ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ρυθμός μεταβολής

ρυθμός μεταβολής = παράγωγος

- Πιο σωστό είναι να λέμε «ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους, ως προς ένα άλλο», αλλά ... :)
- Προσέχουμε γιατί οι συναρτήσεις, στα περισσότερα προβλήματα, είναι **σύνθετες**.
- Στα περισσότερα προβλήματα, αυτού του τύπου, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος **t** και όχι το **x** , όπως έχουμε συνήθισει.
- Εκφράσεις όπως «αρχικά», «αρχή πειράματος», «αρχική μέτρηση», «ξεκίνημα», «έναρξη», κ.τ.λ υπονοούν ότι ο χρόνος δεν έχει ξεκινήσει ακόμη να μετράει, οπότε θέτουμε **t = 0** , στην αντίστοιχη συνάρτηση.

Παράδειγμα

Ο αριθμός των μελών ενός γυμναστηρίου, που άνοιξε πριν από μερικά χρόνια, δίνεται κατά προσέγγιση από την συνάρτηση :

$$N(t) = 100(64+4t)^{\frac{2}{3}} \;,\quad \text{με } 0 \le t \le 52$$

όπου N είναι ο αριθμός των μελών, στην αρχή μιας εβδομάδας t . Πώς αυξανόταν ο αριθμός νέων μελών αρχικά και πώς στην αρχή της 40ης εβδομάδας; Ποιος ο αριθμός των μελών τις δύο αυτές χρονικές στιγμές;

Απάντηση

Αντιλαμβανόμαστε αμέσως τις παρακάτω σημασίες:

«πώς αυξανόταν» $\rightarrow$ ρυθμός μεταβολής

«αρχικά» $\rightarrow$ για t = 0

Συνεπώς, υπολογίζουμε την (σύνθετη) παράγωγο $N'(t)$:

$$\mathbf{N'(t)} = \left(100(64+4t)^{\frac{2}{3}}\right)' = 100\left((64+4t)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 100 \cdot \frac{2}{3}(64+4t)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (64+4t)' = \frac{200}{3}(64+4t)^{-\frac{1}{3}} \cdot 4 = \mathbf{\frac{800}{3}(64+4t)^{-\frac{1}{3}}}$$

Υπολογίζουμε τώρα το ρυθμό μεταβολής των μελών «αρχικά», δηλαδή για **t = 0** :

$$N'(0) = \frac{800}{3}(64+4\cdot 0)^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot 64^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{4} \cong 66{,}7 \text{ μέλη}$$

Αναλόγως, για **t = 40** :

$$N'(40) = \frac{800}{3}(64+4\cdot 40)^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot 224^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{224}} \cong \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{6{,}1} \cong 43{,}7 \text{ μέλη}$$

Επειδή μας ζητείται, επιπλέον, και ο ακριβής αριθμός των μελών, τις δύο αυτές χρονικές στιγμές (και όχι ρυθμός μεταβολής), τότε εργαζόμαστε με την αρχική συνάρτηση:

$$N(0) = 100(64+4\cdot 0)^{\frac{2}{3}} = 100\cdot 64^{\frac{2}{3}} = 100\cdot\sqrt[3]{64^2} =$$

$$= 100\cdot\sqrt[3]{4096} = 100\cdot 16 = 1600$$

και

$$N(40) = 100(64+4\cdot 40)^{\frac{2}{3}} = 100\cdot 224^{\frac{2}{3}} = 100\cdot\sqrt[3]{224^2} =$$

$$= 100\cdot\sqrt[3]{50175} \cong 100\cdot 36{,}9 = 3690$$

Θέση - Ταχύτητα - Επιτάχυνση

Συνάρτηση θέσης	**:**	**x(t)**
Συνάρτηση ταχύτητας	**:**	**v(t) = x΄(t)**
Συνάρτηση επιτάχυνσης	**:**	**α(t) = v΄(t) = x΄΄(t)**

- Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι, σε κάθε περίπτωση, ο χρόνος **t** .
- Αν ζητείται η «**αρχική ταχύτητα**», «**αρχική θέση**», κ.τ.λ. υπονοείται ότι ο χρόνος δεν έχει ξεκινήσει να μετράει ακόμη, άρα θέτουμε **t = 0** .
- Συχνά, μας ζητούν να βρούμε πότε (= τις χρονικές στιγμές που) ένα κινητό είναι ακίνητο. Όταν κάτι δεν κινείται, σημαίνει πως δεν έχει ταχύτητα. Χρειάζεται να λύσουμε, απλά, την εξίσωση : **v(t) = 0**
- Άλλοτε, πάλι, μας ζητούν να βρούμε πότε (= τις χρονικές στιγμές που) ένα κινητό κινείται **αντίστροφα**. Αυτό σημαίνει : η ταχύτητα, να είναι είναι **αρνητική**. Επειδή γνωρίζουμε ότι **v(t) = x΄(t)** , κατασκευάζουμε απλά τον πίνακα προσήμων της παραγώγου, όπως ακριβώς έχουμε συνηθίσει από τις ασκήσεις μονοτονίας.
- Πολλές φορές στο ζητούμενο προστίθεται η έκφραση «**στιγμιαία**». Στην περίπτωση αυτή, ζητείται απλά η τιμή μιας συνάρτησης σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 . Άρα, κάνουμε απλή αντικατάσταση. Πχ. Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα μετά από 2 sec : με απλά λόγια t = 2 , άρα υπολογίζουμε το v(2) .

- Είναι σημαντικό, επίσης, να καταλάβουμε ότι είναι διαφορετικό μέγεθος η θέση από την **απόσταση**. Η απόσταση που διανύει ένα κινητό αντικείμενο είναι πάντα θετική (ή μηδέν), ενώ η θέση του μπορεί να πάρει όλες τις δυνατές τιμές, αναλόγως αν το κινητό βρίσκεται δεξιά ή αριστερά απ' το σημείο αφετηρίας.

Παράδειγμα

Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S (σε m), στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησής του, ίση με :

$$S(t) = \frac{5}{3}t^3 - 10t^2 + 21t + 3 \;,\quad 0 \le t \le 6$$

α. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου.

β. Να βρείτε την απόσταση που θα έχει διανύσει μετά από 3 sec, καθώς και της στιγμιαία του ταχύτητα την χρονική στιγμή αυτή.

γ. Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου, καθώς και τις χρονικές στιγμές που το αυτοκίνητο επιταχύνει ή επιβραδύνει, αντίστοιχα.

Απάντηση

α. Η παράγωγος της συνάρτησης S(t) μας δίνει την ταχύτητα v(t) , δηλαδή :

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{5}{3}t^3 - 10t^2 + 21t + 3\right)' = \frac{5}{3}3t^2 - 20t + 21 = 5t^2 - 20t + 21$$

Επειδή μας ζητείται η αρχική ταχύτητα, θέτουμε **t = 0** , άρα :

$$v(t) = 5\cdot 0^2 - 20\cdot 0 + 21 = 21 \text{ m/sec}$$

β. Για **t = 3** , η αρχική συνάρτηση δίνει:

$$S(3) = \frac{5}{3}3^3 - 10\cdot 3^2 + 21\cdot 3 + 3 = 45 - 90 + 63 = 18 \text{ m}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα, για t = 3, γίνεται :

$$v(5) = 5 \cdot 3^{2} - 20 \cdot 3 + 21 = 45 - 60 + 21 = 6 \text{ m/sec}$$

γ. Η παράγωγος της ταχύτητας v(t) μας δίνει την επιτάχυνση α(t) , δηλαδή:

$$\alpha(t) = v'(t) = \left(5t^2 - 20t + 21\right)' = 10t - 20$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων :

$$10t - 20 = 0 \Leftrightarrow 10t = 20 \Leftrightarrow t = 2 \text{ sec}$$

t	0		2		6
10t – 20		–	0	+	

Άρα, στο χρονικό διάστημα [0, 2] το αυτοκίνητο επιβραδύνει, ενώ στο διάστημα [2, 6] επιταχύνει.

Κόστος - Κέρδος - Έσοδα

Οι οικονομικές γνώσεις, που χρειάζονται για τα προβλήματα αυτού του τύπου, είναι επιπέδου κουμπαρά. Αν συμβολίσουμε ως:

- συνάρτηση - **Κόστους** : **K(x)**
- συνάρτηση - **Εσόδων** : **E(x)**
- συνάρτηση - **Κέρδους** : **P(x)**

όπου x = (συνήθως) αριθμός προϊόντων, τότε :

P(x) = E(x) – K(x)

Με άλλα λόγια, κέρδος είναι αυτό που απομένει αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος παρασκευής.

Μέσα μεγέθη

- Μέσο κόστος : $\overline{\mathbf{K(x)}} = \dfrac{\mathbf{K(x)}}{\mathbf{x}}$
- Μέσο έσοδο : $\overline{\mathbf{E(x)}} = \dfrac{\mathbf{E(x)}}{\mathbf{x}}$
- Μέσο κέρδος : $\overline{\mathbf{P(x)}} = \dfrac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{x}}$

- Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής κάποιου μεγέθους (κόστους, εσόδων, κέρδους) τότε βρίσκουμε απλά την παράγωγο.
- Αν ζητείται να βρούμε την παραγωγή για την οποία κάποιο μέγεθος αυξάνει ή μειώνεται, τότε υπολογίζουμε απλά τη μονοτονία του. Αν η μονοτονία είναι γνησίως αύξουσα, προφανώς, το μέγεθος αυξάνεται. Αν είναι γνησίως φθίνουσα μειώνεται.
- Αν ζητείται να υπολογίσουμε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή κάποιου μεγέθους (πχ. μέγιστο κέρδος, ελάχιστο κέρδος, κ.τ.λ) τότε αναζητούμε τα ακρότατα της αντίστοιχης συνάρτησης (πχ. τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο).
- Κάποιες φορές, μας δίνεται η συνάρτηση για την παραγωγή **ενός μόνο** προϊόντος. Τότε, για τη συνολική παραγωγή (για x προϊόντα), οι αντίστοιχες συναρτήσεις θα είναι: $\mathbf{x \cdot K(x)}$, $\mathbf{x \cdot E(x)}$, $\mathbf{x \cdot P(x)}$.

Παράδειγμα

Μια βιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής Τ ενός νέου προϊόντος και της ζητούμενης ποσότητας x του προϊόντος αυτού δίνεται από τη συνάρτηση :

$$T(x) = -0{,}2x + 4000\ €\ , \quad \text{για παραγωγή } 0 \le x \le 10.000$$

α. Να βρεθεί η συνάρτηση E(x) των εσόδων της βιομηχανίας.

β. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων.

γ. Αν το κόστος για την παραγωγή x μονάδων δίνεται από τη συνάρτηση :

$$K(x) = 950x + 250.000\ €$$

να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P(x).

δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μέσου κέρδους.

ε. Να βρείτε το κέρδος από την παραγωγή 1000 μονάδων προϊόντος.

Απάντηση

α. Αφού T(x) είναι η τιμή ενός προϊόντος, άρα η τιμή των x προϊόντων θα είναι $x \cdot T(x)$. Άρα, η συνάρτηση εσόδων θα είναι:

$$\mathbf{E(x)} = x \cdot T(x) = x \cdot (-0{,}2x + 4000) = -0{,}2x^2 + 4000x$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής είναι απλά η παράγωγος, συνεπώς:

$$E'(x) = (-0{,}2x^2 + 4000x)' = -0{,}4x + 4000$$

γ. Γνωρίζουμε ότι $P(x) = E(x) - K(x)$, συνεπώς:

$$\mathbf{P(x)} = -0{,}2x^2 + 4000x - (950x + 250.000) =$$

$$= -0{,}2x^2 + 4000x - 950x - 250.000 =$$

$= -0{,}2x^2 + 3050x - 250.000$

δ. Το μέσο κέρδος δίνεται από τη σχέση $\dfrac{P(x)}{x}$, άρα:

$$\overline{\mathbf{P(x)}} = \frac{-0{,}2x^2 + 3050x - 250000}{x} = \frac{-0{,}2x^2}{x} + \frac{3050x}{x} - \frac{250000}{x} =$$

$$= -0{,}2x + 3050 - \frac{250000}{x}$$

Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κέρδους θα είναι η παράγωγός του:

$$\left(-0{,}2x + 3050 - \frac{250000}{x}\right)' = -0{,}2 + \frac{250000}{x^2}$$

ε. Η συνάρτηση P(x) για x = 1000 γίνεται:

$P(1000) = -0{,}2 \cdot 1000^2 + 3050 \cdot 1000 - 250.000 =$

$= -200.000 + 3.050.000 - 250.000 =$
$= 2.600.000$ €

Γεωμετρικά προβλήματα

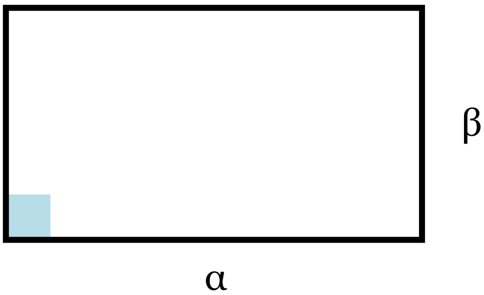
Στα προβλήματα αυτού του τύπου ισχύουν, ισχύουν τα περισσότερα από τα σχόλια που προηγήθηκαν, μόνο που η δοθείσα συνάρτηση μπορεί να παριστάνει περίμετρο, εμβαδό ή όγκο σχήματος. Γι' αυτό, βασικότερα εργαλεία μας είναι οι παρακάτω σχέσεις :

Τετράγωνο

Περίμετρος : 4α

Εμβαδό : α^2

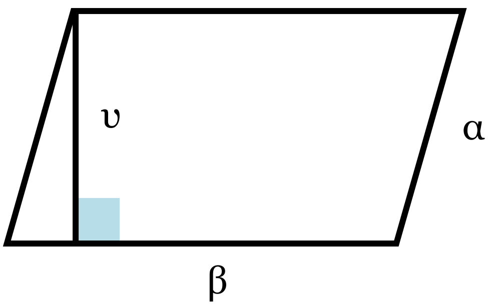
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο



Περίμετρος : $2\alpha + 2\beta$

Εμβαδό : $\alpha \cdot \beta$

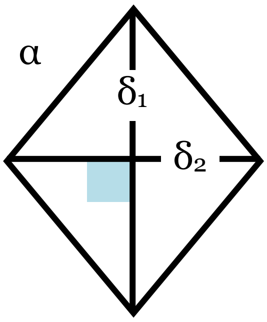
Πλάγιο παραλληλόγραμμο



Περίμετρος : $2\alpha + 2\beta$

Εμβαδό : $\beta \cdot \upsilon$

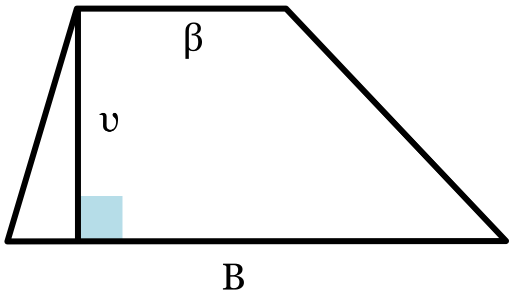
Ρόμβος



Περίμετρος : 4α

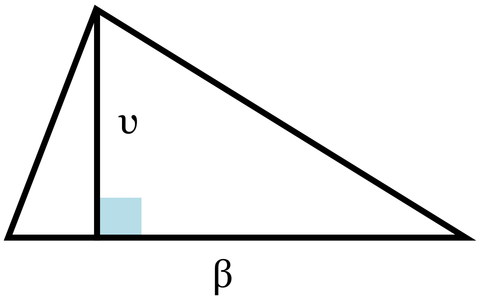
Εμβαδό : $\dfrac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

Τραπέζιο



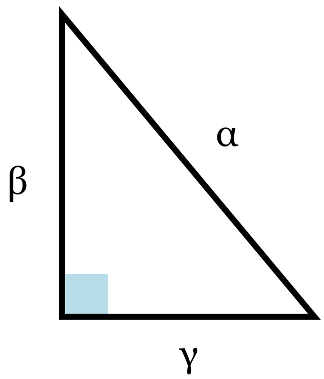
Εμβαδό : $\dfrac{(B+\beta)\cdot \upsilon}{2}$

Τρίγωνο



Εμβαδό : $\dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2}$

Ορθογώνιο τρίγωνο

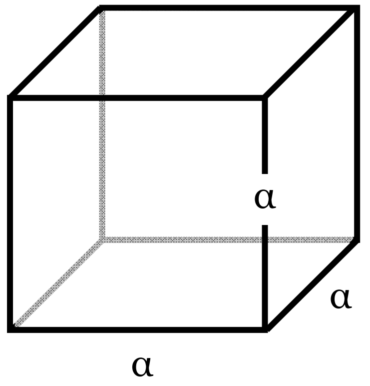


Εμβαδό : $\dfrac{\alpha \cdot \beta}{2}$

Πυθαγόρειο θεώρημα

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

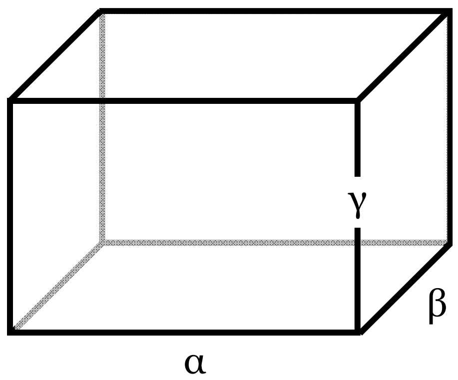
Κύβος



Εμβαδό : $6α^2$

Όγκος : $α^3$

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



Όγκος : $α \cdot β \cdot γ$

Ασκήσεις

Πανελλήνιες

1. Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται απο την συνάρτηση $f(t) = -3t^2 + 30t$, με $0 \le t \le 10$.

α. Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο αρχικά ;

β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του αερολπλάνου μετά από χρόνο t.

γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

δ. Να βρείτε την χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

[2003]

2. Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου παραλληλόγραμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα :

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 200x$.

β. Για ποιά τιμή του x το εμβαδό του οικοπέδου γίνεται μέγιστο ;

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

[2004]

3. Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \le t \le 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

α. Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων;

β. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

γ. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

δ. Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

[2005]

4. Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση $E(x) = 3x^2 + 20x$.

α. Να βρεθεί το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.

β. Να βρεθεί ο τύπος $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

γ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.

δ. Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος ;

[2005]

5. Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50 cm.

α. Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x)$, $0 < x < 50$.

β. Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο ;

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

[2006]

6. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40 . Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

7. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 100 m^2 ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

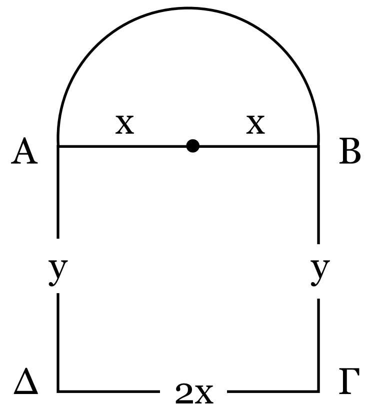
8. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο 32 dm^3 . Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.

9. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με 12 dm^2 . Ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;

10. Η ταχύτητα ενός κύματος μήκους λ μέσα στο νερό είναι $v = \kappa\sqrt{\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}}$, όπου κ και c θετικές σταθερές. Για ποιο μήκος κύματος έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα;

11. Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε το άθροισμά του να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

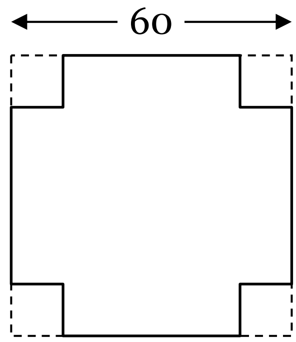
12. Ένα παράθυρο έχει το διπλανό σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερο φως.

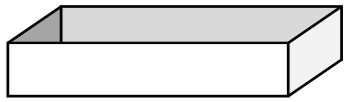


13. Το κέρδος P από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο : $P(t) = 20\left(200-\frac{250}{t}-t^3\right)$, $t > 3$. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

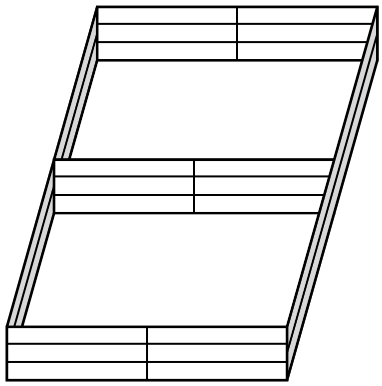
Σχολικό βιβλίο - Β

14. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.





15. Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή 16000 m^2 σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 9 ευρώ/m . Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.



16. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

17. Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

18. Ένα ορισμένο όχημα όταν ταξιδεύει με ταχύτητα υ km/h, καταναλώνει την ώρα $6 + 0{,}0001 \cdot υ^3$ λίτρα καύσιμα.

α. Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 1000 km με σταθερή ταχύτητα υ .

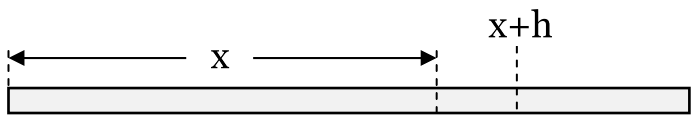
β. Να βρείτε την τιμή του υ για την οποία έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, καθώς και την ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000 km.

Να σχολιάσετε αν η απάντηση στο ερώτημα (ii) είναι εφαρμόσιμη λόγω της μεγάλης απόστασης.

19. Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 km βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km, θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

Σχολικό βιβλίο - Γ

20. Αν μια συρμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους ($\rho = m/l$) και μετριέται σε kgr/m. Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της, μετρούμενη από το αριστερό άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό απόσταση x μέτρα, δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x)$, τότε ορίζουμε ως γραμμική πυκνότητα ρ στο σημείο x το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος.



Αν υποθέσουμε ότι για μια ράβδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x) = \sqrt{x}$, όπου το x μετριέται σε m και η μάζα σε kgr, να βρεθεί :

i. Η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου, που βρίσκεται στο διάστημα [1, 1,21] .

ii. Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x = 1$.

21. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο :

$$C(x) = x^3 - 3\nu x^2 + 5\nu^3 \text{ ευρώ}$$

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 16 – ν ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

22. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

23. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο Α (α, β) του 1[ου] τεταρτημορίου. Μια ευθεία ε διέρχεται από το Α και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy στα p και q αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος p + q είναι ίση με $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$.

24. Αν C(x) είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται συνάρτηση κόστους, το πηλίκο $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C(x+h)-C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος**.

α. Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει : οριακό κόστος = μέσο κόστος

β. Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε ευρώ) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $C(x) = \dfrac{1}{1000}x^2 + 2x + 2600$.

i. Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

ii. Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

25. Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης p(x) της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**.

Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x) = x\cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R΄ λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης, από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x) = R(x) - C(x)$. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος P΄ καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**.

α. Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

β. Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι :

$$C(x) = 3800 + 5x - 0{,}001\cdot x^2$$

και η συνάρτηση ζήτησης : $p(x) = 50 - 0{,}01\cdot x$;

Διάφορες

26. Το ύψος ενός πυραύλου (σε m) μετά από t sec πτήσης, δίνεται από τη συνάρτηση: $f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5$, $t \geq 0$. Να εξετάσετε πότε ο πύραυλος αυτός ανεβαίνει και πότε κατεβαίνει, καθώς και το μέγιστο ύψος.

27. Το πλήθος των εγκλημάτων τα τελευταία 10 χρόνια, σε μία πόλη (2004 - 2014), δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση: $f(t) = 0{,}03t^3 + \frac{368{,}64}{t}$ (σε δεκάδες), $0 < t \leq 10$. Να εξετάσετε ποια χρονιά είχαμε την ελάχιστη εγκληματικότητα και ποια ήταν αυτή.

28. Ο αριθμός βακτηρίων N(t) σε μια συγκεκριμένη καλλιέργεια μεταβάλλεται μετά τη χρήση ενός βακτηριοκτόνου ως εξής: $N(t) = \frac{10.000}{1+t^2} + 2.000$, όπου ο χρόνος t εκφράζεται σε min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής και το πλήθος των βακτηρίων 1 και 2 min μετά τη χρήση του βακτηριοκτόνου.