ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γενικές έννοιες

Συνάρτηση

Συνάρτηση ονομάζουμε μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α (πεδίο ορισμού) αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.

Πραγματική συνάρτηση

Πραγματική συνάρτηση, πραγματικής μεταβλητής, ονομάζουμε μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο x ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ (υποσύνολο του $\mathbb{R}$) , αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y .

- Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη** ή **πρότυπο**.
- Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται ως f(x).
- Προφανώς, απ' την τελευταία πρόταση ισχύει: **f(x) = y** .
- Η μεταβλητή y ονομάζεται, επίσης, **εξαρτημένη** ή **εικόνα του x**.
- Το σύνολο Α ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται συνήθως ως : $\mathbf{A_f}$ ή $\mathbf{D_f}$
- Μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α εκφράζεται συμβολικά ως : $\mathbf{f: A \to \mathbb{R}}$

Πεδίο ορισμού

Το πεδίο ορισμού, πρακτικά, είναι το σύνολο των τιμών τις οποίες επιτρέπεται να δεχτεί η ανεξάρτητη μεταβλητή x, έτσι ώστε η συνάρτηση να εξακολουθεί να έχει νόημα, ως μαθηματική έκφραση.

Κυριότεροι περιορισμοί :

- **Παρονομαστές $\neq 0$**

Αν $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{g(x)}}{\mathbf{h(x)}}$ τότε θα πρέπει $\mathbf{h(x) \neq 0}$

- **Υπόρριζα ≥ 0**

Αν $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{g(x)}}$, τότε θα πρέπει $\mathbf{g(x) \geq 0}$

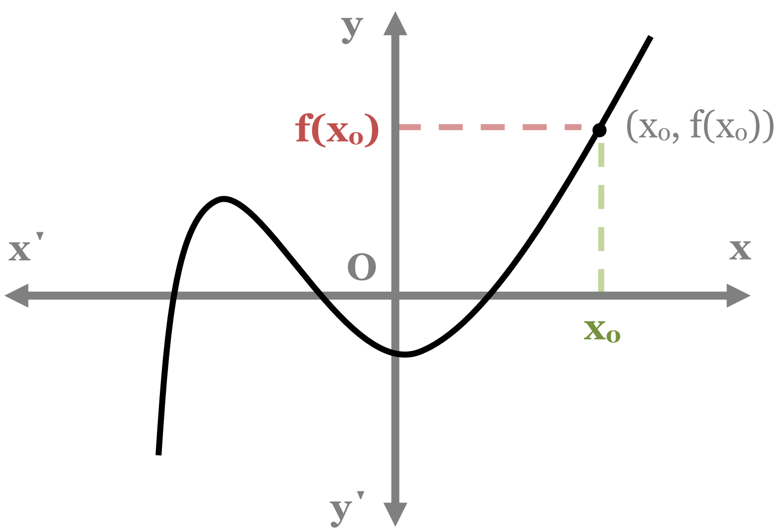
Σύνολο τιμών

Σύνολο τιμών ονομάζουμε το σύνολο, όλων των τιμών της μεταβλητής y = f(x) και συμβολίζεται ως : **f(A)** *

(*) Δεδομένου ότι το πεδίο ορισμού είναι το A .

Γραφική παράσταση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει y = f(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x, f(x)), x∈A, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με : $\mathbf{C_f}$.



- Ο άξονας **x΄x** αναφέρεται και ως άξονας των **τετμημένων** , ενώ ο άξονας **y΄y** τως άξονας των **τεταγμένων** .

Μονοτονία

Γνησίως αύξουσα

Μια συνάρτηση θα λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, του πεδίου ορισμού της, αν για δύο οποιαδήποτε στοιχεία $x_1, x_2 \in \Delta$, με $\mathbf{x_1 < x_2}$ ισχύει $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$.

Γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση θα λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, του πεδίου ορισμού της, αν για δύο οποιαδήποτε στοιχεία $x_1, x_2 \in \Delta$, με $\mathbf{x_1 < x_2}$ ισχύει $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$.

Γνησίως μονότονη

Μια συνάρτηση θα λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι (μόνο) γνησίως αύξουσα ή (μόνο) γνησίως φθίνουσα .

Ακρότατα

Ολικό μέγιστο

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν ισχύει $\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}$, για κάθε $x \in A$.

Ολικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν ισχύει $\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$, για κάθε $x \in A$.

Τοπικό μέγιστο

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o \in A$, όταν ισχύει $\mathbf{f(x) \leq f(x_o)}$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_o.

Τοπικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o \in A$, όταν ισχύει $\mathbf{f(x) \geq f(x_o)}$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_o.

- Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης καλούνται, γενικά, **ολικά ακρότατα** , ενώ το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο **τοπικά ακρότατα** .

Όριο - Συνέχεια

Ιδιότητες ορίων

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x) \pm g(x)\,] = \ell_1 \pm \ell_2$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, c \cdot f(x)\,] = c \cdot \ell_1$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x) \cdot g(x)\,] = \ell_1 \cdot \ell_2$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x)\,]^{\nu} = \ell_1^{\,\nu}$

7. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq 2$ κι εφόσον $\ell_1 \geq 0$

Συνέχεια

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ονομάζεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Οι περισσότερες γνωστές μας συναρτήσεις είναι συνεχείς, στα διαστήματα όπου ορίζονται. Έτσι :

- Οι **πολυωνυμικές** συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι **ρητές** συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι **άρρητες** συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι **τριγωνομετρικές** συναρτήσεις είναι συνεχείς.

Κι επιπλέον :

- Οι συναρτήσεις που προκύπτουν, από **πράξεις μεταξύ συνεχών** συναρτήσεων, είναι συνεχείς

Παράγωγος - Ρυθμός μεταβολής

Παραγωγίσιμη στο x_o

Μια συνάρτηση θα λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο :

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται ως $\mathbf{f'(x_o)}$.

Πρώτη παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A κι έστω B το σύνολο των $x\in A$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει κάθε $x\in B$ στο $f\,'(x) = \lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ λέγεται πρώτη παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f\,'$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$ [σταθερή]	0
x [ταυτοτική]	1
x^{ρ} [$\rho \in \mathbb{Q}$, $\rho \neq 0$, $x > 0$]	$\rho \cdot x^{\rho-1}$
$\sqrt{x}$ [$x > 0$]	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
ημx	συνx
συνx	− ημx
εφx	$\frac{1}{συν^2 x}$
σφx	$-\frac{1}{ημ^2 x}$

Κανόνες παραγώγισης

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- $[\,g(f(x))\,]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Αποδείξεις

1. **Να δείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c είναι 0, δηλαδή ότι (c)′ = 0 .**

Έχουμε: $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

- Για $h \neq 0$ είναι : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{0}{h} = 0$
- Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος είναι το όριο :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Συνεπώς : $(c)' = 0$

2. **Να δείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x είναι 1, δηλαδή ότι (x)′ = 1 .**

Έχουμε : $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$

- Για $h \neq 0$ είναι : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$
- Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος είναι το όριο :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Συνεπώς : $(x)' = 1$

3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $2x$ δηλαδή ότι $(x^2)' = 2x$.

Έχουμε : $f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 =$

$= x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = (2x + h)h$

- Για $h \neq 0$ είναι : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

- Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος είναι το όριο :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Συνεπώς : $(x^2)' = 2x$

4. Να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f\,'(x)$.

Έστω : $F(x) = c\cdot f(x)$

Έχουμε :

$F(x + h) - F(x) = c\cdot f(x + h) - c\cdot f(x) = c\cdot[f(x + h) - f(x)]$

- Για $h \neq 0$ είναι:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h}=c\cdot\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

- Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος είναι το όριο :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\cdot\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}\right]=$$

$$= \lim_{h\to 0} c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} = c \cdot f\,'(x)$$

Συνεπώς : $(c\cdot f(x))' = c \cdot f\,'(x)$

5. Να αποδείξετε ότι (f(x) + g(x))′ = f ′(x) + g′(x) .

Έστω : $F(x) = f(x) + g(x)$

Έχουμε :

$F(x + h) - F(x) =$

$f(x + h) + g(x + h) - (f(x) + g(x)) =$

$f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x) =$

$[f(x + h) - f(x)] + [g(x + h) - g(x)]$

- Για $h \neq 0$ είναι:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

- Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος είναι το όριο :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f\,'(x) + g\,'(x)$$

Συνεπώς : $(f(x) + g(x))' = f\,'(x) + g'(x)$

Παράγωγος και μονοτονία

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει **$f\,'(x) > 0$**, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει **$f\,'(x) < 0$**, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .

Παράγωγος και ακρότατα

Κριτήριο πρώτης παραγώγου

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:
  - $f\,'(x) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$
  - $f\,'(x) > 0$ στο (α, x_0)
  - $f\,'(x) < 0$ στο (x_0, β)

  τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:
  - $f\,'(x) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$
  - $f\,'(x) < 0$ στο (α, x_0)
  - $f\,'(x) > 0$ στο (x_0, β)

  τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.