ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

Μαθηματικά Ι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΠΑ.Λ.

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Κεφάλαιο 5

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

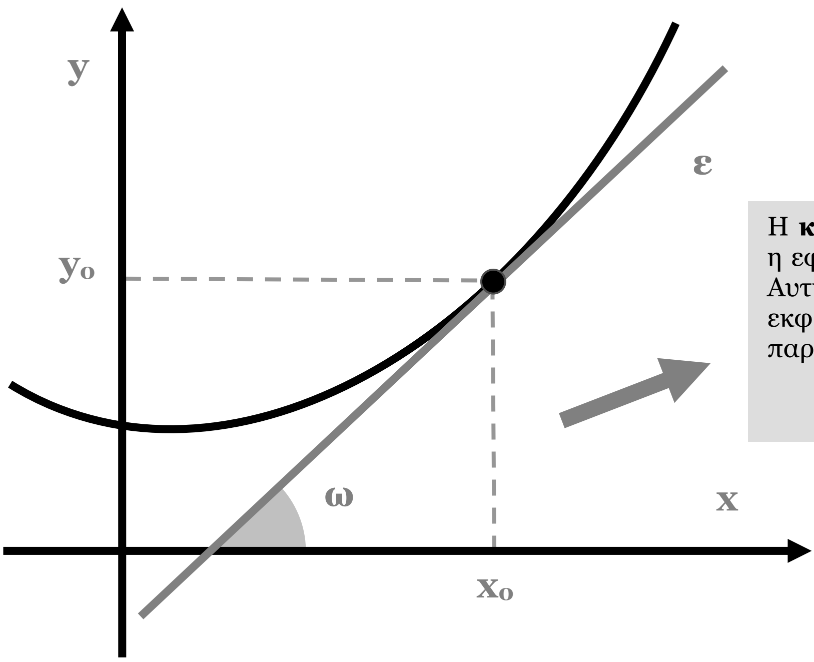
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Καταρχήν, όταν ορίζουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης δεν την ορίζουμε έτσι γενικά, αλλά σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Όπως και στα όρια ας συμβολίσουμε το σημείο αυτό x_o . Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι με τους οποίους αντιλαμβανόμαστε την έννοια της παραγώγου:

Α. ως **ρυθμός μεταβολής** ενός μεγέθους και

Β. ως **κλίση της εφαπτόμενης** ευθείας, σε κάποιο σημείο μιας γραφικής παράστασης.

Έτσι, κάθε φορά που θα βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, θα μπορούμε να θυμόμαστε κάτι σαν το παρακάτω σχήμα κι έτσι να καταλαβαίνουμε ότι αυτό που βρίσκουμε δεν είναι κάτι αόριστο και άσχετο με τα προηγούμενα, αλλά κάτι πολύ απλό και συγκεκριμένο.



Η **κλίση** της ευθείας **ε** είναι η εφαπτομένη της γωνίας **ω**. Αυτή ακριβώς η εφαπτομένη εκφράζεται από την παράγωγο της f, δηλαδή:

$$f'(x) = \text{εφ}\omega$$

Στην πράξη, βέβαια, όταν μας ζητείται να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης γενικά ή σε κάποιο x_o , το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι απλοί υπολογισμοί με βάση κάποιους γενικούς κανονες, που θα μάθουμε. Κι αν ο παρακάτω ορισμός μας φαίνεται δυσνόητος ή άσχετος με όσα ακολουθήσουν, να θυμόμαστε ότι μας χρειάζεται μόνο για τις ερωτήσεις θεωρίας και σε καμία περίπτωση για τις ασκήσεις μας.

● Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ι Σ Ι Μ Η / Ορισμός 1

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της και πώς αυτή συμβολίζεται ;

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό **$f'(x_o)$** και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_o .

● Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ι Σ Ι Μ Η / Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{h\to o^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to o^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός. Δηλαδή, αν συμβαίνει:

$$\lim_{h\to o^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \lim_{h\to o^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

● ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πώς (ή πότε) ορίζεται η παράγωγος μιας συνάρτησης f: (α, β) $\to \mathbb{R}$;

Για μία συνάρτηση f: (α, β) $\to \mathbb{R}$ ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση f ΄: (α, β) $\to \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του (α, β).

● ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ συνέχειας και παραγωγισιμότητας μια συνάρτησης σε ένα x_0 ;

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

1. Αν μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής** σε κάποιο x_0 , τότε **δεν** είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 αυτό.

2. Αν μια συνάρτηση **είναι συνεχής** σε κάποιο x_0 , αυτό **δε** σημαίνει υποχρεωτικά ότι είναι και παραγωγίσιμη.

2. Αν μια συνάρτηση **δεν είναι παραγωγίσιμη** σε κάποιο x_0 , αυτό **δεν** αποκλείει να είναι συνεχής σε αυτό το x_0 .

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε καλά τις παραπάνω προτάσεις, για να καλύψουμε ερωτήσεις τύπου Σωστό-Λάθος, όπου προσπαθούν να μας παγιδέψουν. Η παραγωγισιμότητα είναι ένα σκαλοπάτι πιο πάνω από τη συνέχεια. Για να τη φτάσουμε έχουμε πατήσει ήδη στο προηγούμενο σκαλοπάτι, δηλαδή αυτό της συνέχειας. Αν όμως στεκόμαστε στο σκαλοπάτι της συνέχειας, αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι θα καταφέρουμε ν' ανεβούμε ακόμα ψηλότερα.

● ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην πράξη τώρα, οι συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι πολύ συγκεκριμένες και βασικές. Έτσι καλό είναι να γνωρίζουμε κατευθείαν την παράγωγό τους, παρά να εφαρμόζουμε συνεχώς τη διαδικασία του ορισμού.

Συνάρτηση f(x)	**Παράγωγος f ΄(x)**	**Παραδείγματα**
c (σταθερά)	**0**	$(15)' = 0$
x	**1**	$(x)' = 1$
$\mathbf{x^{\alpha}}$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, x > 0$	$\mathbf{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}$	$(2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$
$\mathbf{\sqrt{x}}$ $x > 0$	$\mathbf{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
ημx	**συνx**	(ημx)΄ = συνx
συνx	**– ημx**	(συνx)΄ = –ημx
εφx	$\mathbf{\dfrac{1}{συν^2 x}}$	$(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2 x}$
$\mathbf{e^{x}}$	$\mathbf{e^{x}}$	$(e^x)' = e^x$
lnx $x > 0$	$\mathbf{\dfrac{1}{x}}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

● ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Στις ασκήσεις, συνήθως, δεν αντιμετωπίζουμε κάθε απλή και βασική συνάρτηση, ξεχωριστά και μόνη της, αλλά σε διάφορους συνδυασμούς μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή, οι παρακάτω κανόνες μας βοηθούν να ξεπεράσουμε τις όποιες αμηχανίες.

1. $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$
3. $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x)$
4. $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Παρατηρούμε ότι ενώ, στην περίπτωση ενός απλού αθροίσματος ή μιας διαφοράς, βρίσκουμε την παράγωγο του κάθε όρου ξεχωριστά, ωστόσο στην περίπτωση γινομένου ή πηλίκου οι κανόνες είναι πιο πολύπλοκοι και χρειάζεται να τους απομνημονεύσουμε σωστά.

● ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όταν μιλάμε για σύνθεση συναρτήσεων, με απλά λόγια, μιλάμε για μία συνάρτηση «μέσα» σε μία άλλη. Αυτό που συμβαίνει, στην πράξη, είναι ότι εκεί που σε μια από τις βασικές συναρτήσεις που γνωρίσαμε βλέπαμε απλά το $\mathbf{x}$, τώρα θα βλέπουμε μια πιο περίπλοκη έκφραση, δηλαδή μια άλλη συνάρτηση $\mathbf{f(x)}$. Τη «νέα» αυτή έκφραση, τη συμβολίζουμε ως $\mathbf{g(f(x))}$ ή $\mathbf{(g\circ f)(x)}$.

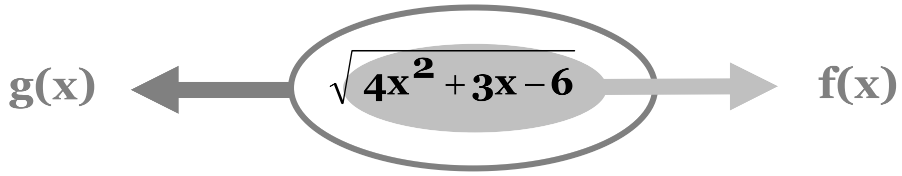
Για παράδειγμα, αντί για lnx θα βλέπουμε $\ln(x^2 - 3x + 2)$, αντί για ημx θα βλέπουμε ημ(lnx) ή αντί για x^2 θα βλέπουμε (συνx) ^{2}.

Στην περίπτωση αυτή, εφαρμόζουμε τον παρακάτω κανόνα:

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση g(x) = $\sqrt{4x^2+3x-6}$. Παρατηρούμε ότι η g(x) έχει προκύψει από την ένωση της βασικής συνάρτησης $\sqrt{x}$ και του πολυωνύμου $4x^2 + 3x - 6$. Άρα, πρόκειται για σύνθετη συνάρτηση.



Εφαρμόζουμε τον κανόνα:

$$g'(x) = (\sqrt{4x^2+3x-6})' \cdot (4x^2 + 3x - 6)' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+3x-6}} \cdot (8x + 3)$$

● ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Μετά απ' όσα αναφέραμε, μπορεί κανείς να φανταστεί ότι θα ήταν δυνατόν να συνεχίσουμε και να βρούμε την «παράγωγο της παραγώγου». μιας συνάρτησης f. Τότε λέμε πως έχουμε βρει τη **δεύτερη παράγωγο** της συνάρτησης f και τη συμβολίζουμε με **f΄΄(x)**.

Αναλόγως, στο βαθμό που μπορούμε να συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία, μπορούμε να βρούμε και την τρίτη, την τέταρτη κλπ. παράγωγο μιας συνάρτησης. Στην περίπτωση αυτή, εγκαταλείπουμε του τόνους και συμβολίζουμε τις αντίστοιχες παραγώγους ως εξής: $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, κ.ο.κ.

● ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ή ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν τώρα σκεφτούμε αντιστρόφως, δηλαδή «ποια συνάρτηση θα έπρεπε να έχω, ώστε αν την παραγώγιζα να έβρισκα τη συνάρτηση f» τότε λέμε ότι ψάχνουμε την **παράγουσα** της f.

Για παράδειγμα, όταν γράφουμε: **$(x^2)' = 2x$** τότε το 2x είναι η **παράγωγος** της x^2, ενώ η x^2 λέμε ότι είναι **παράγουσα** της 2x .

Η παράγουσα μιας συνάρτησης συμβολίζεται, συνήθως, με το ίδιο γράμμα, αλλά σε κεφαλαία γραφή. Δηλαδή, η παράγουσα της f(x) συμβολίζεται ως F(x) , της g(x) ως G(x) , κ.ο.κ.

Ποια συνάρτηση λέγεται παράγουσα μιας συνάρτησης f , σε ένα διάστημα Δ ;

Έστω συνάρτηση f: $\Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάσημα του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση F: $\Delta \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

τότε η F λέγεται παράγουσα συνάρτηση της f στο διάστημα Δ.

Στην πραγματικότητα, αν υπάρχει έστω και μία παράγουσα μιας συνάρτησης, τότε υπάρχουν άπειρες. Αυτό συμβαίνει γιατί οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής F(x) + c (όπου c κάποιος πραγματικός αριθμός), αν την παραγωγίσουμε θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα, αφού $(c)' = 0$.

Παράδειγμα

Η $3x^2$ είναι μια παράγουσα της 6x, γιατί $(3x^2)' = 6x$. Αλλά και $(3x^2 + 5)' = 6x + 0 = 6x$, άρα και η $3x^2 + 5$ είναι μια παράγουσα της 6x .Αλλά με την ίδια λογική και οι $3x^2 - 11$, $3x^2 + \frac{1}{2}$, $3x^2 - \sqrt{5}$, κ.τ.λ. είναι όλες παράγουσες της 6x , κ.ο.κ.

Αν F είναι μία παράγουσα της f: $\Delta \to \mathbb{R}$, με Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε:

- κάθε συνάρτηση της μορφής F + c ($c \in \mathbb{R}$) είναι, επίσης, παράγουσα της f και, αντιστρόφως,
- κάθε παράγουσα της f θα είναι της μορφής F + c ($c \in \mathbb{R}$).

Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να φτιάξουμε πάλι έναν περιεκτικό πίνακα με τις παράγουσες, αυτή τη φορά, των βασικών συναρτήσεων…

Συνάρτηση f(x)	Παράγουσα F(x)
0	c
1	$x + c$
x^{α} $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\ x > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}\quad (x > 0)$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\quad (x > 0)$	$\sqrt{x} + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\quad (x > 0)$	$2\sqrt{x} + c$
συνx	ημx + c
ημx	− συνx + c
$\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}\quad \left(x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$	εφx + c

● ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Με απλοϊκά λόγια, μιλώντας για μονοτονία μιας συνάρτησης αυτό που εννοούμε είναι αν, «διαβάζοντας» τη γραφική παράσταση από αριστερά προς τα δεξιά, τη βλέπουμε να «ανηφορίζει» ή να «κατηφορίζει». Στην πρώτη περίπτωση, λέμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα** ενώ, στη δεύτερη περίπτωση, την ονομάζουμε **γνησίως φθίνουσα**.

Για συντομία, συμβολίζουμε τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση ↗, ενώ τη γνησίως φθίνουσα ↘ .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

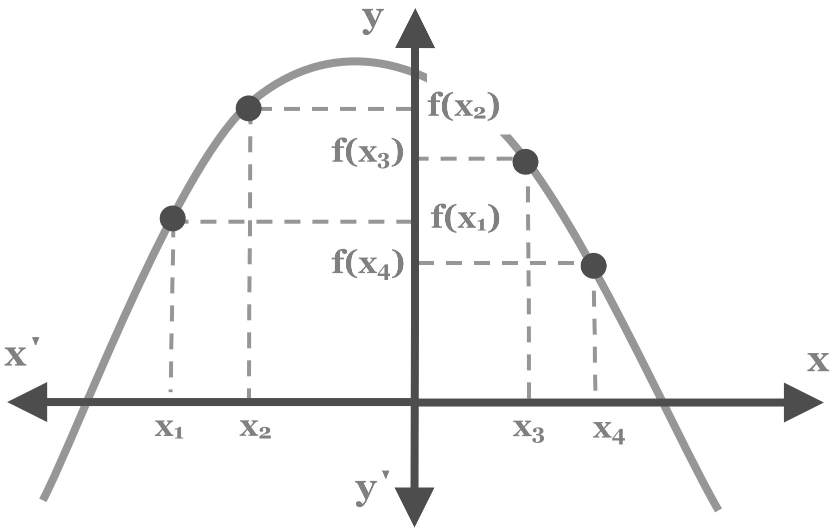
Μια συνάρτηση θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα **(α, β)**, αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ισχύει πως:

αν $\mathbf{x_1 < x_2}$ τότε και $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια συνάρτηση θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα **(α, β)**, αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ισχύει πως:

αν $\mathbf{x_1 < x_2}$ τότε και $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$



Στην πράξη, όμως, αν προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης, στηριζόμενοι στους προηγούμενους ορισμούς, θα τα βρούμε το λιγότερο μπαστούνια. Για το λόγο αυτό, είναι ευκολότερο να βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης και να χρησιμοποιούμε τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τότε:

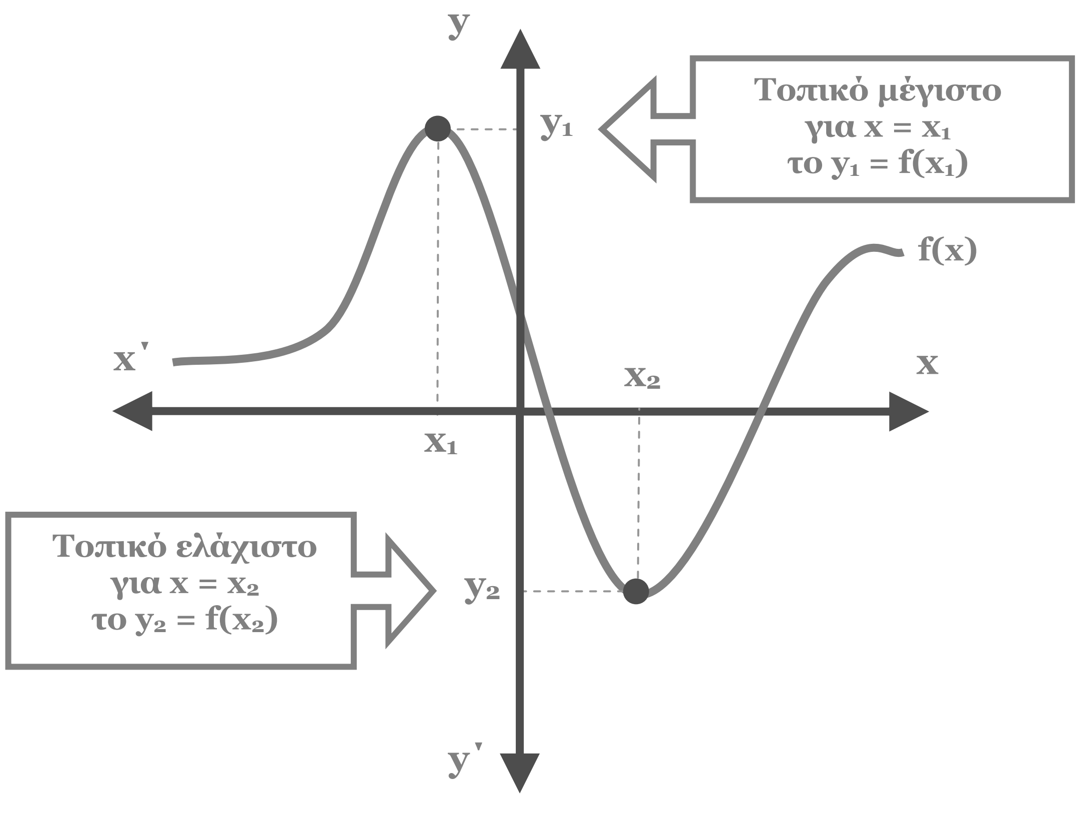
α. Αν $\mathbf{f'(x) > 0}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο (α, β).

β. Αν $\mathbf{f'(x) < 0}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο (α, β).

γ. Αν $\mathbf{f'(x) = 0}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι **σταθερή** στο (α, β).

● ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όταν αναφερόμαστε στα ακρότατα μιας συνάρτησης, απλοϊκά μιλώντας, αναζητούμε αν στην γραφική παράστασή της υπάρχει κάποιο σημείο που βρίσκεται **ψηλότερα** ή **χαμηλότερα** από όλα τα υπόλοιπα σημεία. Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για **μέγιστο** της συνάρτησης, ενώ στη δεύτερη για **ελάχιστο**. Στην πραγματικότητα, το μέγιστο και το ελάχιστο δεν είναι το σημείο, αυτό καθαυτό, αλλά η τεταγμένη του – δηλαδή η τιμή της συνάρτησης $\mathbf{y_o = f(x_o)}$ που αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο.



Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ 1

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x = x_o$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_o, τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{f(x) \leq f(x_o)}$$

για κάθε $x \in (α, β)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x = x_0$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$$

για κάθε $x \in (α, β)$.

Πώς αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα;

Τα τοπικά ακρότατα τα αναζητούμε σε συγκεκριμένες θέσεις:

1. Στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f.

2. Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f, όπου η παράγωγός της δεν υπάρχει. Τα σημεία αυτά καλούνται **γωνιακά**.

3. Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f, όπου η παράγωγός της υπάρχει και είναι ίση με μηδέν, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $\mathbf{f'(x) = 0}$. Τα σημεία αυτά καλούνται **στάσιμα**.

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 1ης ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω συνεχής συνάρτηση f: (α, β) → ℝ και x_0 κρίσιμο σημείο της.

α. Αν **f΄(x) > 0 στο (α, x_0)** και **f΄(x) < 0 στο (x_0, β)**, τότε το f(x_0) είναι **τοπικό μέγιστο** της f.

β. Αν **f΄(x) < 0 στο (α, x_0)** και **f΄(x) > 0 στο (x_0, β)**, τότε το f(x_0) είναι **τοπικό ελάχιστο** της f.

γ. Αν η f΄(x) διατηρεί το ίδιο πρόσημο στα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β), τότε το f(x_0) δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε ελάχιστο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 2ης ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω συνεχής συνάρτηση f: A → ℝ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

α. αν **f΄΄(x_0) < 0** η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0.

β. αν **f΄΄(x_0) > 0** η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0.