ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

Μαθηματικά Ι

ΟΡΙΟ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΠΑ.Λ.

Ε π ι μ έ λ ε ι α

Κ Ο Λ Λ Α Σ   Α Ν Τ Ω Ν Η Σ

Συναρτήσεις

Όταν αναφερόμαστε σε μια **συνάρτηση**, ουσιαστικά αναφερόμαστε σε μια **σχέση** ή **εξάρτηση**. Στα μαθηματικά που θα μας απασχολήσουν, με απλά λόγια, η σχέση αυτή εκφράζεται με μια ισότητα, πράξεις και δύο μεταβλητές x και y.

Σχηματικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε :

- Το εξαγόμενο της συνάρτησης, λέγεται **τιμή** της συνάρτησης στο x και είναι μοναδικό. Συμβολίζεται με y ή με f(x), συνεπώς: **y = f(x)** .

- **Πεδίο ορισμού** της συνάρτησης είναι το σύνολο των τιμών του x, για τις οποίες ορίζεται (έχει νόημα) η συνάρτηση. Για μια συνάρτηση f, συνήθως, συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού με **A** ή $\mathbf{A_f}$ ή $\mathbf{D_f}$.

- **Σύνολο τιμών** της συνάρτησης είναι το σύνολο των τιμών της συνάρτησης, δηλαδή του y. Συμβολίζεται, συνήθως, ως **f(A)**.

Πώς λειτουργεί;

Αυτό που συμβαίνει είναι πως για κάθε τιμή που θέτουμε στο x, αφού εκτελέσουμε τις πράξεις, η συνάρτηση μας δίνει μία και μόνο τιμή για το y, έτσι δημιουργούνται **διατεταγμένα ζεύγη** τιμών της μορφής: **(x, y)** ή **(x, f(x)**. Διατεταγμένο σημαίνει με συγκεκριμένη σειρά, γιατί έχουμε συμφωνήσει να γράφουμε πάντα πρώτο το x .

Τα ζεύγη αυτά μπορούμε να τα ταξινομήσουμε σε έναν κατανοητό πίνακα, ο οποίος ονομάζεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης.

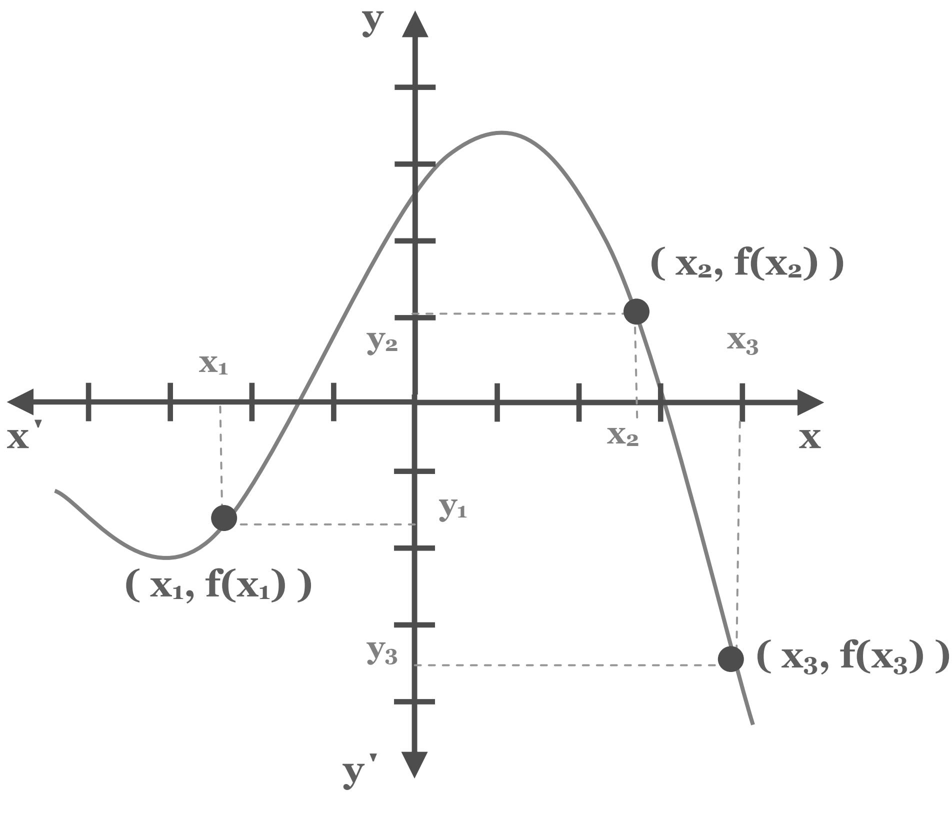
x	x_1	x_2	x_3	…
f(x)	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	…

Τελικά, δοθέντος ενός **ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων**, τα ζεύγη αυτά μπορούν να αναπαραστήσουν **συντεταγμένες** σημείων, πάνω στο επίπεδο. Δηλαδή:

(x, f(x))

τετμημένη **τεταγμένη**

Το σύνολο των σημείων, που αναπαριστούν όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που παράγονται από μια συνάρτηση, σχηματίζουν τη **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.



Όριο Συνάρτησης

Ας χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα μια απλή συνάρτηση πχ. την **f(x) = 2x – 5**.

Αν θέσουμε στο **x** αριθμούς μικρότερους από το 3 αλλά ολοένα και πιο κοντά σε αυτό τότε παρατηρούμε ότι το **y** πλησιάζει με τη σειρά του τον αριθμό 1.

x		y
2.9	→	0,8
2.99	→	0,98
2,999	→	0,998
2,9999	→	0,9998
2,99999	→	0,99998
2,999999	→	0,999998
→ **3**		→ **1**

Αν κάνουμε το ίδιο με αριθμούς μεγαλύτερους από το 3, επίσης, όμως ολοένα και πιο κοντά σε αυτό τότε παρατηρούμε ότι το y πλησιάζει ξανά τον αριθμό 1.

x		y
3,1	→	1,2
3,01	→	1,02
3,001	→	1,002
3,0001	→	1,0002
3,00001	→	1,00002
3,000001	→	1,000002
→ **3**		→ **1**

Αντί να χρησιμοποιούμε την έκφραση *«το x πλησιάζει ολοένα και πιο κοντά στον αριθμό 3»* θα λέμε συντομότερα «**το x τείνει** στον αριθμό 3». Αντίστοιχα, αντί της έκφρασης «το y πλησιάζει τον αριθμό 1» θα τη λέμε συντομότερα «το 1 **είναι το όριο της συνάρτησης**». Συμβολικά, θα γράφουμε: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$.

Γενικότερα, θα γράφουμε :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

και θα διαβάζουμε ότι **«το όριο της συνάρτησης f(x) όταν το x τείνει στον αριθμό x_o είναι ο αριθμός** ℓ ».

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f: $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta) \to \mathbb{R}$, «έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο x_o », αν οι τιμές της f(x) βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον αριθμό ℓ , όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_o (αλλά δε γίνεται απαραίτητα ίσο με το x_o). Θα συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

Ιδιότητες Ορίων

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ τότε:

α. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x) \pm g(x) \,] = \ell_1 \pm \ell_2$

β. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x) \cdot g(x) \,] = \ell_1 \cdot \ell_2 \ell_2$

γ. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$

δ. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$

ε. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x) \,]^{\nu} = \ell_1{}^{\nu}$

στ. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}$, για κάθε $\kappa \in N$, $\kappa \geq 2$

Μεθοδολογία

Γενικά, σε κάθε περίπτωση, το πρώτο πράγμα που κάνουμε είναι **αντικατάσταση** . Δηλαδή, στον τύπο της συνάρτησης αντικαθιστούμε το x_0 στη θέση του x και εκτελούμε τις πράξεις.

Απλές περιπτώσεις

Στις πολύ απλές περιπτώσεις, μετά την ολοκλήρωση των πράξεων, έχουμε καταλήξει σε ένα μοναδικό αριθμό, ο οποίος αποτελεί και το ζητούμενο όριο. Εκεί τελειώνουμε.

πχ. $\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 4) = 2^2 + 3\cdot 2 - 4 = 6$

Απροσδιόριστες Μορφές 0/0

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις, όταν έχουμε ρητές συναρτήσεις (κλάσματα), στις οποίες αν κάνουμε αντικατάσταση και στη συνέχεια τις πράξεις καταλήγουμε σε μηδενικό αποτέλεσμα, τόσο στον αριθμητή, όσο και (κυρίως) στον παρονομαστή. Τότε λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\mathbf{\frac{0}{0}}$. Στην περίπτωση αυτή δύο είναι οι συνηθέστεροι τρόποι που ξεπερνούμε αυτό το πρόβλημα.

A. Παραγοντοποίηση

Χρειάζεται να θυμηθούμε μερικούς από τους βασικότερους τρόπους παραγοντοποίησης:

α. Ο κοινός παράγοντας

Σε κάθε παραγοντοποίηση, όσο εύκολη ή δύσκολη κι αν είναι, αρχικά θα ελέγχουμε πάντα αν βγαίνει κοινός παράγοντας από τους όρους της παράστασης.

πχ. $2x - 2y = 2\cdot(x - y)$ *Κοινός παράγοντας το 2*
πχ. $3x + 12y = 3\cdot(x + 4y)$ *Κοινός παράγοντας το 3*
πχ. $x^3 - xy = x\cdot(x^2 - y)$ *Κοινός παράγοντας το x*
πχ. $x^2y - x^2y^2 + x^3y = x^2y\cdot(1 - y + x)$ *Κοινός παράγοντας το x^2y*
πχ. $9x^3y^5 + 15xy^3 = 3xy^3\cdot(3x - 5y)$ *Κοινός παράγοντας το $3xy^3$*

Είναι φανερό ότι αν έχουμε πολλούς κοινούς παράγοντες σε διάφορες δυνάμεις, τότε επιλέγουμε το **μικρότερο εκθέτη** από κάθε κοινό παράγοντα.

β. Οι γνωστές ταυτότητες

πχ. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$ *Διαφορά τετραγώνων*
πχ. $25 - x^2 = 5^2 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$ *Διαφορά τετραγώνων*
πχ. $16x^2 - 36y^2 = (4x)^2 - (6y)^2 = (4x - 6y)(4x + 6y)$ *Διαφορά τετραγώνων*
πχ. $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ *Διαφορά κύβων*
πχ. $27 + x^3 = 3^3 + x^3 = (3 + x)(9 - 3x + x^2)$ *Διαφορά κύβων*

Οι πιο γνωστές μας ταυτότητες είναι :

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ Τετράγωνο αθροίσματος
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ Τετράγωνο διαφοράς
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ Διαφορά τετραγώνων
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ Κύβος αθροίσματος
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ Κύβος διαφοράς
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ Άθροισμα κύβων
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ Διαφορά κύβων

Από αυτές, το πιο συχνά, θα συναντάμε τη **διαφορά τετραγώνων**.

γ. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον επόμενο τρόπο, δηλαδή το σχήμα Horner. Ωστόσο, επειδή υπάρχουν ειδικές σχέσεις για το τριώνυμο, οφείλουμε να τις επισημάνουμε. Διακρίνουμε **3** περιπτώσεις, ανάλογα με τη **διακρίνουσα** του τριωνύμου :

Διακρίνουσα **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$**	**Πόσες ρίζες;**	**Παραγοντοποίηση**
$\Delta > 0$	Το τριώνυμο έχει **2 ρίζες**, πραγματικές και άνισες, έστω ρ_1 και ρ_2, τις οποίες βρίσκουμε από τον τύπο: $\boldsymbol{\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$	Τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο: $\boldsymbol{\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)}$
$\Delta = 0$	Το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα, έστω ρ, την οποία βρίσκουμε από τον τύπο: $\boldsymbol{\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}}$	Τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο: $\boldsymbol{\alpha(x - \rho)^2}$
$\Delta < 0$	Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.	Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατή η παραγοντοποίηση, κι έτσι το τριώνυμο μένει όπως είναι.

πχ. Να παραγοντοποιηθεί το $\mathbf{x^2 + 5x + 6}$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4\cdot1\cdot6 = 25 - 24 = 1 > 0$ άρα υπάρχουν 2 ρίζες.

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\[2ex] \dfrac{-5-1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τύπο έχουμε:

$\mathbf{x^2 + 5x + 6} = 1\cdot(x - (-2))\cdot(x - (-3)) = \mathbf{(x + 2)(x + 3)}$

πχ. Να παραγοντοποιηθεί το $\mathbf{4x^2 - 4x + 1}$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (4)^2 - 4\cdot4\cdot1 = 16 - 16 = 0$ άρα υπάρχει μόνο 1 ρίζα.

$$\rho = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2\cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τύπο έχουμε:

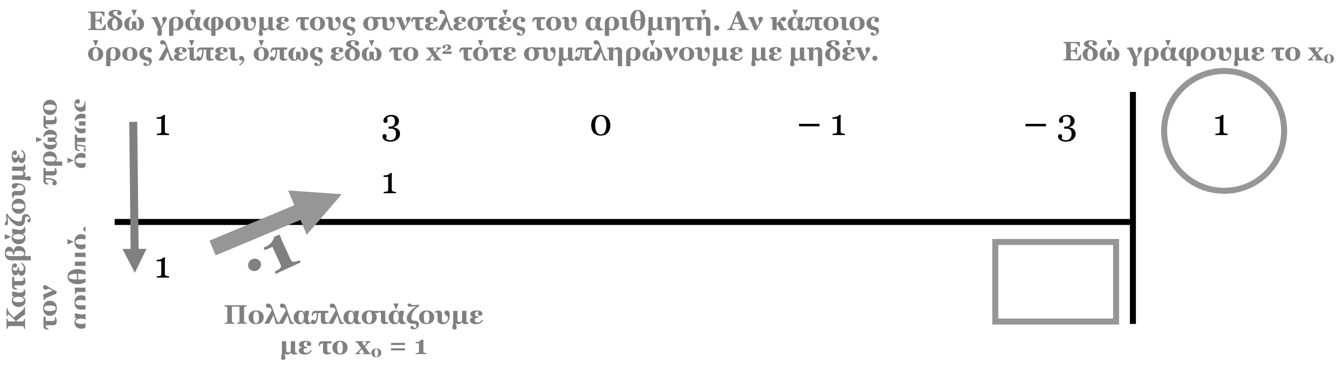
$$\mathbf{4x^2 - 4x + 1 = 4\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

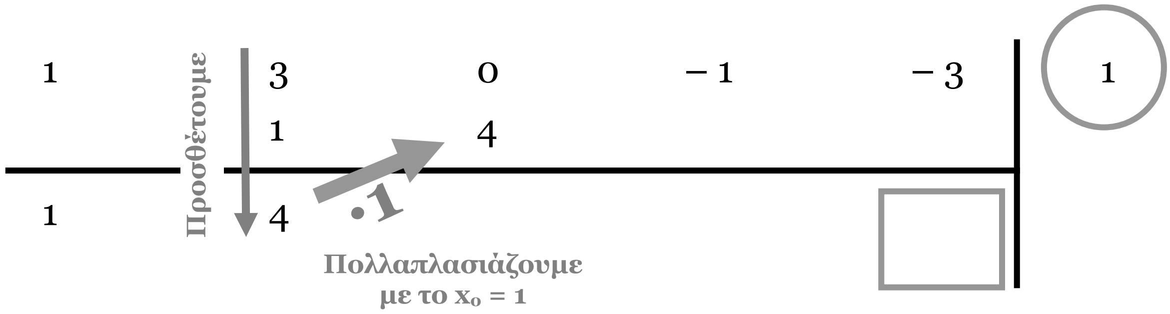
δ. Το σχήμα Horner

Για παραστάσεις βαθμού μεγαλύτερου του 2 (αλλά, επίσης, και για τα τριώνυμα ή τις ταυτότητες, αν δεν τις θυμόμαστε) εφαρμόζουμε την παρακάτω μέθοδο, που ονομάζεται σχήμα Horner. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή, χρειαζόμαστε έναν αριθμό "κλειδί" (στο παρακάτω παράδειγμα ο 1). Ο τυπικός τρόπος είναι να αναζητούμε αυτόν τον αριθμό στους διαιρέτες του σταθερού όρου (σε ένα πολυώνυμο, αυτός είναι ο τελευταίος όρος, δηλαδή ο μοναχικός αριθμός στο τέλος – στο παρακάτω παράδειγμα ο –3). Ωστόσο, επειδή το σχήμα Horner θα μας χρειαστεί κυρίως στο όρια απροσδιόριστης μορφής, εμείς θα επιλέγουμε πάντα τον αριθμό στον οποίο τείνει το x. Με άλλα λόγια, εμείς θα εκτελούμε πάντα το σχήμα Horner με τη βοήθεια του αριθμού $\mathbf{x_o}$.

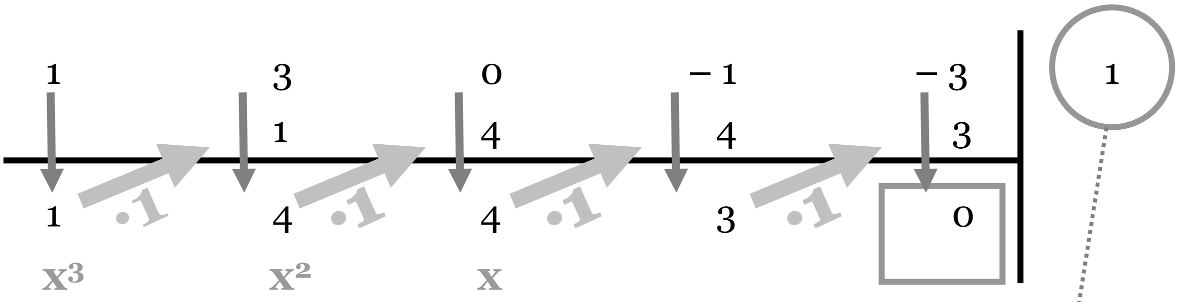
Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 + 3x^3 - x - 3}{x-1}$

Με μια απλή αντικατάσταση, διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή 0/0. Συνεπώς πρέπει πρώτα να κάνουμε παραγοντοποίηση. Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή, θα εφαρμόσουμε το σχήμα Horner με το x_o , δηλαδή με τον αριθμό 1 ...





Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα:



Οι αριθμοί που έχουμε βρεί κάτω από τη γραμμή, δηλαδή τα 1, 4, 4 και 3 , αποτελούν τους συντελεστές ενός νέου πολυωνύμου, βαθμού κατά **ένα μικρότερο** από το αρχικό, δηλαδή $3^{ου}$ βαθμού στο παράδειγμά μας. Η παραγοντοποίηση έχει, τότε, ως εξής :

$$\mathbf{x^4 + 3x^3 - x - 3 = (x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \cdot (x - 1)}$$

Άρα: $$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + 3x^3 - x - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 + 4x^2 + 4x + 3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} =$$

$$\lim_{x\to 1}(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) = 1^3 + 4\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 3 = \mathbf{12}$$

B. Συζυγείς παραστάσεις

Αν στις παραστάσεις περιλαμβάνονται και τετραγωνικές ρίζες, τότε δεν κάνουμε παραγοντοποίηση όπως πριν, αλλά ακολουθούμε μια διαφορετική πορεία, προκειμένου να "εξαφανίσουμε" τις ρίζες, που δημιουργούν πρόβλημα, και να κάνουμε απλοποίηση. Για να γίνει αυτό, εφαρμόζουμε ένα "τρικ" ώστε να προκύψει η ταυτότητα διαφορά τετραγώνων.

$$\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$$

Οι παραστάσεις **(α + β)** και **(α – β)** λέγονται **συζυγείς**. Λέμε δηλαδή ότι η (α + β) είναι η συζυγής παράσταση της (α – β) και αντίστροφα.

Βήμα 1ο. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή της παράστασης που έχει τη ρίζα.

Βήμα 2ο. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα «διαφορά τετραγώνων» και κατόπιν απαλοίφουμε τη ρίζα με το τετράγωνο.

Βήμα 3ο. Εκτελούμε τις πράξεις.

Βήμα 4ο. Απλοποιούμε.

Βήμα 5ο. Αντικαθιστούμε όπου x το x_0 και βρίσκουμε το όριο.

Πλευρικά Όρια

Το πιο συχνά, οι συναρτήσεις που θα καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε θα χωρίζονται σε κλάδους, όπου κάθε κλάδος θα έχει διαφορετική εξίσωση. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα υπάρχει κάποιος αριθμός ο οποίος θα είναι το «σύνορο» στο οποίο αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης. Συνήθως, θα μας ζητούν να βρούμε το όριο στον αριθμό αυτόν. Τότε είμαστε αναγκασμένοι να βρούμε δύο ξεχωριστά όρια :

Α. Όταν το x πλησιάζει το x_o από μικρότερες τιμές, δηλαδή $\mathbf{x < x_o}$. Τότε γράφουμε $\mathbf{x \to x_o^-}$ και διαβάζουμε:

«το x τείνει στο x_o από αριστερά»

Β. Όταν το x πλησιάζει το x_o από μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή $\mathbf{x > x_o}$. Τότε γράφουμε $\mathbf{x \to x_o^+}$ και διαβάζουμε:

«το x τείνει στο x_o από δεξιά»

Τα δύο αυτά όρια ονομάζονται **πλευρικά όρια** της συνάρτησης και τα υπολογίζουμε με κάποιον απ’ τους τρόπους που αναλύθηκαν παραπάνω, δηλ. είτε με αντικατάσταση, είτε με παραγοντοποίηση, είτε με συζυγείς παραστάσεις.

- **Πότε θα υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης, σε κάποιο x_o;**

Το όριο μιας συνάρτησης γενικά θα υπάρχει μόνο αν τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και μάλιστα είναι **ίσα μεταξύ τους!** Δηλαδή, αν:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o} f(x)$$

Διαφορετικά, αν $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$ τότε θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης στο x_o , απλά, δεν υπάρχει!

Συνέχεια Συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Για να λέγεται **συνεχής** μια συνάρτηση, σε κάποιον αριθμό x_o του πεδίου ορισμού της, θα πρέπει:

α. Να υπάρχει το όριο της στο x_o , δηλαδή :

$$\lim_{x\to x_o-} f(x) = \lim_{x\to x_o+} f(x) = \lim_{x\to x_o} f(x)$$

β. Κι επίσης, το όριο αυτό να ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο x_o , δηλαδή :

$$\mathbf{\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)}$$

Γενικά, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (αυτό μπορεί να συμβεί και στα πλευρικά όρια) :

Α. Συναρτήσεις όπου παίρνουν την τιμή $x = x_o$ σε έναν από τους κλάδους τους.

πχ. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \le 3 \\ x^2+x+2 & x > 3 \end{cases}$ Να βρεθεί το όριο στο $\mathbf{x_o = 3}$.

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή της f(x) στο 3 ισούται με το αριστερό της όριο.

Β. Συναρτήσεις όπου παίρνουν την τιμή $x = x_o$ σε ξεχωριστό, αυτόνομο κλάδο.

πχ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \ne 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$ Να βρεθεί το όριο στο $\mathbf{x_o = 1}$.

Στην περίπτωση αυτή, τα δύο πλευρικά όρια ταυτίζονται, συνεπώς η παραπάνω συνάρτηση μπορεί να γραφτεί, ισοδύναμα:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \\ 5 & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \end{cases}$$

Είναι φανερό, τώρα, ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχει νόημα να πάρουμε τα πλευρικά όρια ξεχωριστά, αφού θα λύσουμε τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις. Άρα, υπολογίζουμε απλά ένα όριο, όταν $x \to x_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια συνάρτηση f: (α, β) $\to \mathbb{R}$ θα ονομάζεται συνεχής στο διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του (α, β).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3

Μια συνάρτηση f: [α, β] $\to \mathbb{R}$ θα ονομάζεται συνεχής στο διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του (α, β) και επιπλέον έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Ιδιότητες Συνέχειας

Αν οι συναρτήσεις f, g: $A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$, τότε:

α. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

β. Η συνάρτηση $h(x) = \kappa \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 (με $\kappa \in \mathbb{R}$).

γ. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

δ. Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 (με $g(x) \neq 0$).

ε. Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0.

στ. Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[\kappa]{f(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 (με $f(x) \geq 0$).

Για τη σύνθεση δύο συναρτήσεων έχουμε:

Έστω f: $A \to \mathbb{R}$ και g: $B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g συνεχής στο $f(x_0) \in B$, τότε και η σύνθεσή τους gof: $A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .