ΕΥΘΕΙΕΣ

Κάθε φορά, που νιώθουμε τρελή λαχτάρα να μιλήσουμε για ευθείες, φανταζόμαστε εξισώσεις της παρακάτω μορφής :

$$\mathbf{y = \alpha x + \beta}$$

Η εξίσωση αυτή θα πρέπει να γίνει στο μυαλό μας συνώνυμη της λέξης και του σχήματος της ευθείας.

Παραδείγματα : $y = 3x - 5$, $y = -2x + 10$

- Τα **y, x** είναι γενικά **μεταβλητές** κι έτσι - ίδια κι απαράλλαχτα - τ' αφήνουμε στην τελική απάντηση (παρότι, στη διάρκεια μιας άσκησης, τα αντικαθιστούμε συχνά με γνωστά νούμερα, για να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς).

- Τα **α, β** , από την άλλη, είναι απλά κάποιοι **σταθεροί** , πραγματικοί αριθμοί. Δυστυχώς, το πιο συχνά, θα πρέπει να τους υπολογίζουμε εμείς, απ' τα στοιχεία του προβλήματος.

Στην εξίσωση y = αx + β , τα α και β είναι πολύ σημαντικοί αριθμοί. Καθένας τους κρύβει μια ιδιαίτερη πληροφορία.

▶ Για παράδειγμα, ο αριθμός **β** (που λέγεται και σταθερός όρος) μας φανερώνει μεμιάς το σημείο, στο οποίο η ευθεία **τέμνει τον άξονα y΄y** .

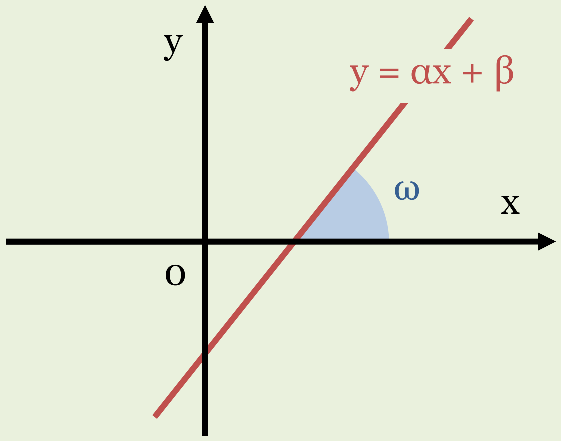
▶ Από την άλλη, ο αριθμός **α** (δηλαδή, ο συντελεστής του x) ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** ή , πιο απλά, **κλίση** της ευθείας.

Η κλίση εκφράζει κάτι λίγο δυσκολότερο, αλλά αν είναι να το πούμε όσο πιο απλά γίνεται, μας ενημερώνει για το πόσο «ομαλή» ή «απότομη» είναι η ευθεία μας.

Πιο σωστά, λέμε πως η κλίση ισούται με την **εφαπτομένη** της γωνίας, που σχηματίζει η ευθεία, με τον άξονα x΄x . Δηλαδή :

$\alpha = \varepsilon\varphi\omega$

Το παρακάτω σχήμα είναι προσφορά του καταστήματος :



Αν, παρόλα αυτά, δεν έχουμε ιδέα από τριγωνομετρία, δε χρειάζεται να μας λούσει κρύος ιδρώτας. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η γνώση αυτή δε θα μας χρειαστεί ιδιαίτερα. Αν, ωστόσο, σπάσει ο διάολος το ποδάρι του, αρκεί να θυμόμαστε ότι :

γωνία	**εφαπτομένη**
30^o	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^o	1
60^o	$\sqrt{3}$
120^o	$-\sqrt{3}$
135^o	-1
150^o	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

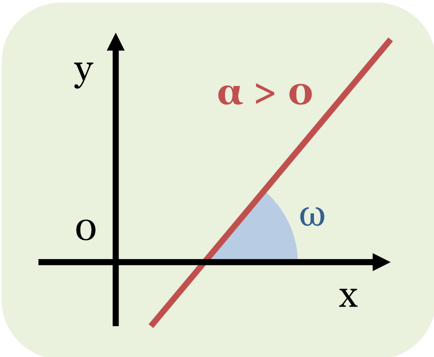
Η μισές ασκήσεις, για ευκολία, αφορούν στις **45°** ή στις **135°**, οπότε, αν το καλοσκεφτεί κανείς, τα πράγματα γίνονται ακόμα καλύτερα.

● Κλίση και Μονοτονία

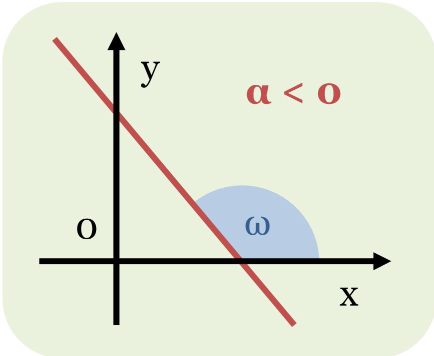
Οι μαθητές του Λυκείου, γνωρίζουν ίσως ότι η λέξη **«μονοτονία»** αναφέρεται γενικά στις συναρτήσεις. Να το πούμε ευκολότερα με μια εικόνα : η μονοτονία αφορά στη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης. Αν ετούτη είναι σχεδιασμένη «προς τα πάνω», «προς τα κάτω» ή «οριζοντίως». (*)

(*) = οι αυστηρότεροι ορισμοί δίνονται σε ξεχωριστή παράγραφο

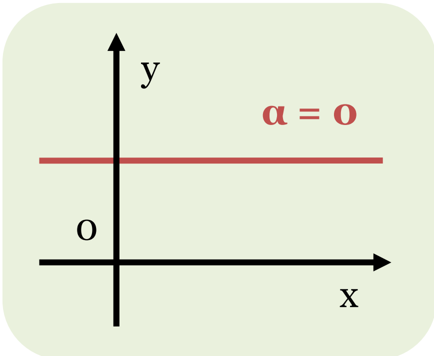
▶ Αν η κλίση είναι θετικός αριθμός **(α > 0)**, τότε η ευθεία μας είναι «ανηφορική» και την ονομάζουμε, ορθότερα, **γνησίως αύξουσα**.



▶ Αν η κλίση είναι αρνητικός αριθμός **(α < 0)**, τότε η ευθεία μας είναι «κατηφορική» και την ονομάζουμε **γνησίως φθίνουσα**.



▶ Αν η κλίση είναι μηδέν **(α = 0)**, τότε η ευθεία μας είναι «οριζόντια» και την ονομάζουμε **σταθερή**.



Γενικότερα, τώρα κάθε εξίσωση της μορφής :

$$\mathbf{Ax + By + \Gamma = 0}$$

παριστάνει ευθεία, αρκεί $A \neq 0$ ή $B \neq 0$. Μια τέτοια εξίσωση, ονομάζεται **γραμμική**.

- Προκειμένου να υπολογίσουμε την κλίση της, στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει πρώτα να τη φέρουμε στη μορφή $y = \alpha x + \beta$. Αυτό, το πετυχαίνουμε εύκολα, λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση, ως προς **y** .

Παράδειγμα

Η ευθεία $6x - 2y - 3 = 0$ γίνεται :

$$2y = -6x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{-6}{-2}x + \frac{3}{-2} \Leftrightarrow y = 3x - \frac{3}{2}$$

άρα έχει κλίση : $\alpha = 3$

Ειδικές περιπτώσεις

- ### Ευθεία, η οποία διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων

Όταν μια ευθεία περνάει απ' την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο με συντεταγμένες (0, 0) , τότε έχει τη μορφή :

$$\mathbf{y = \alpha x}$$

δηλαδή : **β = 0**

➲ **Παραδείγματα :** $y = 2x$, $y = -5x$, $y = \frac{1}{3}x$

- ### Ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x (οριζόντια)

Όταν μια ευθεία είναι οριζόντια , τότε έχει εξίσωση :

$$\mathbf{y = \beta}$$

δηλαδή (το 'παμε και νωρίτερα) : **α = 0**

➲ **Παραδείγματα :** $y = -4$, $y = \frac{7}{3}$, $y = \sqrt{5}$

- ### Ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y (κατακόρυφη)

Όταν μια ευθεία είναι κατακόρυφη, τότε έχει εξίσωση :

$$\mathbf{x = c} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

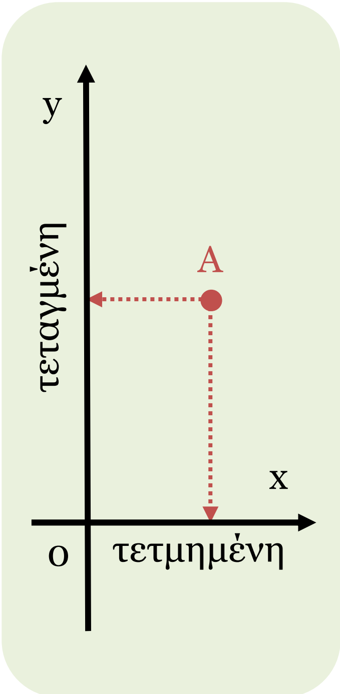
➲ **Παραδείγματα :** $x = -1$, $x = 2019$

▶ Εδώ, πρέπει να σημειώσουμε, ότι κάθε ευθεία είναι γενικά μια μορφή συνάρτησης, **εκτός** από την περίπτωση αυτή. Δηλαδή, η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας **δεν είναι συνάρτηση**! Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, η κλίση της ευθείας **δεν ορίζεται!**

Ευθείες & σημεία

Σημείο που ανήκει σε μια ευθεία

Θυμόμαστε ότι:



Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, η θέση οποιουδήποτε σημείου καθορίζεται από δύο συγκεκριμένους αριθμούς, τους οποίους καλούμε **συντεταγμένες**. Η συντεταγμένη, η οποία αναφέρεται στον άξονα x΄x ονομάζεται **τετμημένη**, ενώ εκείνη που αναφέρεται στον y΄y ονομάζεται **τεταγμένη**. Το χρέος, βέβαια, του μαθητή είναι να τα λέει μια ζωή … ανάποδα!

Έχουμε συμφωνήσει, ακόμη, κάθε φορά που δίνουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου, να γράφουμε πάντα **πρώτο το x** (δηλαδή, την τετμημένη) και **δεύτερο το y** (δηλαδή, την τεταγμένη). Έτσι, δεν υπάρχουν παρεξηγήσεις και για ένα σημείο π.χ. $(2, -6)$ καταλαβαίνουμε ότι : $x = 2$ και $y = -6$

Αν ένα σημείο, τώρα, **ανήκει σε** μια δεδομένη ευθεία ή, αντιστρόφως, αν μια δεδομένη ευθεία **διέρχεται από** ένα σημείο, είναι πολύ εύκολο να το καταλάβουμε.

- Αρκεί οι συντεταγμένες του σημείου, να **επαληθεύουν** την εξίσωση της ευθείας.

Με άλλα λόγια, πηγαίνουμε στην εξίσωση της ευθείας και αντικαθιστούμε στη θέση του x την τετμημένη του σημείου (τον πρώτο αριθμό), στη θέση του y την τεταγμένη του σημείου (το δεύτερο αριθμό) και κάνουμε τις πράξεις. Αν το αποτέλεσμα είναι μια ισότητα αληθής (π.χ. $5 = 5$) και όχι καμία ανοησία (π.χ. $5 = 12$), τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία, που μελετούμε.

Παράδειγμα

Θα εξετάσουμε αν το σημείο Α $(-3,\ -5)$ είναι σημείο της ευθείας (ε) , με εξίσωση : $y = \frac{1}{3}x - 4$. Αντικαθιστούμε όπου $x = -3$ και $y = -5$ κι έχουμε :

$$-5 = \frac{1}{3}(-3) - 4 \Leftrightarrow -5 = -1 - 4 \Leftrightarrow -5 = -5$$

Η τελευταία ισότητα είναι προφανής, οπότε η (ε) διέρχεται απ' το σημείο Α .

Σημεία τομής ευθείας με τους άξονες

Για να βρω τα σημεία, στα οποία μια δεδομένη ευθεία (ή οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση) τέμνει τους δύο άξονες, αρκούν τα εξής βήματα :

- Για τον άξονα **x'x** , θέτουμε όπου **y = 0** και λύνουμε την εξίσωση, που προκύπτει.
- Για τον άξονα **y'y** , θέτουμε όπου **x = 0** και λύνουμε την εξίσωση, που προκύπτει.

Ευκολάκι!

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας (ε) : $y = 6x + 10$, με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

- Για $y = 0$ έχουμε : $0 = 6x + 10 \Leftrightarrow -6x = 10 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

  Άρα, η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$.
- Για $x = 0$ έχουμε : $y = 6 \cdot 0 + 10 \Leftrightarrow y = 10$ Δηλαδή, το β !

  Άρα, η (ε) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,\ 10)$.

Ευθείες & άλλες ευθείες

- ## Ευθείες παράλληλες

Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε θα έχουν την **ίδια κλίση**, δηλαδή το ίδιο **α** . Τι σημαίνει αυτό πρακτικά; Αν (ε_1) μια ευθεία με εξίσωση $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και (ε_2) μια ευθεία με εξίσωση $y = \alpha_2 x + \beta_2$, τότε ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία :

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2}$$

- ## Ευθείες κάθετες

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, μεταξύ τους, τα πράγματα είναι μια στάλα πιο δύσκολα : θα πρέπει το **γινόμενο των κλίσεων** να ισούται με **−1** . Δηλαδή, αν (ε_1) η ευθεία $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και (ε_2) η ευθεία $y = \alpha_2 x + \beta_2$, τότε ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία :

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1}$$

- ## Σημείο τομής δύο ευθειών

Για να βρούμε το σημείο, στο οποίο τέμνονται δύο ευθείες (δηλαδή, τις συντεταγμένες του), λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων :

$$\begin{cases} \mathbf{y = \alpha_1 x + \beta_1} & (1) \\ \mathbf{y = \alpha_2 x + \beta_2} & (2) \end{cases}$$

Πρακτικά, αφού και οι δύο εξισώσεις είναι λυμένες ως προς y, το μόνο που μένει είναι να κατασκευάσουμε, από τα δεύτερα μέλη, μια καινούργια εξίσωση, απ' την οποία θα υπολογίσουμε το x :

$$\alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_2 x + \beta_2$$

Στη συνέχεια (όπως και σε κάθε σύστημα), αντικαθιστούμε την τιμή του x , που βρήκαμε, σε μία από τις εξισώσεις (1) ή (2) (όποια θέλουμε) υπολογίζοντας, έτσι, και το y .

Παράδειγμα

Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$y = 2x - 9 \text{ και } y = -3x + 1$$

Απ' το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{cases} y = 2x - 9 & (1) \\ y = -3x + 1 & (2) \end{cases}$$

έχουμε :

$$2x - 9 = -3x + 1 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$$

Με αντικατάσταση, έστω στην (1) :

$$y = 2 \cdot 2 - 9 \Leftrightarrow y = -5$$

Επομένως, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο με συντεταγμένες (2, −5) .

Αν οι ευθείες είχαν την ίδια κλίση (δηλαδή, το ίδιο α), τότε θα ήταν παράλληλες και, προφανώς, δε θα τέμνονταν πουθενά. Δε θα 'χε, λοιπόν, νόημα να λύσουμε το σύστημα. Αν παρόλα αυτά το κάναμε, θα καταλήγαμε σε μια εξίσωση αδύνατη !

Προσέχουμε, να γράφουμε πάντα πρώτα το x και μετά το y !

Ασκήσεις

Κλίση

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, που έχει συντελεστή διεύθυνσης -3 και διέρχεται απ' το σημείο Α $(3, -8)$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, που έχει κλίση $\frac{1}{2}$ και διέρχεται απ' το σημείο Β $(-1, -4)$.

3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' το σημείο Γ $(3, -8)$ και η εφαπτομένη της γωνίας, που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, ισούται με 2.

4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $-\sqrt{3}$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της οριζόντιας ευθείας, η οποία διέρχεται απ' το σημείο $(7, -7)$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται απ' το σημείο Δ $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ κι έχει κλίση -8.

Σημεία

7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Α $(10, 2)$ και Β $(-2, 8)$.

8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Γ $(0, 4)$ και Δ $(6, 0)$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Ε $(0, 0)$ και Ζ $(-12, -3)$.

10. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Η $(2019, 3)$ και Θ $(1974, 3)$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Κ $(-4, -4)$ και Λ $(1, 1)$.

12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Κ $(-\frac{1}{4}, -\frac{2}{3})$ και Λ $(\frac{5}{2}, -1)$.

Παράλληλες & κάθετες

13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 5x - 13$ και διέρχεται απ' το σημείο Ε, με συντεταγμένες $(\frac{1}{2}, -2)$.

14. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -8x + 1$ και διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων .

15. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \sqrt{5}\,x$ και διέρχεται απ' το σημείο Ζ, με συντεταγμένες $(\sqrt{5}, 10)$.

16. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ και διέρχεται απ' το σημείο $(0, 1)$.

17. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{8}x + 7$ και διέρχεται απ' το σημείο Ε, με συντεταγμένες $(-1, 2)$.

18. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία $y = 10x - 3$ και διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων .

19. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία τέμνει την ευθεία $y = -x + 5$ στο σημείο $(4, 1)$ και είναι κάθετη σ' αυτήν.

Γενική μορφή & άξονες

20. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων και το σημείο $(1, -9)$.

21. Να βρεθεί η κλίση της ευθείας : $4x + 2y - 9 = 0$

22. Να βρεθεί η κλίση της ευθείας : $6x = 3y + 50$

23. Να βρεθεί η κλίση της ευθείας η οποία διέρχεται απ' τα σημεία Π $(4, 6)$ και Ρ $(8, -2)$.

24. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, της ευθείας : $y = -7x + 21$.

25. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, της ευθείας : $y = 8x$.

26. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, της ευθείας $y = -6$.

Τομή ευθειών

27. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$(\varepsilon_1) : y = 2x + 5 \text{ και } (\varepsilon_2) : y = -5x + 12$$

28. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$(\varepsilon_1) : y = -6x + 1 \text{ και } (\varepsilon_2) : y = -6x - 11$$

29. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$y = -13x \text{ και } y = 26$$

30. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$(\varepsilon_1) : y = 5x \text{ και } (\varepsilon_2) : y = -2x$$

31. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$(\varepsilon_1) : y = \frac{5}{2}x \text{ και } (\varepsilon_2) : y = -x + 8$$

32. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$3y = x - 1 \text{ και } 2x = -6y + 5$$

33. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών :

$$y = -1453\,x \text{ και } y = 1821\,x$$

Συνδυαστικές

34. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = -\frac{2}{3}x+1$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $y_0 = 5$.

35. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' το σημείο τομής των $y = x + 1$ και $2x = -4y + 2$ και την αρχή των αξόνων.

36. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι κάθετη στον άξονα $y'y$ και διέρχεται απ' το σημείο τομής των $2y - 2x = 2$ και $y + 4 = 4x$.

37. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται απ' το σημείο τομής της $y = \sqrt{7}x+\frac{1}{4}$ με τον $y'y$ και το σημείο τομής της $y = 12x + 48$ με τον άξονα $x'x$.

38. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $x'x$, στο ίδιο σημείο με την $y = -6x - 3$.

39. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ $(-2, 11)$ και είναι κάθετες στους δύο άξονες.

Παραμετρικές

40. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ , ώστε το σημείο με συντεταγμένες ($\lambda - 1$, $\frac{2-4\lambda}{3}$) να είναι σημείο της ευθείας $y = -2x + \frac{1}{6}$.

41. Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (5 - \frac{\lambda}{2})x + \lambda - 5$ να διέρχεται απ' το σημείο Σ $(3, -4)$.

42. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $y = (3\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + 9$ και $y = (\lambda^2 + 3)x$ να είναι μεταξύ τους παράλληλες .

43. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1) : $y = (\lambda - \sqrt{10})x - 8$ και (ε_2) $y = (\lambda + \sqrt{10})x - 3$ να είναι μεταξύ τους κάθετες .

44. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ και μ , ώστε η ευθεία :

$$y = (\lambda - \frac{\mu}{2})\, x + \mu + 2\lambda$$

να διέρχεται απ' τα σημεία Μ (4, 1) και Ν (−2, 4) .

45. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ και μ , ώστε η ευθεία :

$$y = (2\lambda + 3\mu)\, x + \lambda - \mu + 1$$

να διέρχεται απ' το σημείο Μ (1, −1) και να είναι παράλληλη στην $y = -x + \sqrt{2}$.