

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Μαθηματικά Ι

ΘΕΜΑΤΑ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

2000 - 2013

ΕΠΑ.Λ.

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Θέμα εξετάσεων 2000

Θ2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

β. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f .

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda x^3 - x$, όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ .

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Θέμα εξετάσεων 2001

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

δ. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Θέμα εξετάσεων 2002

- Θ2.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2$
- α.** Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .
 - β.** Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$.
 - γ.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
- Θ2.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda x^3 - x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.
- α.** Να βρείτε την τιμή του λ .
 - β.** Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Θέμα εξετάσεων 2003

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$.
- α.** Να βρείτε το $f(1)$.
 - β.** Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.
 - γ.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.
- Θ4.** Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται απο την συνάρτηση $f(t) = -3t^2 + 30t$, με $0 \leq t \leq 10$.
- α.** Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$;
 - β.** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .
 - γ.** Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
 - δ.** Να βρείτε την χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Θέμα εξετάσεων 2004

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.
- α.** Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .
 - β.** Αν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 5$ να βρείτε τα a και β .
 - γ.** Για τις τιμές των a και β που βρήκατε στο ερώτημα (β) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
- Θ4.** Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου παραλληλόγραμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:
- α.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 200x$.
 - β.** Για ποιά τιμή του x το εμβαδό του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
 - γ.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Θέμα εξετάσεων 2005

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο: $f'(x) = x^2 - 2x$.
- α.** Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.
 - β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
 - γ.** Να βρείτε την $f''(x)$.
 - δ.** Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;
 - ε.** Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- Θ4.** Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.
- α.** Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);
 - β.** Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.
 - γ.** Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.
 - δ.** Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

Θέμα εξετάσεων 2005

[Εσπερινά]

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + ax + 5$, όπου a πραγματικός αριθμός.
- α.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .
 - β.** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο, να αποδείξετε ότι $a = 2$.
 - γ.** Για $a = 2$, να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Θ4.** Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση $E(x) = 3x^2 + 20x$.
- α.** Να βρεθεί το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.
 - β.** Να βρεθεί ο τύπος $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.
 - γ.** Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.
 - δ.** Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος;

Θέμα εξετάσεων 2006

Θ2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4x^3 - 12x + 2006$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρεθεί η παράγουσα της f .
- β.** Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ.** Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Θ4. Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50 cm.

- α.** Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x), \quad 0 < x < 50$$

- β.** Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο;
- γ.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Θέμα εξετάσεων 2006

[Εσπερινά]

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 6$.

- α.** Αν $f(0) = 5$, να υπολογίσετε τον τύπο της αρχικής (παράγουσας) συνάρτησης f .
- β.** Να εξετάσετε τη συνάρτηση f , που βρήκατε στο α ερώτημα:
 - i.** ως προς τη μονοτονία.
 - ii.** ως προς τα ακρότατα.
- γ.** Να υπολογίσετε τα $f''(2)$ και $f''(-3)$.

Θ4. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45 m, τη χρονική στιγμή $t = 0$ sec. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από t sec πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση: $S(t) = 5t^2$ (μέτρα m).

- α.** Να υπολογίσετε το διάστημα, που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο $t = 2$ sec.
- β.** Να αποδείξετε ότι ο χρόνος, που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος, είναι $t = 3$ sec.
- γ.** Να υπολογίσετε:
 - i.** τον τύπο της ταχύτητας $v(t)$ του σώματος, κάθε χρονική στιγμή t .
 - ii.** την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.

Θέμα εξετάσεων 2007

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,
- α.** Να δείξετε ότι $\kappa = -2$ και $\lambda = 1$.
 - β.** Να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .
 - γ.** Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) + f'(x) + f''(x) > 0$.
- Θ4.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 10 \cdot \ln x - 5x^2$, $x > 0$.
- α.** Να βρείτε την παράγωγο f' της f .
 - β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - γ.** Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο; Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.
 - δ.** Να δείξετε ότι $f(x) \leq -5$, για κάθε $x > 0$.

Θέμα εξετάσεων 2007

[Εσπερινά]

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 - β.** Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .
 - γ.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.
 - δ.** Να δείξετε ότι: $f(0) \cdot f'(3) - f'(2) = 0$.
- Θ4.** Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου, ακμής 2 m, προσθέτουμε πετρέλαιο. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min), είναι $h(t) = \frac{t^2}{18}$,
- α.** να βρείτε το ύψος της στάθμης σε χρόνο $t = 3$ min.
 - β.** να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου της δεξαμενής, μετά από χρόνο t min, δίνεται από τον τύπο $V(t) = \frac{2t^2}{9} \text{ m}^3$.
 - γ.** να βρείτε το ρυθμός μεταβολής του όγκου του πετρελαίου, τη χρονική στιγμή $t = 5$ min.
 - δ.** να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

Θέμα εξετάσεων 2008

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\lambda x}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.
- α.** Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$.
 - β.** Να προσδιορισθούν οι τιμές του λ , ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει: $f''(x) - f'(x) - 2 \cdot f(x) = 0$.
 - γ.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία όταν:
 - i.** $\lambda = 2$
 - ii.** $\lambda = -1$
- Θ4.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
- α.** Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f .
 - β.** Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - γ.** Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

Θέμα εξετάσεων 2008

[Εσπερινά]

- Θ2.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \cdot e^x$.
- α.** Να βρείτε:
 - i.** την πρώτη παράγωγο της f .
 - ii.** τη δεύτερη παράγωγο της f .
 - β.** Να δείξετε ότι ισχύει: $f''(x) - f'(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - γ.** Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f''(x) + f'(x)}{x - 1}$.
- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x} - 1} & , 0 < x < 1 \\ -\alpha^2 + 5\alpha & , x = 1 \\ 2e^{x-1} + 2 & , x > 1 \end{cases}$, όπου α πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 2$
- Θ4.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + \alpha + 2008$, όπου α πραγματικός αριθμός.
- α.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .
 - β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - γ.** Να δείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε συναρτήσει του α .
 - δ.** Να υπολογίσετε το α , αν το τοπικό ελάχιστο είναι ίσο με 2009.

Θέμα εξετάσεων 2009

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$.

α. Να υπολογίσετε την $f'(x)$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 4x + 2ae^x$, όπου:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

α. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β. Για $\alpha = 1$

i. Να υπολογίσετε την $f'(x)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Θέμα εξετάσεων 2009

[Εσπερινά]

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f .

γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , για την οποία ισχύει:

$$(\alpha - 1) \cdot f'(0) + 4 \cdot f''(1) = 27$$

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - x - 1$, όπου:

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία.

δ. Να αποδείξετε ότι: $\ln 2008 - 2009 > \ln 2009 - 2010$.

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

γ. Για αποδείξετε ότι για $x = 3$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με $\frac{1}{e^3}$.

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η

γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

β. Για $\kappa = 2$ και $\lambda = 3$,

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

Θέμα εξετάσεων 2010

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, τότε:

- α.** Να βρείτε τιμές των πραγματικών αριθμών a και β .
- β.** Για $a = 6$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ.** Για $a = 6$ και $\beta = 1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Θέμα εξετάσεων 2010

[Εσπερινά]

Δίνεται η συνάρτηση f με τυπο: $f(x) = ax^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Αν $f'(2) = -2$, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a .
- β.** Για $a = -1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα εξετάσεων 2010**[T.E.E.]**

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.
- α.** Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f .
 - β.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
 - γ.** Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα; Να προσδιορίσετε το είδος τους και να υπολογίσετε τις τιμές τους.
- Θ4.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = x^2 - 3x + \lambda$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α.** Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακροτάτο στο $x_0 = 1$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ .
Για $\lambda = 2$
 - β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και το είδος των ακροτάτων.
 - γ.** Να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές της συνάρτησης για $x_1 = \frac{6}{5}$ και $x_2 = \frac{3}{2}$, καθώς επίσης και οι τιμές της συνάρτησης για $x_3 = 4$ και $x_4 = 6$.

Θέμα εξετάσεων 2010**[Εσπερινά T.E.E.]**

- Θ3.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 3x - 8 & , x \leq 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} & , x > 4 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$, ισούται με 3.

- Θ4.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τυπο: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \alpha + \frac{1}{3}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α.** Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f .
 - β.** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x)}{x + 1}$.
 - γ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
 - δ.** Εάν το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να βρείτε τον αριθμό α .

Θέμα εξετάσεων 2011

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, στο πεδίο ορισμού της.
- β. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Θέμα εξετάσεων 2011

[Εσπερινά]

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, όπου $x > 1$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.
Κατόπιν, να συγκρίνετε τις τιμές $f(2010)$ και $f(2011)$.

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τυπο:

$$f(x) = x^2 + ax + 5, \text{ όπου } a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

- α. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .
- β. Αν $a = -4$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Αν $a = -4$, να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα εξετάσεων 2012

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

- α.** Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0) = 1$.
- β.** Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F .
- γ.** Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα εξετάσεων 2012

[Εσπερινά]

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\kappa} & , x < 1 \\ \kappa & , \text{όπου } \kappa \text{ πραγματικός} \\ x^2 + \kappa & , x \geq 1 \end{cases}$

αριθμός, διάφορος του 0.

- α.** Αν $\kappa = 1$, να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$, όταν $x > 1$.
 - β.** Αν $\kappa = 1$, να υπολογίσετε την παράσταση: $A = f(50) - f'(245) + 1$.
- Θ4.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 + \lambda x - 6$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α.** Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 3$, να δείξετε ότι $\lambda = -1$.
 - β.** Αν $\lambda = -1$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος των ακροτάτων.
 - γ.** Αν $\lambda = -1$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

Θέμα εξετάσεων 2013

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = (x - 2) \cdot (3x + 2\alpha - 2), x \in \mathbb{R}$$

β. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.

γ. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Θέμα εξετάσεων 2013

[Εσπερινά]

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 3x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί το κ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 5)$.

β. Αν $\kappa = 3$, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

γ. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1 - x}$.