ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα.

Βήμα 1

Βρίσκουμε την παράγωγο :

$$f'(x) = (x^2 - 7x + 10)' = 2x - 7$$

Βήμα 2

Λύνουμε την εξίσωση : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

Βήμα 3

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων και μονοτονίας :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Τ.Ε.

Για το πρόσημο παραστάσεων $1^{ου}$ βαθμού, ακολουθούμε τον εξής πρακτικό κανόνα : δεξιά του μηδενός → ομόσημο (του συντελεστή) του x .

Βήμα 4

Περιγράφουμε τα αποτελέσματά μας, αναλυτικά :

Μονοτονία

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα : $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα : $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$

Ακρότατα

- Η συνάρτηση f παρουσιάζει / έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο / θέση $x_o = \frac{7}{2}$ την τιμή :

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 10 = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10 = \frac{49 - 98 + 10}{4} = \boxed{\frac{59}{4}}$$

- Η συνάρτηση δεν έχει τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 1$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα.

Βήμα 1

Βρίσκουμε την παράγωγο :

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 1\right)' = \frac{2}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2 - 4x = 2x^2 - 4x$$

Βήμα 2

Λύνουμε την εξίσωση : $f'(x) = 0$

$$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ή } x = 2}$$

Βήμα 3

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων και μονοτονίας :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Μια παράσταση $2^{ου}$ βαθμού,. είναι γενικά ομόσημη (του συντελεστή) του x^2 , με εξαίρεση το διάστημα εντός των ριζών (αν έχει δύο) , όπου είναι ετερόσημη.

Βήμα 4

Περιγράφουμε τα αποτελέσματά μας, αναλυτικά :

Μονοτονία

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα : $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα : $[0, 2]$

Ακρότατα

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 0$ την τιμή :

$$f(0) = \frac{2}{3}0^3 - 6 \cdot 0^2 - 1 = \boxed{-1}$$

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 6$ την τιμή :

$$f(2) = \frac{2}{3}2^3 - 6 \cdot 2^2 - 1 = \frac{16}{3} - 25 = \boxed{-\frac{59}{3}}$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ και, στη συνέχεια, να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα.

Πεδίο ορισμού

Πρέπει : $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow \boxed{x \neq \pm 1}$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε :

- $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$
- $A_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$
- $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Όλα τα προηγούμενα, έχουν το ίδιο ακριβώς νόημα.

Βήμα 1

Βρίσκουμε την παράγωγο :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{(x)'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

Βήμα 2

Λύνουμε την εξίσωση : $f'(x) = 0$

$$\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \quad (\text{αδύνατη})$$

Παρατήρηση : Είναι φανερό ότι προκειμένου ένα κλάσμα να ισούται με το μηδέν, αρκεί ο αριθμητής να είναι μηδέν. Με άλλα λόγια, «αδιαφορούμε» παντελώς για τον παρονομαστή. Επιπλέον, όταν ο παρονομαστής είναι υψωμένος στο τετράγωνο, ως θετική ποσότητα δεν επηρεάζει το πρόσημο της παραγώγου. Το τελευταίο θα εξαρτάται, αποκλειστικά, απ' τον αριθμητή.

Βήμα 3

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων και μονοτονίας :

Έχει μεγάλη σημασία, στον πίνακα, να ξεχωρίζουν οι περιορισμοί, τους οποίους απαιτεί το πεδίο ορισμού.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	
f	↘	↘	↘	

Η παράγωγος έχει αριθμητή $-x^2-1$, ο οποίος είναι $2^{ου}$ βαθμού, επομένως, θα είναι παντού ομόσημη του $-x^2$.

Βήμα 4

Περιγράφουμε τα αποτελέσματά μας, αναλυτικά :

Μονοτονία

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα :

$$(-\infty, -1)\ ,\ (-1, 1) \text{ και } (1, +\infty)$$

Ακρότατα

- Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Παρατήρηση : Παρότι ο πίνακας χωρίζεται από της συνηθισμένες γραμμές, η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα για δύο, εξίσου, σημαντικούς λόγους : (α) οι γραμμές δεν αντιστοιχούν σε σημεία εντός του πεδίου ορισμού και (β) η μονοτονία δεν αλλάζει εκατέρωθεν των σημείων αυτών.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2x-8}$ και, στη συνέχεια, να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα.

Πεδίο ορισμού

Πρέπει : $2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 8 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 4}$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε : $x \in [4, +\infty)$

Βήμα 1

Βρίσκουμε την παράγωγο :

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x-8}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x-8}}(2x-8)' = \frac{1}{2\sqrt{2x-8}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-8}}$$

Βήμα 2

Λύνουμε την εξίσωση : $f'(x) = 0$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι θετική ποσότητα. Επομένως, καταλαβαίνουμε όχι μόνο πως η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη, μα επιπλέον και το πρόσημο, του πίνακα μονοτονίας.

Βήμα 3

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων και μονοτονίας :

Διαγραμμίζουμε όποιο διάστημα βρίσκεται εκτός πεδίου ορισμού.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f'		$+$		$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Τ.Ε.

Βήμα 4

Περιγράφουμε τα αποτελέσματά μας, αναλυτικά :

Μονοτονία

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα : $[4, +\infty)$

Ακρότατα

- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 4$ την τιμή :

  $f(4) = \sqrt{2\cdot 4-8} = 0$

Παρατήρηση : Το σημείο 4 αποτελεί άκρο του πεδίου ορισμού κι έτσι δεν απαιτείται ν' αλλάζει η μονοτονία εκατέρωθεν, ώστε να παρουσιάζεται ακρότατο. Το «εκατέρωθεν» εδώ δεν έχει ούτως ή άλλως νόημα, εφόσον μόνο η μια μεριά είναι εντός πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{5x - 5x^2}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(δ) Να βρείτε τις θέσεις και τις τιμές των τοπικών ακρότατων.

(ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 0$.

Πεδίο ορισμού

Πρέπει : $5x - 5x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x(1 - x) \geq 0$

Ρίζες : $x = 0$ ή $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$5x - 5x^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Συνεπώς : $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

Βήμα 1

Βρίσκουμε την παράγωγο :

$$f'(x) = \left(\sqrt{5x - 5x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5x - 5x^2}}\left(5x - 5x^2\right)' = \frac{5 - 10x}{\sqrt{2x - 8}}$$

Βήμα 2

Λύνουμε την εξίσωση : $f'(x) = 0$

$$\frac{5 - 10x}{\sqrt{2x - 8}} = 0 \Leftrightarrow 5 - 10x = 0 \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Βήμα 3

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων και μονοτονίας :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	
f '	+		+	0	−		−
f	↗						↘
		T.E.				T.M.	

Βήμα 4

Περιγράφουμε τα αποτελέσματά μας, αναλυτικά :

Μονοτονία

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα : $(-\infty, 0]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα : $[1, +\infty)$

Ακρότατα

- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$ την τιμή :

  $f(0) = \sqrt{5\cdot 0 - 5\cdot 0^2} = 0$

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 1$ την τιμή :

  $f(0) = \sqrt{5\cdot 1 - 5\cdot 1^2} = 0$