταβάλλεται, αν αλλάξουμε τις θέσεις μειωτέου κι αφαιρετέου.

Τελικά, το ολοκλήρωμα που έχουμε να υπολογίσουμε έχει ως εξής:

$$\int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} \left|x^3-2x-(-x^2)\right| dx = \int_{-1}^{1} \left|x^3-2x+x^2\right| dx$$

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$.

$x^3 - 2x + x^2 = 0 \iff$

Βγάζουμε το x κοινό παράγοντα.

$x \cdot (x^2 - 2 + x) = 0 \iff$

$x = 0$ ή $x^2 + x - 2 = 0 \iff$

$x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = 1$

Υπολογίζουμε Διακρίνουσα και τα σχετικά, για τη δεύτερη εξίσωση.

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων. Σε αυτόν, δεν ξεχνάμε να τοποθετήσουμε, εκτός από τις παραπάνω λύσεις ΚΑΙ τα όρια του ολοκληρώματος.

Όμως, η εξίσωση "$x^3 + x^2 - 2x$" είναι 3ου βαθμού και πιθανότατα να δυσκολευτούμε στην εύρεση των σωστών προσήμων. Αντί λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε αυτή, χρησιμοποιούμε τη "$x \cdot (x^2 + x - 2)$". Έτσι βρίσκουμε ξεχωριστά τα πρόσημα των "x" και "$x^2 + x - 2$". Στη συνέχεια, υπολογίζουμε εύκολα τα πρόσημα του γινομένου.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
x		−		−		−	0	+		+	
$x^2 + x - 2$		+	0	−		−		−	0	+	
$x \cdot (x^2 + x - 2)$		−	0	+	0	+	0	−	0	+	

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα, που θέλουμε να υπολογίσουμε, απλώνεται σε 2 διαστήματα, στα οποία μάλιστα η συνάρτηση αλλάζει και πρόσημο. Στην περίπτωση αυτή, σπάμε το ολοκλήρωμα σε δύο κομμάτια και υπολογίζουμε το καθένα ξεχωριστά. Έτσι, αντί να έχουμε ένα μεγάλο ολοκλήρωμα από −1 έως 1 , θα έχουμε ένα ολοκλήρωμα από −1 μέχρι 0 κι ένα από 0 μέχρι 1 .

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx \quad = \quad \int_{-1}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx$$

Δεν ξεχνάμε να συμβουλευτούμε τον πίνακα. Στο πρώτο ολοκλήρωμα, θα βγάλουμε την απόλυτη τιμή χωρίς ν' αλλάξουμε τα πρόσημα, γιατί ο πίνακας μας λέει ότι η παράσταση είναι θετική, σ' αυτό το διάστημα. Αντιθέτως, στο δεύτερο διάστημα, η παράσταση είναι αρνητική. Συνεπώς, στο δεύτερο ολοκλήρωμα, αλλάζουμε όλα τα πρόσημα.

$$\int_{-1}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx \quad =$$

$$\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^3-x^2+2x\right)dx \quad =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \quad = \quad \ldots \quad = \frac{3}{2}\ \text{τ.μ.}$$

10. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = x$.

Έχουμε και πάλι δύο συναρτήσεις, αλλά λείπουν για άλλη μια φορά τα όρια του ολοκληρώματος. Όπως και στο παράδειγμα 8, θα χρησιμοποιήσουμε ως όρια τις ρίζες x_1 , x_2 της εξίσωσης $f(x) - g(x)$, που ούτως ή άλλως πρέπει να λύσουμε.

Έχουμε, λοιπόν, να λύσουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx \quad = \quad \int_{x_1}^{x_2}\left|x^3-3x-x\right|dx \quad = \quad \int_{x_1}^{x_2}\left|x^3-4x\right|dx$$

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$.

$x^3 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow$

Βγάζουμε το x κοινό παράγοντα.

$x\cdot(x^2 - 4) = 0 \;\Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow$

Στη δεύτερη εξίσωση, είναι αμαρτία να υπολογίζουμε Διακρίνουσα. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και συνεχίζουμε με τετραγωνική ρίζα. ΔΕΝ ξεχνάμε ότι υπάρχουν 2 λύσεις: + και − .

$x = 0$ ή $x^2 = 4 \;\Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{4} \;\Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων (παιχνιδάκι πια). Αλλά προσέχω, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, να πάρω ξεχωριστά τις παραστάσεις "x" και "$x^2 - 4$", εφόσον η "$x^3 - 4x$" είναι 3ου βαθμού και μπορεί τα πρόσημα να γίνουν κουλουβάχατα.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^3-4x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Είναι φανερό, από τον πίνακα, ότι τα όρια του ολοκληρώματος είναι οι αριθμοί −2 και 2. Για άλλη μια φορά, όμως, το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε απλώνεται σε 2 διαφορετικά διαστήματα, στα οποία η παράσταση αλλάζει πρόσημο. Όμως, έχουμε μάθει πια το μάθημά μας: σπάμε το ολοκλήρωμα στα δύο και υπολογίζουμε το καθένα ξεχωριστά.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left|x^3-4x\right| dx = \int_{-2}^{2} \left|x^3-4x\right| dx = \int_{-2}^{0} \left|x^3-4x\right| dx + \int_{0}^{2} \left|x^3-4x\right| dx$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα, η απόλυτη τιμή βγαίνει χωρίς καμία αλλαγή, ενώ στο δεύτερο, τα πρόσημα αλλάζουν.

$$\int_{-2}^{0} \left|x^3-4x\right| dx + \int_{0}^{2} \left|x^3-4x\right| dx =$$

$$\int_{-2}^{0} \left(x^3-4x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(-x^3+4x\right) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4}+4\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \ldots = 8 \text{ τ.μ.}$$