

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Μαθηματικά Ι

**ΘΕΜΑΤΑ
ΟΡΙΩΝ & ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ**

2000 - 2013

ΕΠΑ.Λ.

Επιμέλεια

ΚΟΛΛΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Θέμα εξετάσεων 2001

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & , x > 3 \\ \lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1 & , x \leq 3 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

α. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

β. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Θέμα εξετάσεων 2002

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 1 & , x \geq 1 \\ x + 2 & , x < 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

γ. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Θέμα εξετάσεων 2003

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} & , \text{ αν } x \neq 1 \\ \lambda - 2 & , \text{ αν } x = 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$.

γ. Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Θέμα εξετάσεων 2004

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 18}{\sqrt{x} - 3} & , \text{ αν } x > 9 \\ \lambda x + 3 & , \text{ αν } x \leq 9 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x)$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x)$.

γ. Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 9$.

Θέμα εξετάσεων 2005

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & , x < -1 \\ kx + \mu & , -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 5 + \ln x & , x > 1 \end{cases}$$

όπου k, μ πραγματικοί αριθμοί.

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
- γ.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- δ.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- ε.** Να βρείτε τα k και μ , ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θέμα εξετάσεων 2006

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha & , \text{αν } x > 2 \\ 4 & , \text{αν } x = 2 \\ \alpha x + \beta & , \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
- γ.** Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.
- δ.** Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα γ , να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

Θέμα εξετάσεων 2007

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} & , \text{ αν } x < 0 \\ -3 + \beta & , \text{ αν } x = 0 \\ e^x - \alpha & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- γ.** Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- δ.** Για την τιμή $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Θέμα εξετάσεων 2008

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{\lambda(x - 1)} & , \text{ αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3x - 1} & , \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda \neq 0$.

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- γ.** Να υπολογισθεί η τιμή του λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Θέμα εξετάσεων 2009

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 4x + 2ae^x$,

$$\text{όπου } a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Θέμα εξετάσεων 2010

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & , x < 1, x \neq 1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha & , x \geq 1, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- α.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- β.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- γ.** Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- δ.** Για $\alpha = -3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot f(0) + 2 \cdot f(6)$$

Θέμα εξετάσεων 2010**[Εσπερινά]**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x - 4 & , x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} & , x > 3 \end{cases}$$

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.
- γ.** Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Θέμα εξετάσεων 2011

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} & , \text{αν } x < 4 \\ \alpha & , \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3 & , \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$.
- γ.** Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

Θέμα εξετάσεων 2011**[Εσπερινά]**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + 5$, όπου:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Θέμα εξετάσεων 2012

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} & , \text{ αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x & , \text{ αν } x \leq 1 \end{cases}$$

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- γ.** Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\kappa} & , \text{ αν } x < 1 \\ \kappa & \\ x^2 + \kappa & , \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι $\kappa = 1$ ή $\kappa = -2$.

Θ4. Αν $\lambda = -1$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + \lambda x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

Θέμα εξετάσεων 2013

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \ln x & , \text{ αν } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} & , \text{ αν } x > 1 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

β. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Θ3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \alpha x + \beta & , x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & , x > 3 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- α.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.
- β.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.
- γ.** Να βρείτε τα α, β , ώστε $f(0) = 5$ και η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 3x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν $\kappa = 3$, να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1-x}$.